
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم
(مرکز تحصیلات تکمیلی)

رساله

برای دریافت درجه دکتری تخصصی (.Ph.D) در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

هندسه رده خاصی از متریک های شبه ریمانی

نویسنده

امیرحسام زعیم

استاد راهنما

محمد چایچی رقیمی

استاد مشاور اول

مهدی نجفی خواه

استاد مشاور دوم

جُوانی کالواروسو

دی ماه ۱۳۹۱

(فرم شماره ۱۰: صورتجلسه دفاع از رساله)

تاریخ: ۹۱/۱۰/۴

شماره: ۹۱/ت/۴۸۷

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از رساله دکتری تخصصی (Ph.D.)

جلسه دفاع از رساله دوره دکتری تخصصی **آقای امیرحسام زعیم** دانشجوی رشته **ریاضی محض-گرایش هندسه** به شماره دانشجویی ۸۷۰۰۶۶۱۴۴ تحت عنوان «**هندسه رده خاصی از متریک های شبه ریمانی**»با حضور هیات داوران در روز **دوشنبه مورخ ۱۳۹۱/۱۰/۴** ساعت ۹/۳۰ صبح در محل ساختمان مرکز تحصیلات تکمیلی برگزار شد و هیات داوران پس از بررسی، رساله مذکور را شایسته نمره به عدد ...۱۹... به حروف نوزده .... با درجه عالی .... تشخیص داد.

ردیف	نام ونام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/موسسه	امضاء
۱	آقای دکتر محمد چایچی	استاد راهنما	دانشیار	پیام نور	
۲	آقای دکتر مهدی نجفی خواه	استاد مشاور اول	دانشیار	علم و صنعت	
۳	آقای دکتر کاشانی	استاد داور	استادیار	تربیت مدرس	
٤	آقای دکتر ممقانی	استاد داور	استاد	علامه [illegible]	
۵	آقای دکتر یوسف علیپور فخری	استاد داور	استادیار	پیام نور	
٦	آقای دکتر محمدحسن بیژن زاده	نماینده مرکز تحصیلات تکمیلی	استاد	«	
۷	جیووانی کالوا روسو	استاد مشاور	استاد	Lecce	

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب امیرحسام زعیم دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۷مقطع دکتری تخصصی رشته ریاضی محض گرایش هندسه دیفرانسیل گواهی می نمایم چنانچه در رساله خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

نام و نام خانوادگی: امیرحسام زعیم
تاریخ و امضا:

اینجانب امیرحسام زعیم دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۷مقطع دکتری تخصصی رشته ریاضی محض گرایش هندسه دیفرانسیل گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب رساله خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی: امیرحسام زعیم
تاریخ و امضا:

۱۴ دی ۱۳۹۱

به پاس یک دنیا حمایت و دلگرمی
تقدیم به همسر مهربانم
و
به پاس یک عمر عشق و فداکاری
تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل و تفکر آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر چایچی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که همواره مشوق من بودند و بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به سرانجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر نجفی خواه که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

ارج مینهم به زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر کالواروسو[۲] که در زمان حضور اینجانب در دانشگاه سالنتو[۳] رهنمودهای ارزشمند ایشان درهای جدیدی از علم به روی من گشود.

در پایان بایستی قدردانی نمایم از همسر عزیزم که همواره حامی و مشوقم بود و زحمات بسیاری را در دوران تحصیل من متحمل شد. سپاسگزارم از خانواده مهربانم که بی دریغ من را مورد لطف و محبت خود قرار دادند، پدر و مادر و برادران عزیزم.

