بسم الله الرحمن الرحيم

**تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه**



اینجانب مریم درخشان خانقاه دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۲۸۳۱۱۳ که در تاریخ ۱۳۹۲/۱۲/۲۰ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "روش شبه درونیاب اسپلاین برای حل معادله انتگرال فردهلم" دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

٤) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

٦) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: مریم درخشان خانقاه

امضا

تاریخ

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

# روش شبه درونیاب اسپلاین برای حل معادله انتگرال فردهلم

استاد راهنما:

**دکتر محمد ضارب نیا**

استاد مشاور:

**دکتر داریوش لطیفی**

پژوهشگر:

مریم درخشان خانقاه

اسفند ۱۳۹۲

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

# روش شبه درونیاب اسپلاین برای حل معادله انتگرال فردهلم

پژوهشگر:

**مریم درخشان خانقاه**

**ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ...........**

| نام و نام خانوادگی | مرتبه‌ی علمی | سمت | امضا |
|---|---|---|---|
| دکتر محمدضارب نیا | استاد راهنما و رئیس کمیته داوران | دانشیار | |
| دکتر داریوش لطیفی | استاد مشاور | استادیار | |
| دکتر عبدالله برهانی فر | داور | دانشیار | |

اسفند ۹۲

تقدیم به آبی نگاه همراهان همیشگی زندگیم

مادر و پدرم

که همواره آسمان دلواپس چشمانشان بدرقه راهم است...

# خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

**اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست**

**او جانشین همه نداشتن‌هاست...**

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

بنام خدا

ن والقلم و ما یسطرون

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید. سپاس یگانه ای را که آموختن را آموخت تا از آموخته‌هایمان راز آفرینش را فرا گیریم. و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به هم نشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. اینک پایان دوره‌ای فرا رسیده است که زمانی آغازش را به شادی تماشا کرده بودم، راهی که با بودن و یاری رساندن بسیاری به پایان رسید با تمام خوبی‌ها و سختی‌هایش. گر چه حمد و سپاس سزاوار پروردگار است اما بر خود لازم می‌دانم تا سپاسگذار تمام کسانی باشم که در مدت این دوره یاریم نمودند. از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر **محمد ضارب نیا** که گام به گام مرا در تهیه این مجموعه یاری فرمودند بی نهایت قدردانی می نمایم. نه تنها به خاطر آن که بر دانش‌ام افزود و اندیشه‌ام را پرورش داد، که به پاس زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های تمام وقت و عاطفه سرشارشان.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر **داریوش لطیفی** که مشاوره رساله اینجانب را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

همچنین از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر **برهانی فر** که زحمت بازخوانی و داوری رسالهٔ اینجانب را بر عهده داشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌نمایم. و توفیقات روز افزون را برای این دو عزیز از خداوند منان خواهانم.

به رسم ادب ارادت خاضعانه خود را به محضر خانواده دلسوزم که مرا با تمام وجود یاری فرمودند و با حمایتهای معنوی و مادی خویش راه پیشرفت را برایم هموار کردند، تقدیم میدارم.

مریم درخشان
اسفند ۱۳۹۲

نام خانوادگی: درخشان خانقاه نام: مریم

عنوان پایان‌نامه:

روش شبه درونیاب اسپلاین برای حل معادله انتگرال فردهلم

استاد راهنما: دکتر محمدضارب نیا

استاد مشاور: دکترداریوش لطیفی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ دفاع:۱۳۹۲/۱۲/۲۰ تعداد صفحات: ۷٦

**چکیده**

در این پایان نامه روش شبه درونیاب اسپلاین برای حل مسائل مورد مطالعه قرار گرفته است. مقایسه ای بین قاعده به دست آمده در اینجا و قاعده سیمپسون و همچنین مقایسه ای با قاعده گریگوری برای انتگرال های یک گانه، دوگانه و سه گانه از مرتبه بالا انجام می گیرد. مثال هایی برای نشان دادن کارائی و دقت روش های ارائه شده، آورده شده است.

کلیدواژه‌ها: قانون انتگرال گیری، شبه درونیاب اسپلاین، معادله انتگرال فردهلم، قاعده گریگوری، آنالیز همگرایی

# فهرست

# فهرست جداول

# فهرست اشکال

# مقدمه

می دانیم که معادلات انتگرال، یکی از مهمترین معادلات به دست آمده از رشته های مختلف، مانند فیزیک، شیمی، مهندسی، زیست شناسی و غیره می باشد.

