دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده علوم پایه

مساله پیدا کردن هسته روی درخت

رساله ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجه

کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر مهدی زعفرانیه

استاد مشاور:

دکتر جعفر فتحعلی

پژوهش و نگارش :

سمیه حبیب‌نیا زنده‌جان

فروردین ۱۳۸۸

به نام خدا

با یاد خدا

و برای خدا

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که نور وجودشان همواره روشنی و گرمای زندگی‌ام بوده است.

قدردانی

از خداوند متعال سپاسگزارم که مرا یاری کرد تا به بهانه گردآوری این مجموعه از تمامی همراهان بزرگوار و ارجمندی که مرا از ابتدای راه و نیز در انجام این پایان‌نامه همراهی و راهنمایی نموده‌اند تقدیر و تشکری کرده باشم. نخست از پدر و مادرم که مشوق همیشگی من هستند و شرایط و محیط را برایم فراهم کردند تا بتوانم این مسیر را با آرامش طی کنم و نیز دعای خیرشان همواره همراهم بوده، سپاسگزارم و برایشان آرزوی سلامتی و کامیابی دارم. سپس از همکاری صمیمانه و مساعدت تاثیرگذار جناب آقای دکتر مهدی زعفرانیه که به عنوان استاد راهنما مرا در تهیه این پایان نامه یاری نمودند تشکر و قدردانی می نمایم و برای ایشان آرزوی توفیق و سربلندی دارم. همچنین از راهنماییهای جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی استاد مشاورم کمال تشکر را دارم. مسلماً در طول انجام این پروژه اگر پیشرفتی در کار شکل می‌گرفت، به واسطه‌ی دلگرمی‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ استادان بزرگوارم بود و در ادامه راه نیز هیچ‌گاه از همراهی و همگامی استادان ارجمند بی‌نیاز نخواهم بود. در پایان وظیفه خود می‌دانم از همه عزیزانی که حمایتها، کمکها و راهنمائیشان در تمام مراحل زندگی شامل حال من بوده است، کمال تشکر و قدردانی را بجا آورم.

سمیه حبیب‌نیا زنده‌جان

فروردین ۱۳۸۸

چکیده

از آنجا که مسائل مکان‌یابی یک مبحث مهم در علم مدیریت و تخصیص منابع است مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است بیشترین توجه ما در این پایان‌نامه مساله هسته درخت است که در واقع مسیری است که مجموع فاصله وزنی همه رئوس درخت از آن کمترین مقدار ممکن شود. به عبارت دیگر در اینجا هدف اصلی بهینه کردن تابع هزینه است و مهم‌ترین کاربرد آن برای تعیین مکان سرویس‌دهنده‌های عمومی مانند قطار شهری، اتوبوس شهری، بزرگراه‌ها، آبراه‌ها، فاضلابها و مانند این است تا با پیدا کردن بهترین مکان برای آنها خدمات رسانی به شهروندان تا حد امکان تسهیل شود. در این مساله جمعیت مشتریها روی راسهای شبکه توزیع شده‌اند و هر راس دارای وزنی است که تعداد مشتریها را نشان می‌دهد.

در فصل اول تاریخچه‌ای از مکان‌یابی آورده شده است، در ادامه مساله p—میانه معرفی می‌شود که در آن هدف پیدا کردن چند نقطه مجزا برای قرار دادن چند سرویس‌دهنده جدا از هم مانند ایستگاههای مختلف آتش‌نشانی، خدمات اورژانس، ایستگاه‌ها و ترمینالهای اتوبوس و غیره است بطوریکه با پیدا کردن بهترین مکان سرویس دهی به مشتریها تا حد امکان بهتر شود.

در فصل دوم به بررسی مساله یک—هسته و سپس یک—هسته با طول مشخص می‌پردازیم و الگوریتم‌هایی با پیچیدگی زمانی متفاوت برای حالت‌های مختلف ارائه می‌دهیم.

در فصل سوم ابتدا مساله دو—هسته را بررسی می‌کنیم و دو الگوریتم با پیچیدگی زمانی متفاوت برای دو—هسته مجزا و یک الگوریتم برای دو—هسته متقاطع ارائه می‌نمائیم. در ادامه مساله سه—هسته مجزا را پیشنهاد می‌دهیم و رابطه بین مساله دو—هسته و مساله سه—هسته را بررسی می‌کنیم و یک الگوریتم کارا برای پیدا کردن سه—هسته ارائه می‌دهیم.