امیرحسام زعیم
دی ماه ۱۳۹۱

[۲] Dr. Giovanni Calvaruso
[۳] Salento

نام خانوادگی دانشجو: زعیم   نام: امیرحسام

عنوان: هندسه رده خاصی از متریک های شبه ریمانی

استاد راهنما: محمد چایچی رقیمی

استاد مشاور اول: مهدی نجفی خواه

استاد مشاور دوم: جُوانی کالواروسو

مقطع تحصیلی: دکتری تخصصی (Ph.D.)   رشته: ریاضی محض   گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه پیام نور   دانشکده علوم

(مرکز تحصیلات تکمیلی)

تاریخ فارغ‌التحصیلی: دی ماه ۱۳۹۱   تعداد صفحات: ۸۹

واژگان کلیدی: هندسه شبه ریمانی، متریکهای واکر، فضاهای متقارن گسترش یافته، فضاهای همگن نا کاهشی

چکیده

متریک های شبه ریمانی کاربردهای بسیاری در نسبیت و کیهان شناسی دارد. رده خاصی از این متریک ها که به متریک های واکر معروفند، از اهمیت ویژه ای برخوردار بوده و بسیاری از تفاوت های هندسه های ریمانی و شبه ریمانی در بین اینگونه متریک ها مشهود است. در این رساله ابتدا به بررسی فضاهایی با عنوان فضاهای متقارن گسترش یافته سره از بعد ۴ پرداخته و ویژگی واکر بودن را برای آنها به طور کامل مشخص می نماییم. همچنین ویژگی خود دوگان بودن نیز مورد توجه قرار گرفته و نتیجه های جالبی به دست آمده است. سپس ویژگی واکر بودن، ویژگی خود دوگانی و پاد خود دوگانی متریک فضاهایی با عنوان فضاهای همگن نا کاهشی از بعد ۴ را مطالعه می نماییم. چند نتیجه درباره ساختارهای پارا هرمیتی روی این فضاها ارائه می شود.

فهرست مطالب

پیش گفتار

به طور معمول بر پدیده هایی که پیرامون ما روی می دهد، قوانین فیزیک کلاسیک حاکم بوده و توسط متریک های ریمانی[۴] مدل هندسی می شود. در این نظریه سرعت هر پدیده در مقایسه با سرعت نور ناچیز در نظر گرفته می شود. ضرب داخلی بردارها همواره مقداری مثبت بوده و چنانچه حاصل ضرب داخلی یک بردار در خود برابر صفر باشد، صفر بودن آن بردار نتیجه می شود. به بیان ریاضی متریک این نوع هندسه علاوه بر متقارن[۵] و ناتبهگون[۶] بودن (که ویژگی های عمومی متریکهاست) مثبت معین[۷] نیز هست.

نظریه نسبیت خاص[۸] در سال ۱۹۰۵ توسط آلبرت اینشتین[۹] ارائه شد. سپس در سال ۱۹۰۷ هرمان مینکوفسکی[۱۰] نشان داد نظریه ای را که دانشجوی سابق او، آلبرت اینشتین، به صورت جبری ارائه کرده بود می توان به صورت هندسه فضا-زمان[۱۱] چهار بعدی مطالعه کرد. اینشتین در ابتدا به روشی که مینکوفسکی ارائه کرده بود به عنوان ترفندی ریاضی نگاه می کرد. قبل از اینکه به این نتیجه برسد که دیدگاه هندسه فضا-زمان برای تکمیل کار خود در نظریه نسبیت عام[۱۲] ضروری است.

به دلایل فیزیکی ساختارهای فضا-زمان به عنوان خمینه های چهار بعدی لورنتسی[۱۳] (M, g) ، هموار[۱۴] و همبند[۱۵] تعریف می شود. یعنی متریک g دارای علامت (۱ ,۳) است. مطالعه این رده از متریک ها در رسته متریک های شبه ریمانی[۱۶] قرار می گیرد. یعنی برخلاف متریک های ریمانی شرط مثبت معین بودن اجباری نیست. به بیان دیگر متریک های شبه ریمانی نامعین[۱۷] هستند.

