--→

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عدد احاطه‌ای همبند بیرونی در گراف

استاد راهنما
دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی

استاد مشاور
دکتر رعنا خوئیلر

پژوهشگر
آتنا نصیری

تیر ماه ۱۳۹۱
تبریز - ایران

این صفحه عمدا خالی است

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

بهترین حامیان زندگی ام ، پدر و مادرم

بهترین همراه زندگی ام ، همسرم

و تقدیم به

همه ی آنان که دوستشان دارم .

پروردگارا!

مرا مددکن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی غرور و تکبر و نه حلقه ای برای اسارت و نه دستمایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای انسانیت و متفاوت ساختن زندگی خود و دیگران

سپاس از کسانی که از من متنفرند زیرا آنها مرا قویتر می‌کنند،
سپاس از کسانی که مرا دوست دارند زیرا آنها قلب مرا بزرگتر می‌کنند،
سپاس از کسانی که ترکم می‌کنند زیرا آنها به من می‌آموزند که هیچ چیز تا ابد ماندنی نیست،
سپاس از تمام کسانی که با من میمانند زیرا آنها معنای واقعی دوست را به من می‌آموزند...
سپاس ازمادرم که از نبود من اشکهای فراق ریخته و با دوری من ساخته و سوخته است، سپاس از پدر که همواره با صبر و شکیبایی همراهم می‌ماند و سپاس از خانواده همسرم که با دلگرمی‌های بی‌پایانشان، همواره مشوق من بوده‌اند. سپاس از همسرم، که همواره یار و پشتیبان زندگی‌ام است و سپاس از خواهر و برادرم که همیشه مرا دوست داشته‌اند.
بر خود لازم می‌دانم که از استاد راهنمای دلسوزم جناب آقای دکتر سید محمود شیخ الاسلامی و استاد مشاور سرکارخانم دکتر رعنا خوئیلر برای کمک‌ها و راهنمایی هایشان که در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه به من عرضه داشته‌اند و هم‌چنین از جناب آقای دکتر جعفر امجدی که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را بر عهده گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی داشته باشم و برایشان همواره سرافرازی و سربلندی را از خداوند متعال خواستارم.

آتنانصیری

تیرماه ۱۳۹۱

چکیده

فرض کنید G یک گراف با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد. زیرمجموعه S از رأس‌های G، یک مجموعه احاطه‌گر برای G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس از $V-S$ با حداقل یک رأس از S مجاور باشد. می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر گراف G را عدد احاطه‌ای G نامیده و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهند. زیرمجموعه احاطه‌گر S از G، یک مجموعه احاطه‌گر همبند بیرونی برای G نامیده می‌شود هرگاه گراف $G-S$ همبند باشد. می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر همبند بیرونی G را عدد احاطه‌ای همبند بیرونی نامیده و با $\gamma_{oc}(G)$ نشان می‌دهند.

در این پایان‌نامه، ضمن بررسی مجموعه‌های احاطه‌گر همبند بیرونی، کران‌هایی برای عدد احاطه‌ای همبند بیرونی ارائه می‌کنیم. همچنین گراف‌هایی با عدد احاطه‌ای همبند بیرونی بزرگ را دسته‌بندی کرده و نامساوی از نوع نوردهاوس و گادوم (Nordhaus – Gaddum) را برای عدد احاطه‌ای همبند بیرونی ثابت می‌کنیم. بعلاوه، رابطه بین عدد احاطه‌ای همبند بیرونی با پارامترهای دیگر گراف را بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه احاطه‌گر همبند بیرونی، عدد احاطه‌ای همبند بیرونی، نامساوی از نوع نوردهاوس و گادوم

پیشگفتار

در پنجاه سال اخیر، همزمان با رشد علوم کامپیوتر، نظریه گراف نیز رشد چشمگیری داشته است. مفهوم مجموعه‌های احاطه‌گر و پارامترهای احاطه‌ای به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی از اهمیت خاصی برخوردار بوده و مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته است.