در انتها در فصل چهارم پس از بیان یک مقدمه فازی، مساله هسته فازی را معرفی و بررسی می‌کنیم که در آن وزن رئوس، طول یالها و یا طول هسته اعداد فازی هستند.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ تاریخچه

مکان‌یابی یک مبحث مهم در علم مدیریت و تخصیص منابع است. اولین مطالعات در مکان‌یابی در قرن هفدهم بوسیله فرما[۱] انجام شد. در دست‌نوشته‌های مشهور او این‌طور آمده، فرض کنید سه نقطه در یک صفحه داده شده است چطور می‌توان مکان نقطه چهارمی را پیدا کرد که مجموع فاصله آن از این سه نقطه کمترین مقدار ممکن باشد. این مساله در سال ۱۶۴۰ در ایتالیا توسط توریچلی[۲] حل شد وی ثابت کرد که نقطه بهینه محل برخورد دوایری است که مثلثهای متساوی الاضلاعی را که بر روی هر ضلع و در بیرون مثلث فعلی قرار دارند در برگرفته‌اند. بدین دلیل این نقطه را نقطه توریچلی می‌نامند.

در سال ۱۶۴۷ کاوالیری[۳] نشان داد که زاویه بین نقطه توریچلی و سه نقطه مورد نظر ۱۲۰ درجه است. سیمپسون[۴] در سال ۱۷۵۰ ثابت کرد که اگر یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر

[۱] Fermat
[۲] Torricelli
[۳] Cavalieri
[۴] Simpson

سه نقطه داده شده گذرانده شود و رئوس این مثلث به یکی از این سه نقطه که بر روی ضلع مقابل قرار گرفته وصل شود محل تقاطع این سه خط نقطه توریچلی را بدست می‌دهد از این رو این سه خط را خطوط سیمپسون می‌نامند (مرجع [۲۹] را ببینید).

حالت مستثنائی که سه نقطه داده شده مثلثی را تشکیل دهند که در یک راس زاویه بیشتر یا مساوی ۱۲۰ درجه داشته باشد تا سال ۱۸۳۴ لاینحل باقی ماند تا اینکه هینن[۵] ثابت کرد همان راسی که در آن زاویه بیشتر یا مساوی ۱۲۰ درجه است جواب بهینه مساله است. او همچنین ثابت کرد طول خطوط سیمپسون با هم مساوی هستند و طول آنها با فاصله نقطه بهینه از سه نقطه داده شده نیز برابر است. فسبندر[۶]مفهوم دوگانی را برای مساله فرما مطرح کرد که بعدها در سال ۱۹۶۷ توسط کوهن [۷] بطور مبسوطی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج جالبی از تحقیقات وی منتشر گردید. اولین تعمیمی که از مساله وبر به ذهن متبادر می‌گردد این است که هر یک از این سه نقطه دارای وزن مشخص باشند و تعداد آنها نیز بیشتر از سه نقطه باشد. کورانت[۸] و رابینز[۹] [۹] در کتابشان تحت عنوان ریاضیات چیست؟ مساله وبر را با عنوان مساله استاینر نیز مطرح کرده‌اند.

سیلوستر در سال ۱۸۵۷ مساله دیگری را مطرح کرد که در آن هدف پیدا کردن نقطه‌ای است که بیشترین فاصله‌اش از سه نقطه داده شده کمترین مقدار ممکن باشد. او پیشنهاد کرد مرکز دایره‌ای که بر این سه نقطه گذشته است را می‌توان بعنوان جواب بهینه در نظر گرفت. در سال ۱۸۶۰ او یک توجیه هندسی برای جواب خود ارائه داد.