---

[۴] Bernhard Riemann (1826-1866)
[۵] Symmetric
[۶] Non-degenerate
[۷] Positive definite
[۸] Special relativity
[۹] Albert Einstein (1879-1955)
[۱۰] Herman Minkowski (1864-1909)
[۱۱] Space-time
[۱۲] General relativity (1915)
[۱۳] Hendrikus Albertus Lorentz (1853-1928)
[۱۴] Smooth
[۱۵] Connected
[۱۶] Semi-Riemannian
[۱۷] Indefinite

مطالعه متریک های شبه ریمانی شباهت های زیادی به متریک های ریمانی دارد. بنابراین بعضی از خواص را می توان از روی خمینه های ریمانی به خمینه های شبه ریمانی گسترش داد، مانند وجود ژئودزیک ها[۱۸] و فضا فرم ها با خمیدگی برشی ثابت[۱۹] [۴۲]. با این وجود تفاوت های بسیاری نیز در مطالعه متریک های نامعین مشاهده می شود. به عنوان مثال هر عملگر خود الحاق[۲۰] مانند عملگر ریچی[۲۱] در هندسه ریمانی قطری شدنی است در حالی که برای متریک های شبه ریمانی لزوما این ویژگی برقرار نیست. برخی از ویژگیها را می توان برای متریک های شبه ریمانی بررسی کرد بدون اینکه امکان بررسی نظیر آنها برای متریک های ریمانی وجود داشته باشد، مانند توسیع مطالعه خمیدگی برشی به صفحه های تبهگون[۲۲] [۳۸] ، وجود توزیع های تبهگون[۲۳] [۵۴، ۵۵] یا وجود اپراتورهای نا قطری شدنی [۲۵، ۲۶]. در واقع وجود عملگرهای ژاکوبی[۲۴] نا قطری شدنی سبب وجود خمینه های شبه ریمانی آسِرمن[۲۵] نامتقارن می شود [۲۷] یا وجود ابر رویه های کامل مختلط اینشتینی[۲۶] نا متقارن روی فضاهای نامعین تخت[۲۷] نیز به همین روش قابل توجیه است [۴۶].

یک ویژگی اساسی در ارتباط با متریک های شبه ریمانی عدم تناظر یک به یک متریک با هموستار لوی چیویتا[۲۸] است. می دانیم متناظر با هر متریک (ریمانی یا شبه ریمانی) یک هموستار لوی چیویتای یکتا وجود دارد. چنانچه خمینه دارای تجزیه موضعی درام [۲۹] نباشد عکس این موضوع برای متریک های ریمانی تا حد ضرب مقداری ثابت برقرار است. ولی برای متریک های شبه ریمانی این تناظر برقرار نیست، یعنی به دلیل وجود میدان های برداری تبهگون موازی[۳۰] متریک هایی وجود دارد که همان هموستار لوی چیویتا را تعریف می کنند ولی به شکل مضرب ثابتی از متریک اولیه نیستند[۳۹]. در اینجا باید اشاره کرد که به دلیل نامعین بودن متریک های شبه ریمانی، بر خلاف متریک های ریمانی، وجود توزیع های تبهگون موازی کاهش پذیری موضعی[۳۱] را نتیجه نمی دهند.

یک خمینه شبه ریمانی را که دارای یک توزیع تبهگون موازی باشد خمینه واکر[۳۲] نامند. این نوع متریک ها نخستین بار توسط آرتور جفری واکر در سال ۱۹۵۰ مورد مطالعه قرار گرفتند. هر متریک واکر را می توان به فرمی استاندارد با استفاده از یک مختصات موضعی مناسب نوشت. این

[۱۸] Geodesic
[۱۹] Space forms with constant sectional curvature
[۲۰] Self adjoint operator
[۲۱] Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925)
[۲۲] Degenerate plane
[۲۳] Degenerate distribution
[۲۴] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)
[۲۵] Robert Osserman (1926-2011)
[۲۶] Complete complex Einstein hyper surface
[۲۷] Indefinite flat space
[۲۸] Levi-Civita connection
[۲۹] Local de Rham decomposition
[۳۰] Parallel degenerate vector field
[۳۱] Local reducibility
[۳۲] Arthur Geoffrey Walker (1909-2001)

فرم استاندارد که به فرم کانونی[۳۳] معروف است در مرجع های [۵۴، ۵۵، ۵۶] معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. پرسشی طبیعی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که آیا یک متریک شبه ریمانی (M,g) واکر است یا نه.