با توجه به اینکه حل تحلیلی دسته ای از این معادلات وجود ندارد یا به راحتی قابل حل نمی باشد، لذا برای حل این مشکل از روش های عددی استفاده می کنیم. در روش های عددی، برای حل معادلات انتگرال دو عامل درونیابی و انتگرال گیری عددی حائز اهمیت می باشد. در این راستا می توان به درونیابی با استفاده از اسپلاین ها اشاره کرد. اوایل قرن ۱۹، $B$–اسپلاین توسط نیکلای لبا چفکی [1] از دانشگاه ایالتی کازان [2] روسیه مورد بررسی قرار گرفت. کوکس [3] و دبور [4] در سال ۱۹۷۲ فرمول بازگشتی برای محاسبه عددی آن بیان کردند (Deboor, 1978).

$B$–اسپلاین ها می توانند در یک راه حل پایدار بوسیله الگوریتم دبور ارزیابی شوند. در رشته ریاضی گرایش آنالیز عددی، الگوریتم دبور یک الگوریتم سریع و پایدار برای ارزیابی منحنی اسپلاین در فرم $B$–اسپلاین است (Lee, 1982).

$B$–اسپلاین ها در ریاضیات بطور قابل ملاحظه ای بسط و گسترش یافته و تعاریف متفاوتی بنا به کاربرد، به آن داده اند و حتی از آن در گراف های کامپیوتری استفاده های چشم گیری شده است (محمدزاده و صالحی، ۱۳۸۳).

با استفاده از $B$–اسپلاین ها می توان معادلات گوناگونی را حل کرد. که به برخی از آنها به صورت زیر اشاره می کنیم.

کادال باجو [5] وهمکارانش روش هم محلی را براساس استفاده از توابع پایه ای $B$–اسپلاین برای معادلات یک بعدی منفرد توسعه دادند (Kadalbajoo & Gupta & Awasthi, 2008).

خالیفا [6] روش هم محلی $B$–اسپلاین مکعبی را برای حل معادله موج صریح منظم تعمیم داده شده ($MRLW$) به کار برده است (Khalifaa, 2003).

---

[1] Nikolai Lobachevsky
[2] Kazan
[3] Cox
[4] De Boot
[5] Kadalbajoo
[6] Khalifa

ایدریس [1] و همکارانش روش گالرکین را با استفاده از توابع پایه ای $B$-اسپلاین مرتبه پنج برای به دست آوردن حل عددی معادله موج صریح منظم شده ($RLW$) بکار برده اند (Dag & Sakab & Irkb, 2006).

محتوای این پایان نامه در چهار فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

در فصل اول مفاهیم مقدماتی را بیان نموده و به معرفی $B$-اسپلاین و خواص آن می پردازیم، در ادامه مروری بر معادلات انتگرالی و انواع آن و همچنین کاربردشان خواهیم داشت. در فصل دوم از اسپلاین ها به عنوان توابع پایه ای استفاده نموده و قوائد جدیدی، براساس انتگرال گیری شبه درونیاب اسپلاین می سازیم. در فصل سوم روش ارائه شده را برای معادله انتگرال فردهلم بررسی می کنیم. لازم به ذکر است که با به کار گیری و استفاده از قضایای مربوط به شبه درونیاب اسپلاین، خطای درونیاب و انتگرال گیری عددی را بررسی کرده و کران خطائی برای آنها بدست می آوریم. با استفاده از روش شبه درونیاب اسپلاین، معادله انتگرال فردهلم را گسسته سازی می کنیم. در نهایت در فصل چهارم برای نشان دادن کارائی روش ارائه شده و برای تائید همگرایی و نتایج تحلیلی به دست آمده، مثال هایی را با پیاده سازی روش ارائه شده مورد بحث و بررسی قرار می دهیم. مثال ها و الگوریتم های ارائه شده با استفاده از برنامه نویسی کامپیوتری با نرم افزار ریاضی متمتیکا انجام می گیرد.