مفهوم عدد احاطه‌ای همبند بیرونی اولین بار در سال ۲۰۰۰ توسط کولی و جانکیرم [۱] ، تحت عنوان عدد احاطه‌ای غیر جداشدنی معرفی گردید. کولی و همکارش کران‌هایی را برای این پارامتر بدست آوردند.

پس از آن در سال ۲۰۰۷ سیمن[۲]، به طور مستقل عدد احاطه‌ای همبند بیرونی را معرفی و بررسی کرده است. در سال ۲۰۱۰ جیانگ و شان[۳]، گراف‌هایی با عدد احاطه‌ای همبند بیرونی بزرگ را دسته‌بندی کردند. در سال ۲۰۱۱ اخباری [۴] و همکارانش، اثبات کردند که اگر $\delta(G) \geq ۲$ و $\mathrm{diam}(G) \leq ۲$، آنگاه $\gamma_{oc}(G) \leq \frac{n+۱}{۲}$. آن‌ها همچنین تأثیر افزودن یال را بر عدد احاطه‌ای همبند بیرونی بررسی کردند.

در فصل اول این پایان‌نامه به ارائه تعاریف و بیان قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در فصل دوم کران‌هایی را برای عدد احاطه‌ای همبند بیرونی ارائه کرده و مقدار دقیق این عدد را برای برخی از گراف‌های خاص پیدا می‌کنیم و گراف‌هایی با عدد احاطه‌ای همبند بیرونی بزرگ را دسته‌بندی می‌کنیم. در فصل سوم عدد احاطه‌ای همبند بیرونی

[۱] Janakiram, Kulli,
[۲] Cyman,
[۳] Shan, Jiang,
[۴] Akhbari

درخت‌ها را بررسی کرده و در فصل چهارم نامساوی نوع نوردهاوس وگادوم [5] را برای این پارامتر بررسی خواهیم کرد.

[5] Nordhaus - Gaddum

فهرست مطالب

چکیده ب

پیشگفتار پ

فهرست مطالب ث

لیست تصاویر چ

۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ مفاهیم مقدماتی ۱

۲.۱ مقدمه‌ای بر مجموعه‌های احاطه‌گر و مجموعه‌های احاطه‌گر همبند ۵

۲ عدد احاطه‌ای همبند بیرونی یک گراف ۱۰

۱.۲ مقدمه ۱۰

۲.۲ کران‌هایی برای عدد احاطه‌ای همبند بیرونی ۱۱

۳.۲ عدد احاطه‌ای همبند بیرونی برخی از گراف‌ها ۱۹

۴.۲ گراف‌هایی با عدد احاطه‌ای همبند بیرونی بزرگ ۲۱

۵.۲ مقایسه عدد احاطه‌ای همبند بیرونی یک گراف با پارامترهای دیگر ۲۵

۶.۲ اثر زیرتقسیم یال و حذف رأس و افزودن یال بر عدد احاطه‌ای همبند بیرونی گراف ۲۹

۳ عدد احاطه‌ای همبند بیرونی در درخت‌ها ۳۸

۱.۳ بررسی عدد احاطه‌ای همبند بیرونی در درخت‌ها ۳۸

۴ نامساوی نوع نوردهاوس و گادوم ۴۵

۱.۴ کران‌هایی برای $\gamma_{oc}(G) + \gamma_{oc}(\bar{G})$ ۴۵

لیست نمادها ۵۶

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۵۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۳