در این رساله این مساله را برای **فضاهای متقارن گسترش یافته سره**[۳۴] چهار بعدی به طور کامل بررسی می نماییم. فضاهای متقارن گسترش یافته بسیار مطالعه شده است. در مرجع [۳۷] نویسنده فضاهای متقارن گسترش یافته را به روشی مقدماتی، یعنی بدون بررسی ناورداهای توپولوژیکی[۳۵] یا جبر پیشرفته مطالعه کرده است. ساختارهای همگن[۳۶]روی فضاهای متقارن گسترش یافته ریمانی در [۳۰] بررسی شده است. در [۵۰، ۵۱] تِرزیک آن دسته از فضاهای متقارن گسترش یافته را که به صورت خارج قسمتی از گروه های لی ساده فشرده هستند، رده بندی نمود و به توصیف جبرهای کوهمولوژی حقیقی[۳۷] و محاسبه کلاس های مشخصه پونتریاگین حقیقی[۳۸] پرداخت. در مرجع [۳۶] ثابت شده است همه فضاهای متقارن گسترش یافته فرمال[۳۹] هستند، یعنی نوع هموتوپ گویای[۴۰] آنها تنها توسط جبر کوهمولوژی گویا تعیین می شود.

از زمانی که فضاهای متقارن گسترش یافته به طور کامل رده بندی شدند [۱۵]، خواص هندسی بسیاری درباره آنها مطالعه شده است: ژئودزیک های همگن[۴۱][۲۱]، خواص خمیدگی[۴۲][۱۱]، ابر رویه های موازی [۲۲]، خواص همساز[۴۳] میدان های برداری [۷]، سولیتون های ریچی جبری[۴۴][۵]. گفتنی است برخی از خواص همساز میدان های برداری روی این فضاها تحت تاثیر وجود میدان های برداری موازی پوچ[۴۵] قرار می گیرد ([۷] را ببینید). ما به بررسی فضاهای متقارن گسترش یافته چهار بعدی پرداخته و متریک های واکر را به طور کامل رده بندی می نماییم.

بر اساس رده بندی ارائه شده در مرجع [۱۵]، همه متریک های متقارن گسترش یافته چهار بعدی سره در چهار کلاس A، B، C و D قرار می گیرد. به جز کلاس C که لورنتسی است در بقیه کلاسها متریک دارای علامت $(۴,۰)$، $(۲,۲)$ یا $(۰,۴)$ است.

نتیجه های به دست آمده از مطالعه ساختارهای واکر در این رساله نشان می دهد که همه متریک های متقارن گسترش یافته از نوع A با علامت خنثی، نوع B یا نوع D دارای دو توزیع تبهگون مکمل

[۳۳] Canonical form
[۳۴] Generalized symmetric space
[۳۵] Topological invariants
[۳۶] Homogeneous structure
[۳۷] Real cohomology algebras
[۳۸] real Pontryagin characteristic
[۳۹] Formal
[۴۰] Rational homotopy type
[۴۱] Homogeneous geodesics
[۴۲] Curvature properties
[۴۳] Harmonic
[۴۴] Algebraic Ricci soliton
[۴۵] Null

کاملا پوچ[۴۶] هستند. همچنین نوع C از این متریکها دارای یک توزیع تبهگون بخشی پوچ[۴۷] از نوع $(۱,۲)$ است. بنابراین بجز حالت ریمانی نوع A که آشکارا واکر نیست، ***همه متریک های شبه ریمانی متقارن گسترش یافته سره واکر هستند.***