[1] Idris

# فصل ۱

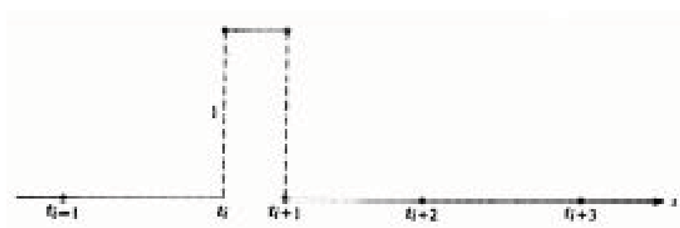
# مفاهیم و مقدمات اولیه

## ۱.۱ مقدمه

در این فصل برخی مفاهیم، تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، بیان نموده و به معرفی $B$–اسپلاین و خواص آن می پردازیم. در ادامه تاریخچه معادلات انتگرال و انواع آن را بررسی می کنیم. مطالب این فصل از منابع (توتونیان، ۱۳۸۹)، (Atkinson, 1997)، (Boling, 1995) و (Delves & Mohamed, 1985) گردآوری شده است.

## ۲.۱ $B$–اسپلاین

**تعریف ۱.۲.۱.** $B$–اسپلاین های درجه صفر با $B_i^{\circ}$ نمایش داده می شوند و نمودار آن به صورت زیر می باشد.




شکل ۱.۱: $B$–اسپلاین $B_i^{\circ}$

اندیس $i$ همه اعداد صحیح را اختیار می کند. نقاط پر رنگ در شکل، ما را به این راهنمایی می کنند که تعریف کنیم $B_i^{\circ}(t_i) = ۱$ و $B_i^{\circ}(t_{i+۱}) = ۰$. لذا تعریف کلی را به صورت زیر داریم:

$$B_i^{\circ}(x) = \begin{cases} ۱, & t_i \leq x \leq t_{i+۱}, \\ ۰, & \text{سایر}. \end{cases}$$

لذا با استفاده از تعریف بالا می توان یک دنباله نامتناهی، $\{B_i^{\circ} : i \in Z\}$ را تشکیل داد.

برخی از خواص $B_i^{\circ}$ عبارتند از:

۱. محمل $B_i^{\circ}$, به صورت مجموعه ای از $x$ ها است که در آنها برای بازه $[t_i, t_{i+۱})$ داریم: $B_i^{\circ}(x) \neq ۰$.

۲. $B_i^{\circ}(x) \geq ۰$ به ازای همه $i$ ها و همه $x$ ها.

۳. $B_i^{\circ}$ از راست بر روی همه نقاط خط حقیقی، پیوسته است.

۴. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ به ازای همه $x$ ها.

**ملاحظه ۱.۲.۱.** توابع $B_i^0$ نقطه ی شروعی برای تعریف بازگشتی همه $B$-اسپلاین های از درجه بالاتر هستند. این رابطه بازگشتی به صورت زیر تعریف می شود،

$$B_i^k(x) = (\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i})B_i^{k-1}(x) + (\frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}})B_{i+1}^{k-1}(x), \qquad (k \geq 1). \tag{۱.۱}$$

تمام ویژگی های $B$-اسپلاین های از درجه بالاتر از این تعریف بازگشتی نتیجه خواهند شد. با وارد کردن برخی توابع خاص

$$V_i^k(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i},$$

می توانیم رابطه بازگشتی را به صورت زیر بنویسیم:

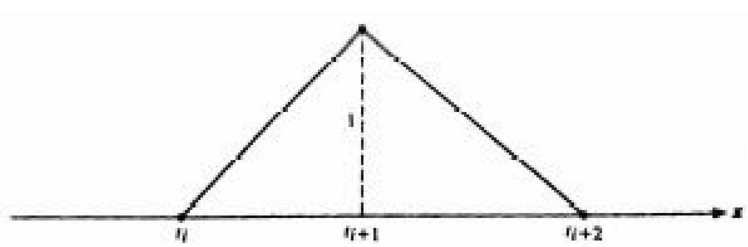
$$B_i^k = V_i^k B_i^{k-1} + (1 - V_{i+1}^k)B_{i+1}^{k-1}. \tag{۲.۱}$$

چون $B_i^0$ یک چند جمله ای قطعه به قطعه از درجه صفر است، و چون $V_i^k$ خطی است، $B_i^1$ یک چند جمله ای قطعه به قطعه از درجه کوچکتر یا مساوی یک است. همین دلیل نشان می دهد که به طور کلی یک چند جمله ای قطعه به قطعه از درجه کوچکتر یا مساوی $k$ خواهد بود.