بعد از دهه ۱۹۳۰ با اختراع رایانه و پیشرفتهایی که در علوم محاسباتی صورت گرفت

[۵] Heinen
[۶] Fesbender
[۷] Kuhn
[۸] Curant
[۹] Robbins

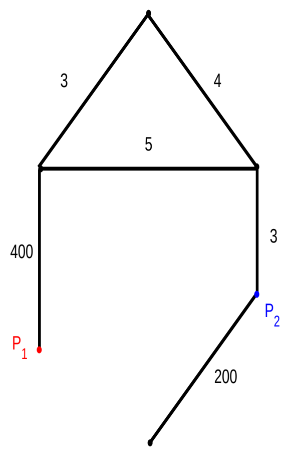
روشهای تکراری برای حل مسائل مکان‌یابی مورد توجه قرار گرفتند. وایزفلد [۱۰] یک روش تکراری برای حل مساله وبر ارائه داد که هنوز هم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مطالعات در علم مکان‌یابی مدرن رسماً در سال ۱۹۰۹ توسط آلفرد وبر[۱۱] آغاز شد. وی مساله پیدا کردن مکان یک سرویس‌دهنده را که مجموع فاصله آن تا چند مشتری کمترین مقدار ممکن است را معرفی کرده و مورد بررسی قرار داد. بعد از این مطالعه ابتدایی تعداد زیادی از محققین سعی در بسط و توسعه مفهوم عرضه شده توسط وبر کردند. بعنوان مثال هاتلینگ[۱۲] [۲۶] مساله فروشنده بستنی در ساحل را مطرح کرد که هدف در آن جذب بیشترین تعداد مشتری در یک بازارِ ساحلی مشترک بین دو یا چند فروشنده است.

مکان‌یابی در سال ۱۹۶۴ تولد مجددی را توسط حکیمی[۱۳] [۱۷] تجربه کرد. حکیمی مساله مکان‌یابی بر روی شبکه را برای پیدا کردن مکان گشتهای پلیس در بزرگراهها ومناطق شهری مورد استفاده قرار داد. برای نیل به این هدف وی مساله مکان‌یابی را در یک شکل کلی‌تر مطرح کرد او فرض کرد که تعداد سرویس‌دهنده‌ها (گشتهای پلیس) بیشتر از یکی باشد بنابراین مشتریها از بین سرویس‌دهنده‌ها کسی را انتخاب می‌کنند که کمترین فاصله را با او داشته باشند (شکل ۱—۱ را ببینید). بدین ترتیب از اواسط دهه ۶۰ مکان‌یابی باپیشرفت شگرفی مواجه شد.

لازم به ذکر است که برخی از محققین یک سری طبقه‌بندیهایی از مدلهای مسائل مکان‌یابی ارائه دادند. اولین طبقه‌بندی مدلهای مختلف مکانیابی توسط هندلر[۱۴] و

[۱۰] Weiszfeld
[۱۱] Alfred Weber
[۱۲] Hotelling
[۱۳] Hakimi
[۱۴] Handler



شکل ۱—۱: مساله ۲—میانه (P_1 و P_2 سرویس‌دهنده).

میرچندانی [15] [۲۲] ارائه شد. پس از آن طبقه‌بندی‌های دیگری از جمله توسط ایسلت [16] و لاپورت [17] [۱۲] و هاماخر [18] و نیکل [19] [۲۰] انجام شد.

همچنین بررسیهایی دیگری در این زمینه توسط کراروپ [20] و پروزن [21] [۲۷]، هانسن [22] و همکاران [۲۳]، میرچندانی و فرانسیس [23] [۳۴]، فرانسیس و همکاران [۱۳]، اُون [24] و دسکین [25] [۳۷]، اسکاپارا [26] و اسکاتلا [27] [۴۰] و درزنر [28] و هاماخر [۱۱] انجام شده است. هال [29] [۱۹] لیستی شامل بیش از ۳۴۰۰ مقاله در مورد مسائل مکانیابی را در یک سایت

[15] Mirchandani
[16] Eiselt
[17] Laporte
[18] Hamacher
[19] Nickel
[20] Krarup
[21] Pruzan
[22] Hansen
[23] Francis
[24] Owen
[25] Daskin
[26] Scaparra
[27] Scutella
[28] Drezner
[29] Hale

اینترنتی جمع آوری کرده است.

برای پرداختن به مساله مکانیابی تعاریف اولیه زیر از کتاب نظریه گراف هرری [۳۰] لازم به نظر می‌رسد [۲۴].

۱—۲ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱ هر **گراف** [۳۱] شامل یک جفت مجموعه مجزا (V, E) می باشد که V مجموعه‌ای از نقاط موسوم به رئوس G و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه های دو عضوی V موسوم به یالهای G است.

تعریف ۲.۱ به گرافی که در آن یالها به جای زیرمجموعه‌های دو عضوی زوجهای مرتب باشند گراف جهت‌دار گویند.

تعریف ۳.۱ تعداد یالهای خارج شده از یک راس را **درجه** [۳۲] خروجی آن و تعداد یالهای وارد شده به آن را درجه ورودی آن راس گویند.