همچنین به مطالعه ویژگی خود دوگانی[۴۸] و پاد خود دوگانی[۴۹] روی متریک های نوع A، B و D پرداخته و ثابت می کنیم که ***همه خمینه های ناتخت همدیس متقارن گسترش یافته سره (پاد) خود دوگان، لزوما از نوع B هستند.***

پس از بررسی ویژگی های هندسی فضاهای متقارن گسترش یافته گروه دیگری از فضاهای شبه ریمانی را که به **فضاهای همگن ناکاهشی**[۵۰] موسومند، در بعد ۴ مورد مطالعه قرار می دهیم. این نوع فضاها به طور کامل در مرجع [۲۳] در قالب ۸ گروه $A_۱,\dots,A_۵,B_۱,\dots,B_۳$ رده بندی شده است و در [۹] توصیف خمیدگی این نوع متریک ها به منظور مطالعه سولیتون های ریچی[۵۱] ارائه می شود. نتیجه بررسی های انجام شده نشان می دهد که **همه متریک های همگن نا کاهشی از بعد ۴ بجز نوع $A_۳$ فضاهایی واکر** هستند. همچنین مطالعه ویژگی خود دوگانی و پاد خود دوگانی نشان می دهد **متریک های نا تخت همدیس و خود دوگان لزوما از نوع $A_۱$ و $B_۱$ بوده و متریک های پاد خود دوگان نیز تنها از نوع $B_۳$ است.**

ساختار رساله چنین است: در فصل اول پیش نیازها آورده شده است.

در فصل دوم به معرفی خمنیه های واکر و ویژگی های آنها می پردازیم. به ویژه به مطالعه های انجام شده روی خمینه های واکر ۳ و ۴-بعدی اشاره ای مختصر شده است.

فصل سوم را به بررسی فضاهای متقارن گسترش یافته سره ۴-بعدی اختصاص می دهیم. برای این منظور پس از بیان تعریف این فضاها، رده بندی موجود برای آنها از مرجع [۱۵] ذکر می شود. بخش های بعدی این فصل حاصل تحقیق انجام شده در این رساله است. لذا با استفاده از متریک های ناوردا[۵۲]، هموستار لوی چیویتا و خمیدگی این فضاها محاسبه شده و در ادامه ساختارهای واکر را روی فضاهای متقارن گسترش یافته سره بررسی می کنیم. مطالعه ویژگی های خود دوگانی و پاد خود دوگانی در بخش های بعدی بررسی شده و از نتیجه های آن برای تعیین ساختارهای پارا هرمیتی استفاده می نماییم.

در فصل چهارم فضاهای همگن نا کاهشی از بعد ۴ را مطالعه می کنیم. پس از بیان رده بندی موجود برای این نوع متریک ها به توصیف جبر لی، متریک های ناوردا، هموستار لوی چیویتا و

[۴۶] Totally null degenerate complementary distribution
[۴۷] Partially null degenerate distribution
[۴۸] Self-duality
[۴۹] Anti-self-duality
[۵۰] Non reductive homogeneous spaces
[۵۱] Ricci solitons
[۵۲] Invariant

تانسور خمیدگی این نوع فضاها می پردازیم. بخش های بعدی این فصل نتیجه مطالعه های این رساله است. لذا بررسی ساختارهای واکر در بخش بعد انجام شده و ویژگی های خود دوگانی و پاد خود دوگانی را در ادامه مطالعه می کنیم. در پایان این فصل ساختارهای پارا هرمیتی را روی فضاهای همگن نا کاهشی بررسی می نماییم.

در پایان پیوست-آ را به ذکر چندی از مساله های باز در زمینه متریک های شبه ریمانی برای تحقیقات آتی اختصاص می دهیم.

بر اساس تحقیق های انجام شده در این رساله مقاله های علمی زیر تدوین گردیده و جهت چاپ در مجلات معتبر بین المللی پذیرفته شده است:

1- G. Calvaruso, A. Zaeim, *geometric structures over four-dimensional generalized symmetric spaces*, Mediterr. J. Math., DOI 10.1007/s00009-012-0228-y.