**تعریف ۲.۲.۱.** باکمک معادله(۱.۱) می توانیم یک فرمول صریح برای $B_i^1(x)$ به صورت زیر ارائه دهیم:

$$B_i^1(x) = (\frac{x - t_i}{t_{i+1} - ti})B_i^0(x) + (\frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_i})B_{i+1}^0(x) = \begin{cases} 0, & x < t_i \ x \geq t_{i+2}, \\ \frac{x-t_i}{t_{i+1}-ti}, & t_i \leq x \leq t_{i+1}, \\ \frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & t_{i+1} \leq x < t_{i+2}, \end{cases}$$

لذا نمودار $B_i^1$ را به صورت زیر خواهیم داشت:




شکل ۲.۱: $B$-اسپلاین $B_i^1$

برخی از خواص توابع $B_i^1$ عبارتند از:

۱. محمل $B_i^1$ بازه $(t_i, t_{i+2})$ است.

۲. $0 \leq B_i^1$ برای تمام $i$ ها و $x$ ها.

۳. $B_i^1$ پیوسته است و در هر نقطه بجز $t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$ مشتق پذیر است.

٤. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^1(x) = 1$ به ازای تمام $x$ ها.

برای بررسی خاصیت ۴ ، $x$ ای دلخواه و متعلق به $R$ در نظر می گیریم. چون $t_i$ وقتی $i$ افزایش می یابد به $+\infty$ همگرا می گردد و وقتی $i$ کاهش می یابد به $-\infty$ همگرا می شود، می توانیم یک اندیس $j$ طوری بیابیم که $t_i \leq x < t_{j+1}$ ، بنابراین $B_i^1(x) = 0$ برای تمام $i$ ها به استثنای $i = j$ یا $i = j - 1$ . از اینرو برای این $x$ داریم:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^1(x) = B_{j-1}^1(x) + B_j^1(x) = \frac{t_{j+1} - x}{t_{j+1} - t_j} + \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} = 1.$$

## ۳.۱ خواص $B$-اسپلاین ها

در این بخش خواص مهم خانواده $B_i^k$ ، $(i \in Z, k \in N)$ را شرح می دهیم.

**لم ۱.۳.۱.** اگر $k \geq 1$ و $x \notin (t_i, t_{i+k+1})$ آنگاه $B_i^k(x) = 0$.

**برهان.** قبلا ملاحظه کردیم که این رابطه برای $k = 1$ برقرار است اما برای $k = 0$ برقرار نیست. اگر این برای یک اندیس معین $(k - 1)$ درست باشد، آنگاه به دلیل زیر برای $k$ نیز درست خواهد بود. اگر $x \notin (t_i, t_{i+k+1})$ آنگاه $x \notin (t_i, t_{i+k})$ و $x \notin (t_{i+1}, t_{i+k+1})$. بنا بر فرض استقرا $B_i^{k-1}(x) = 0$ و $B_{i+1}^{k-1}(x) = 0$. از معادله (۱.۱) نتیجه می شود که $B_i^k(x) = 0$. □

**لم ۲.۳.۱.** فرض کنید $k \geq 0$ اگر $x \in (t_i, t_{i+k+1})$ آنگاه $B_i^k(x) > 0$.

**برهان.** قبلا ملاحظه کردیم که حکم برای حالتی که $k = 0$ یا $k = 1$ درست است. حال فرض کنید که این ادعا برای یک اندیس $k - 1$ با $k \geq 2$ درست باشد. این فرض و لم ۱.۲.۱ ایجاب می کند که برای تمام $i$ ها و $x$ ها، $B_i^{k-1}(x) \geq 0$. فرض کنید $t_i < x < t_{i+k+1}$. آنگاه عامل های خطی سمت راست معادله (۱.۱) مثبت هستند. بنابر

فرض استقرا $B_i^{k-1}(x) > 0$ در $(t_i, t_{i+k})$ و $B_{i+1}^{k-1}(x) > 0$ در $(t_{i+1}, t_{i+k+1})$. چون $k \geq 2$ ، این دو بازه اشتراک دارند و بنابر معادله (۱.۱) ملاحظه می کنیم که $B_i^k(x) > 0$. □

**لم ۳.۳.۱.** داریم:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k = \sum_{-\infty}^{\infty} [c_i V_i^k + c_{i-1}(1 - V_i^k)] B_i^{k-1}.$$