کتاب‌نامه ۶۸

نمایه ۷۰

لیست تصاویر

۱.۱ گراف G ۲

۲.۱ یک گراف با عدد احاطه‌ای ۲ و عدد احاطه‌ای همبند ۴ . . . . ۵

۱.۲ یک گراف با عدد احاطه‌ای همبند بیرونی ۲ . . . . ۱۰

۲.۲ یک عضو خانواده $\mathcal{S}$ ۱۵

۳.۲ یک عضو خانواده $\mathcal{Q}$ ۲۳

۴.۲ یک عضو خانواده $\mathcal{R}$ ۲۳

۵.۲ یک عضو خانواده $\mathcal{S}$ ۲۴

۶.۲ یک گراف با عدد احاطه‌ای جداشدنی ۲ . . . . ۲۶

۷.۲ یک گراف با عدد احاطه‌ای همبند مضاعف ۲ . . . . ۲۶

۸.۲ یک گراف با عدد احاطه‌ای مهار شده ۲ . . . . ۲۷

۹.۲ یک گراف با تفاضل $\gamma_c - \gamma_{oc}$ به دلخواه بزرگ ۲۷

۱۰.۲ گراف G برای $k = -۵$ ۳۰

۱۱.۲ یک گراف متعلق به خانواده $\mathcal{F}$ ۳۲

۱۲.۲ یک عضو از خانواده $\mathcal{A}$ ۳۲

۱۳.۲ یک گراف متعلق به خانواده $\mathcal{B}$ ۳۳

۱.۳ عنکبوت سالم و عنکبوت زخمی ۳۸

۲.۳ $T \in \mathcal{R}$ ۴۰

۳.۳ $T \in \mathcal{R}'$ ۴۰

۴.۳ $T \in \mathcal{R}''$ ۴۰

۱.۴ یک عضو خانواده $\mathcal{H}$ با $c(G) = ۳$ ۴۶

۲.۴ G' ۴۶

فصل ۱
مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

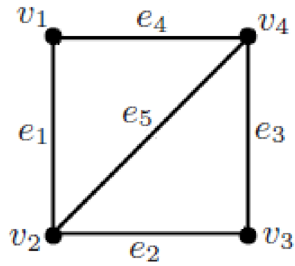
در زندگی روزمره و فعالیت‌هایی که انجام می‌دهیم مسائل و فرآیندهایی وجود دارند که می‌توان برای بیان آن‌ها از نقاط و خطوطی که برخی یا تمام نقاط را به هم وصل می‌کنند، استفاده نمود. به عنوان مثال در شبکه‌های مخابراتی، برای نشان دادن مراکز مخابراتی از نقاط و برای نشان دادن ارتباط بین دو مرکز مخابراتی از خطوطی که نقاط را به هم وصل می‌کنند استفاده می‌کنیم. در بین شکل‌هایی که رسم می‌کنیم، آن‌چه که اهمیت دارد این است که، دو نقطه چند بار به هم وصل شده‌اند یا دو نقطه مشخص، توسط خطی به هم متصل هستند یا نه. مطالعه این اشکال و نمودارها و حل مسائل مربوط به آن‌ها به مفهوم گراف منتهی می‌شود.

گراف $G = (V, E)$ از یک مجموعه متناهی V از نقاط، بنام رأس، و یک مجموعه E از دوتائی‌های نامرتب روی V بنام یال تشکیل شده است. **تعداد** اعضای V را **مرتبه** و **تعداد** اعضای E را **اندازه** G می‌نامند. یک گراف از مرتبه n و اندازه m را یک $(m, n)-$گراف می‌نامند.

در این بخش برخی مفاهیم مقدماتی نظریه گراف را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، تعریف می‌کنیم.

دو رأس u و v **مجاورند** هرگاه $e = uv$ یالی از G باشد. اگر دو سر یک یال بر هم منطبق باشند آن را **طوقه** می‌نامند. دو یال با رئوس ابتدا و انتهایی یکسان را **یال‌های موازی** می‌نامند. گراف ساده، گرافی است که یال موازی و طوقه نداشته باشد. گراف **کامل** K_n، گرافی از مرتبه n است

که در آن هر دو رأس متمایز دلخواه با هم مجاورند. گراف فاقد یال را **گراف تهی** می‌نامند. یک $(u,v)-$**گشت**، دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G است که با رأس u شروع می‌شود و بین هر دو رأس متوالی دنباله، یال متناظر آن‌ها قرار می‌گیرد و این دنباله با رأس v خاتمه می‌یابد. یک $(u,v)-$**مسیر** در G، $(u,v)-$گشتی است که رأس تکراری ندارد. در شکل ۱.۱، $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2$ گشتی است که مسیر نیست. در حالی‌که $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4$ یک $(v_1, v_4)-$مسیر است. تعداد یال‌های یک مسیر را **طول مسیر** می‌نامند. در این پایان‌نامه برای سادگی، یک مسیر تنها با رئوس متوالی آن نشان داده می‌شود.