2- G. Calvaruso, A. Zaeim, *geometric structures of non-reductive homogeneous 4-spaces*, Adv. Geom., accepted.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل پیش نیازها شامل متریک های شبه ریمانی، عملگرها، ساختارهای هرمیتی و کِیلر، فضاهای متقارن، فضاهای همگن و متریک های خود دوگان و پاد خود دوگان آورده شده است. مطلب های این فصل بر پایه مرجع های [۴۲، ۲۷، ۲۸، ۲۰، ۱، ۵۳، ۳۳، ۴۰، ۴۷، ۱۰، ۳۵، ۴، ۲۳، ۳۲، ۴۱، ۲، ۲۴] بیان شده است.

۱.۱ متریک های شبه ریمانی

فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی m بعدی باشد. چنانچه V را به ضرب عددی (اسکالر) ناتبهگون $\langle\cdot,\cdot\rangle$ مجهز کنیم به جفت $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک **فضای برداری ضرب اسکالر** گفته می شود. بردار $v\in V$ را **فضا گون** نامیم اگر $v=0$ یا $\langle v,v\rangle>0$، **زمان گون** نامیم اگر $\langle v,v\rangle<0$ و **نور گون یا پوچ** نامیم اگر $\langle v,v\rangle=0$. زیرفضای W از V را فضا گون (به ترتیب زمان گون یا پوچ) نامند هرگاه تحدید $\langle\cdot,\cdot\rangle$ به W مثبت معین (به ترتیب منفی معین یا صفر) باشد. **شبه کره**[۱] بردارهای یکه فضا گون و زمان گون چنین تعریف می شوند:

$$S^{\pm}=\{v\in V|\langle v,v\rangle=\pm1\}.$$

می توان پایه $\{e_i\}_{i=1}^m$ را برای V انتخاب کرد چنانکه

$$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}0 & i\neq j,\\ \pm1 & i=j.\end{cases}$$

این پایه را **پایه متعامد یکه**[۲] یا کنج[۳] می نامند. قرار می دهیم $\varepsilon_i=\langle e_i,e_i\rangle$. **تعداد** اندیس های i که برای آنها $\varepsilon_i=-1$ را **شاخص**[۴] فضای ضرب اسکالر نامیده و با p نمایش می دهیم. $q=\dim V-p$

[۱] Pseudo sphere
[۲] Orthonormal
[۳] Frame
[۴] Index

تعداد اندیس هایی را نشان می دهد که $\varepsilon_i = ۱$، در این صورت گوییم ضرب اسکالر از علامت[۵] (p,q) است. علامت ضرب اسکالر مستقل از پایه متعامد یکه انتخاب شده برای فضا است. چنانچه $p = ۱$ و $m \geq ۲$ ضرب اسکالر را **لورنتسی**[۶] می نامیم. در صورتیکه m عددی زوج باشد و $p = q = \frac{m}{۲}$، ضرب اسکالر را **خنثی**[۷] گوییم.

تعریف ۱.۱.۱. فضای ضرب اسکالر $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ را در نظر بگیرید. عملگر $T : V \to V$ را **خود الحاق**[۸] نامند هرگاه $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ برای هر $x, y \in V$. همچنین T را **پاد الحاق**[۹] گویند هرگاه $\langle Tx, y\rangle = -\langle x, Ty\rangle$ برای هر $x, y \in V$.

یک فرم دوخطی متقارن[۱۰] روی V عبارت است از یک تابع $\mathbb{R}$-خطی $b : V \times V \to \mathbb{R}$ که برای هر $v, w \in V$، $b(v,w) = b(w,v)$.

لم ۲.۱.۱. *یک فرم دو خطی متقارن ناتبهگون است اگر و فقط اگر فرم ماتریسی آن نسبت به یک پایه (و در نتیجه نسبت به هر پایه) وارون پذیر باشد.*

برهان : [۴۲] را ببینید.