**برهان.** از معادله (۲.۱) و انجام اعمالی بر روی سریهای مقدماتی نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i [V_i^k B_i^{k-1} + (1 - V_{i+1}^k) B_{i+1}^{k-1}] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i V_i^k B_i^{k-1} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i-1}(1 - V_i^k) B_i^{k-1}.\end{aligned}$$

□

**لم ٤.۳.۱.** به ازای هر $k$ داریم:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = 1.$$

**برهان.** برای اثبات به (توتونیان، ۱۳۸۹) مراجعه شود. □

**لم ۵.۳.۱.** به ازای هر $k \geq 2$،

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = (\frac{k}{t_{i+k} - t_i}) B_i^{k-1}(x) - (\frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}) B_{i+1}^{k-1}(x).$$

وقتی $k = 1$ ، معادله برای تمام $x$ ها به جز $x = t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$ برقرار است.

**برهان.** برای اثبات به (توتونیان، ۱۳۸۹) مراجعه شود. □

**ملاحظه ۱.۳.۱.** از لم ۵.۲.۱ فرمول زیر را می توانیم نتیجه بگیریم:

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x) = k \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+k} - t_i}) B_i^{k-1}(x). \quad (۳.۱)$$

**لم ۶.۳.۱.** قانون انتگرال گیری زیر برای $B$–اسپلاین برقرار است:

$$\int_{-\infty}^{x} B_i^k(s)ds = (\frac{t_{i+k+1}-t_i}{k+1})\sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x).$$

**برهان.** برای اثبات به مرجع (توتونیان، ۱۳۸۹) مراجعه شود. $\square$

**تعریف ۱.۳.۱.** اگر $f$ یک تابع و $k$ یک زیر مجموعه از دامنه اش باشد، آنگاه تحدید $f$ به $k$ را با $f \mid k$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$(f \mid k)(x) = f(x), \qquad (x \in k).$$

این مفهوم در کار با اسپلاین ها مفید می باشد، زیرا هر تابع $B_i^k|(t_j, t_{j+1})$ یک چندجمله ای (به طور دقیق تر تحدید یک چندجمله ای) است. وقتی گفته می شود که یک مجموعه از توابع $f_i$ بر روی مجموعه ی $k$ مستقل خطی اند، به این معناست که مجموعه توابع تحدید شده $f_i|k$ به مفهوم معمول مستقل خطی هستند.

**لم ۷.۳.۱.** مجموعه ی $B$–اسپلاین های $\{B_j^k, B_{j+1}^k, \ldots, B_{j+k}^k\}$ بر روی $(t_{k+j}, t_{k+j+1})$ مستقل خطی است.

**برهان.** ابتدا حالت $k = 0$ را در نظر می گیریم. واضح است که $\{B_j^0\}$ بر روی بازه $(t_j, t_{j+1})$ مستقل خطی است، به منظور یک اثبات استقرائی، فرض کنید $k \geq 1$ ، و فرض کنید که لم برای اندیس $(k-1)$ درست باشد. براساس این فرض لم را برای اندیس $k$ اثبات خواهیم کرد. فرض کنید $S = \sum_{i=0}^{k} c_{i+j}B_{j+i}^k$ و فرض کنید که $S|(t_{k+j}, t_{k+j+1}) = 0$. بنابر معادله (۳.۱) داریم:

$$S'|(t_{k+j}, t_{k+j+1}) = k\sum_{i=1}^{k} \frac{c_{j+i}-c_{j+i-1}}{t_{j+i+k}-t_{j+i}} B_{j+i}^{k-1}|(t_{k+j}, t_{k+j+1}) = 0.$$

برای رسیدن به این معادله از $B_{j+k+1}^{k-1} = 0$ و $B_j^{k-1} = 0$ بر روی $(t_{k+j}, t_{k+j+1})$ استفاده کرده ایم. با به کارگیری فرض استقرا بر روی $\{B_{j+1}^{k-1}, B_{j+2}^{k-1}, \ldots, B_{j+k}^{k-1}\}$ نتیجه می گیریم که این مجموعه بر روی بازه $(t_{k+j}, t_{k+j+1})$ مستقل خطی است. بنابراین در معادله(۳.۱) همه ضرایب باید صفر باشند و لذا داریم $c_0 = c_1 = \ldots = c_k$. اگر این مقدار مشترک با $\lambda$ نشان داده شود، بنابر لم ۴.۲.۱ بر روی $(t_{k+j}, t_{k+j+1})$ داریم $S(x) = \lambda$. (ملاحظه می کنید که