شکل ۱.۱: گراف G

فاصله بین دو رأس u و v از G، $d_G(u,v)$، برابر می‌نیمم طول یک $(u,v)-$مسیر در G است. در صورتی که G شامل هیچ $(u,v)-$مسیری نباشد، تعریف می‌کنیم $d_G(u,v) = \infty$. گراف G **همبند** است هرگاه بین هر دو رأس از آن مسیری موجود باشد. گرافی که همبند نباشد **ناهمبند** نامیده می‌شود. گراف G را $k-$**همبند** می‌نامند هرگاه با حذف $k-1$ رأس دلخواه از آن، گراف حاصل همبند باشد. یک مسیر بسته در G را یک **دور** گویند. طول کوتاهترین دور در G را **کمر** G نامیده و با $g(G)$ نشان می‌دهند.

گراف همبندی که دور نداشته باشد را **درخت** می‌نامند. فرض کنید G و H دو گراف باشند. اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ آنگاه H را **زیرگراف** G می‌نامند. اگر $V(H) = V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، آنگاه H را **زیرگراف فراگیر** G می‌نامند. زیرگراف فراگیر G که درخت باشد را **درخت فراگیر** می‌نامند. هرگاه H زیرگراف G بوده و مجموعه یال‌های آن متشکل از یال‌هایی در G باشد که دو انتهای آن‌ها در $V(H)$ باشند آنگاه H را **زیرگراف القایی** G نامیده و با نماد $G[V(H)]$

نشان می‌دهند. زیرگراف همبند ماکسیمال یک گراف را **مؤلفه همبندی** آن می‌نامند. زیرمجموعه S از V که هیچ دو رأس آن مجاور نباشند، یک **مجموعه مستقل** از G نامیده می‌شود. مجموعه مستقل S در G، ماکسیمال است هرگاه هیچ مجموعه مستقلی در G شامل S موجود نباشد و ماکسیمم است هرگاه هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S'| > |S|$ موجود نباشد. تعداد رئوس یک مجموعه مستقل ماکسیمم در گراف G را **عدد استقلال** G نامیده و با $\alpha(G)$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید $D \subseteq V(G)$ و G یک گراف همبند باشد. در این‌صورت D را یک **برش رأسی** گراف G گویند، هرگاه $G - D$ دارای بیش از یک مؤلفه باشد. می‌نیمم اندازه یک برش رأسی D از G را که در آن $G - D$ ناهمبند یا گراف بدیهی باشد **عدد همبندی** G نامیده و با $\kappa(G)$ نشان می‌دهند. گراف G، $k-$**همبند** است اگر عدد همبندی آن حداقل k باشد.

مجموعه تمام رئوس مجاور با رأس v در G را **همسایگی باز** v نامیده و با $N_G(v)$ نشان می‌دهند و **همسایگی بسته** v عبارت است از $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. $|N_G(v)|$ را **درجه رأس** v در G نامیده و با $\deg(v)$ نشان می‌دهند. در گراف G از مرتبه n، رأس درجه صفر را **رأس منفرد**، رأس درجه یک را **برگ** یا **رأس انتهایی** و رأس درجه $n-$ ۱ را رأس فراگیر می‌نامند. تنها همسایه یک برگ را **رأس اتکا** می‌نامند. **می‌نیمم درجه** و **ماکسیمم درجه** در گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V(G)\},$$

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}.$$

اگر $S \subseteq V(G)$، آنگاه **همسایگی باز** S عبارت است از $N_G(S) = \bigcup_{v\in S} N_G(v)$ و **همسایگی بسته** S عبارت است از $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. برای هر رأس $v \in S$،

$$N_S(v) = N_G(v) \cap S.$$

فرض کنید $S \subseteq V(G)$ و $u \in S$. **همسایگی خصوصی** u نسبت به S، $Pn[u, S]$، عبارت است از

$$Pn[u, S] = N_G[u] - N_G[S - \{u\}].$$

رأس v از گراف G را **رأس برشی** گوییم هرگاه $G - v$ ناهمبند باشد.