تعریف ۳.۱.۱. یک **تانسور متریک** g روی خمینه هموار M عبارت است از یک میدان تانسوری متقارن ناتبهگون از نوع $(۰, ۲)$ چنان که در M دارای شاخص ثابت باشد.

چنانچه شاخص متریک برابر صفر باشد متریک را **ریمانی** و در صورتی که مخالف صفر باشد آن را **شبه ریمانی** می نامیم. با توجه به مقدار شاخص متریک های لورنتسی و خنثی تعریف می شوند.

تعریف ۴.۱.۱. اگر M یک خمینه شبه ریمانی هموار باشد یک **هموستار**[۱۱] روی M عبارت است از تابع $D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ چنان که

- $D_V W$ نسبت به V، $C^\infty(M)$ خطی باشد،
- $D_V W$ نسبت به W، $\mathbb{R}$-خطی باشد،
- $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$،

[۵] Signature
[۶] Lorentzian
[۷] Neutral
[۸] Self adjoint
[۹] Skew adjoint
[۱۰] Symmetric bilinear form
[۱۱] Connection

برای هر $V, W \in \chi(M)$ و $f \in C^\infty(M)$. $D_V W$ را **مشتق هموردای**[۱۲] W نسبت به V برای هموستار D می نامند.

قضیه ۵.۱.۱. *روی هر خمینه شبه ریمانی (M, g) یک هموستار ∇ یکتا وجود دارد چنان که*

- $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$.
- $Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$.

*برای هر $X, V, W \in \chi(M)$. ∇ را **هموستار لوی چیویتا**[۱۳] روی M می نامند و توسط همانی زیر که به **رابطه کزول**[۱۴] مشهور است مشخص می شود.*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, X) = \ & Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) \\ & -g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]). \end{aligned}$$

برهان : [۴۲]را ببینید.

۲.۱ تانسورها و عملگرها

تانسورها و عملگرهای بسیاری روی خمینه های شبه ریمانی تعریف شده است که هرکدام از آنها به گونه ای بازگو کننده خواص هندسی خمینه هستند. مهمترین این تانسورها که بسیاری از تانسورها و عملگرها به کمک آن ساخته می شوند تانسور خمیدگی ریمان است.

۱.۲.۱ تانسور خمیدگی ریمان

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید (M, g) یک خمینه شبه ریمانی باشد. میدان تانسوری از نوع $(1, 3)$، $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ که به صورت زیر تعریف می شود را **تانسور خمیدگی ریمان**[۱۵] می نامند.

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

رابطه های پایین برقرار است و تقارن های تانسور خمیدگی ریمان نامیده می شود.

- $R(X, Y) = -R(Y, X)$،
- $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$،

[۱۲] Covariant derivative
[۱۳] Levi-Civita connection
[۱۴] Koszul formula
[۱۵] Riemann curvature tensor

- $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$،
- $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.

رابطه چهارم به **اتحاد اول بیانکی**[۱۶] مشهور است. اتحاد دوم بیانکی نیز به صورت زیر بیان می شود:

$$(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0.$$

گاهی از تانسور از نوع $(0,4)$ روی (M,g) به عنوان تانسور خمیدگی ریمان یاد می شود که به صورت زیر ساخته می شود:

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T).$$

۲.۲.۱ تانسور و عملگر ریچی

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید (M,g) یک خمینه شبه ریمانی باشد. تانسور متقارن از نوع $(0,2)$ روی M که به شکل پایین تعریف می شود، **تانسور خمیدگی ریچی**[۱۷] نامیده می شود.

$$\varrho(X,Y) = \mathrm{Tr}\{Z \to R(Z,X)Y\}.$$

عملگر ریچی به عنوان یک تانسور از نوع $(1,1)$ با استفاده از رابطه $g(\rho(X),Y) = \varrho(X,Y)$ تعریف می شود. نام عملگر ریچی از آن روست که می توان به این تانسور به عنوان یک عملگر از $\chi(M)$ به $\chi(M)$ نگاه کرد. اثر[۱۸] عملگر ریچی را **خمیدگی اسکالر**[۱۹] نامند و با τ نمایش می دهیم.