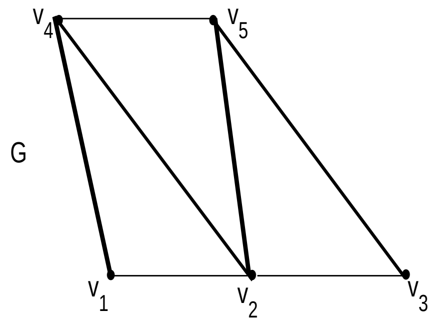
تعریف ۴.۱ هر گاه بین راس v و u یالی وجود داشته باشد این دو راس را **همسایه** [۳۳] گویند.

تعریف ۵.۱ دنباله‌ای دلخواه از رئوس مانند $v_0, v_1, ..., v_n$ که به یکدیگر متصل هستند و می‌تواند راس تکراری نیز داشته باشد را **گشت** [۳۴] گویند.

تعریف ۶.۱ به گشتی که هیچ راس تکراری نداشته باشد **مسیر** [۳۵] گویند.

---

[۳۰] Harary
[۳۱] graph
[۳۲] degree
[۳۳] adjacent
[۳۴] walk
[۳۵] path



شکل ۱—۲: گراف دلخواه

تعریف ۷.۱ مسیری که با اضافه شدن یک راس به آن دیگر مسیر نباشد را **مسیر ماکسیمال**[۳٦] گویند.

تعریف ۸.۱ مسیری که ابتدا و انتهای آن برهم منطبق باشد را **دور**[۳۷] گویند.

تعریف ۹.۱ گراف همبندی که فاقد دور است را **درخت**[۳۸] گویند.

تعریف ۱۰.۱ درخت جهت‌داری که درجه ورودی یک راس به نام **ریشه**[۳۹] صفر و درجه بقیه رئوس غیر صفر باشد را درخت ریشه‌دار گویند. همچنین رده یک راس را تعداد یالهای موجود در کوتاهترین مسیر از ریشه به آن راس گویند و برای دو راس مجاور u و v اگر رده u کمتر از v باشد u را **پدر**[۴۰] v و v را **فرزند**،[۴۱] u گویند.

قرارداد: از این پس در یک درخت ریشه‌دار یالها را بدون جهت رسم می‌کنیم.

[۳٦] maximal path
[۳۷] cycle
[۳۸] tree
[۳۹] root
[۴۰] parent
[۴۱] child

تعریف ۱۱.۱ یک **شاخه**[۴۲] از راس v زیر درختی با بیشترین تعداد راس است که این راس را به عنوان یک برگ شامل شود.

تعریف ۱۲.۱ **فاصله دو راس** u, v را با $d(u, v)$ نمایش می‌دهیم و برابر با طول کوتاهترین مسیری است که بین این دو راس وجود دارد.

تعریف ۱۳.۱ **فاصله هر راس** v **از مسیر** P برابر با طول کوتاهترین مسیری است که بین راس v و مسیر P وجود دارد و آن را با $d(v, P)$ نمایش می‌دهیم:

$$d(v, P) = \min_{u \in V(P)} d(v, u)$$

که $V(P)$ رئوس متعلق به مسیر P هستند.

تعریف ۱۴.۱ **فاصله از مسیر** P را برابر مجموع فاصله وزنی رئوس گراف از آن مسیر تعریف می‌کنیم و به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\bar{F}(P) = \sum_{u_i \in V(G)} w_i d(u_i, P)$$

که در آن $w_i \geq 0$ وزن رئوس است و بیانگر میزان جمعیت یا حساسیت یک راس می‌باشد.

تعریف ۱۵.۱ اگر مسیر P' بخشی از مسیر P و نه تمام آن را شامل شود و رئوس متعلق به آن همه در مسیر P موجود باشند مسیر P' را زیر مسیر محض P گویند. واضح است که $\bar{F}(P) < \bar{F}(P')$ می‌باشد.

مثال ۱.۱ در گراف داده شده در شکل ۱—۲ اگر از راس v_1 به v_2 و از آن به v_5 سپس به v_3 و از آن به v_2 برویم یک گشت داریم که مسیر نیست و اگر از v_1 به v_2 و از آن به v_5 سپس به v_3 برویم یک مسیر داریم و اگر از v_2 به v_5 و از آن به v_3 و سپس به v_2 برویم یک دور داریم، فاصله دو راس v_3, v_4 برابر با ۲ می‌باشد، فاصله راس v_1 از مسیر v_4, v_5, v_3 برابر با ۱ می‌باشد و فاصله از مسیر v_4, v_5, v_3 برابر با ۲ می‌باشد.

[۴۲] branch