از متقارن بودن تانسور ریچی به آسانی نتیجه می شود که عملگر ریچی در هر نقطه یک عملگر خود الحاق است.

تعریف ۱.۲.۳. خمینه شبه ریمانی (M,g) را **خمینه اینشتینی**[۲۰] نامند هرگاه $\varrho = cg$، برای یک مقدار ثابت $c \in \mathbb{R}$. یعنی تانسور ریچی مضرب ثابتی از متریک باشد.

۳.۲.۱ خمیدگی برشی

زیرفضای دو بعدی π از فضای مماس T_pM را یک صفحه مماس بر M در نقطه p می نامیم. با توجه به لم ۱.۱.۲ صفحه مماس π تولید شده توسط بردارهای $u,v \in T_pM$ ناتبهگون است اگر و فقط اگر

$$g_p(u,u)g_p(v,v) - g_p(u,v)^2 \neq 0.$$

[۱۶] First Bianchi identity
[۱۷] Ricci tensor
[۱۸] Trace
[۱۹] Scalar curvature
[۲۰] Einstein

لم ۴.۲.۱. *فرض کنید $\pi = \mathrm{span}\{u, v\}$ یک صفحه مماس ناتبهگون در نقطه $p \in M$ باشد. مقدار زیر*

$$K(\pi) = \frac{\mathcal{R}_p(u, v, v, u)}{g_p(u, u)g_p(v, v) - g_p(u, v)^2}$$

*مستقل از انتخاب پایه u, v برای π است و **خمیدگی برشی**[۲۱] صفحه π نامیده می شود.*

برهان : [۴۲]را ببینید.

گویند خمینه شبه ریمانی (M, g) دارای **خمیدگی ثابت** است هرگاه خمیدگی برشی آن روی M و برای همه صفحه های مماس مقداری ثابت باشد. همچنین آن را **تخت**[۲۲] نامند هرگاه $R = 0$.

گزاره ۵.۲.۱. *خمینه شبه ریمانی (M, g) دارای خمیدگی ثابت K است اگر و فقط اگر $\mathcal{R} = K\mathcal{R}^\circ$، که*

$$\mathcal{R}^\circ(X, Y, Z, T) = g(X, T)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, T).$$

برهان : [۴۲]را ببینید.

۴.۲.۱ عملگر ژاکوبی

تعریف ۶.۲.۱. برای بردار $u \in T_pM$ **عملگر ژاکوبی** [۲۳] $\mathcal{J}(u) : T_pM \to T_pM$ با استفاده از رابطه زیر تعریف می شود:

$$g_p(\mathcal{J}(u)v, w) = \mathcal{R}_p(v, u, u, w).$$

توجه داشته باشید که عملگر ژاکوبی یک عملگر خودالحاق است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید (M, g) یک خمینه شبه ریمانی باشد و $p \in M$.

- (M, g) در نقطه $p \in M$ **آسِرمن فضا گون**[۲۴] نامیده شود هرگاه چند جمله ای مشخصه $\mathcal{J}(u)$ مستقل از بردار $u \in S_p^+$ باشد. یا به عبارت دیگر مقدارهای ویژه عملگر ژاکوبی روی S_p^+ ثابت باشند.

- گویند (M, g) در نقطه $p \in M$ **آسِرمن زمان گون** [۲۵] است هرگاه چند جمله ای مشخصه $\mathcal{J}(u)$ مستقل از بردار $u \in S_p^-$ باشد. یا به عبارت دیگر مقدارهای ویژه عملگر ژاکوبی روی S_p^- ثابت باشند.

[۲۱] Sectional curvature
[۲۲] Flat
[۲۳] Jacobi operator
[۲۴] Space like Osserman
[۲۵] Time like Osserman