اگر $v \in V(G)$ آنگاه **مرکزگریزی** رأس v، $\mathrm{ecc}(v)$، به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathrm{ecc}(v) = \max\{d_G(v, x) : x \in V(G)\}.$$

قطر گراف G عبارت است از $\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{ecc}(v) : v \in V(G)\}$. **مسیر** P_n، درختی از مرتبه n با قطر $n - ۱$ است. گراف $G = (V, E)$ را **دوبخشی** می‌نامند هرگاه، $V = V_۱ \bigcup V_۲$ که در آن $V_۱ \neq \emptyset$، $V_۲ \neq \emptyset$، $V_۱ \bigcap V_۲ = \emptyset$ و هر یال G دارای یک انتها در $V_۱$ و یک انتها در $V_۲$ باشد. گراف دوبخشی با بخش‌های $V_۱$ و $V_۲$ که در آن $|V_۱| = m$ و $|V_۲| = n$ و هر عضو $V_۱$ با هر عضو از $V_۲$ مجاور است را گراف **دوبخشی کامل** نامیده و با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند. به طور مشابه گراف‌های چندبخشی و گراف‌های چندبخشی کامل تعریف می‌شوند. به ویژه $K_{۱,n}$ را **ستاره** و درخت با قطر ۳ را **ستاره مضاعف** می‌نامند. اگر T ستاره یا ستاره مضاعف باشد، آنگاه رأس غیر برگ **مرکز** T می‌باشد.

منظور از زیرتقسیم کردن یال uv عبارت است از حذف یال uv و افزودن رأس جدید w همراه با دو یال جدید uw و wv. هر یال در یک گراف حداکثر یک‌بار زیرتقسیم می‌شود. درختی که با زیرتقسیم کردن تمام یال‌های ستاره بدست می‌آید، **عنکبوت سالم** نامیده می‌شود.

گراف $k-$ **منتظم** گرافی است که درجه هر رأس آن برابر k می‌باشد. یک **خوشه** از G، زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است به طوری‌که $G[S]$ گراف کامل باشد. تعداد رأس‌های یک خوشه ماکسیمم از G را **عدد خوشه‌ای** G نامیده و با $\omega(G)$ نشان می‌دهند.

دو یال که در یک رأس مشترک باشند، **مجاور** و در غیر این‌صورت **مستقل** نامیده می‌شوند.

دو گراف G و H را **یکریخت** نامیده و با $G \cong H$ نشان می‌دهند هرگاه نگاشتی دوسویی مانند $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$ موجود باشد به‌طوری‌که uv یالی در G است اگر و تنها اگر $\theta(u)\theta(v)$ یالی در H باشد. **گراف تاجی** دو گراف G و H، $G \circ H$، گرافی است که از یک نسخه گراف G و $V(G)$ نسخه از گراف H تشکیل شده است و در آن jامین رأس G به تمام رئوس jامین نسخه از H متصل است. **تاج** $G = H \circ K_۱$ گرافی است که از افزودن یک یال آویز به هر رأس H بدست می‌آید.

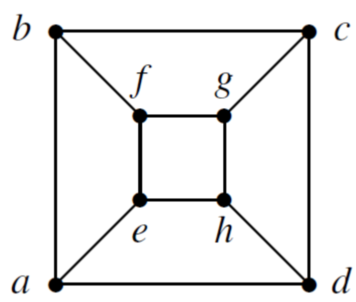
اجتماع دو گراف مجزا G_1 و G_2، $G_1 \cup G_2$، گرافی با مجموعه رئوس $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1) \cup E(G_2)$ است. **الحاق** دو گراف G_1 و G_2، $G_1 + G_2$، گرافی با مجموعه رئوس $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ است. به ویژه، الحاق دور C_n و گراف K_1 را یک **چرخ**، W_n، با n پره می‌نامند. **مکمل** گراف G، $\bar{G}$، گرافی است که در آن $V(\bar{G}) = V(G)$ و $uv \in E(\bar{G})$ اگر و تنها اگر $uv \notin E(G)$.

۲.۱ مقدمه‌ای بر مجموعه‌های احاطه‌گر و مجموعه‌های احاطه‌گر همبند

در این بخش به بیان و اثبات قضایایی در مورد عدد احاطه‌ای و عدد احاطه‌ای همبند می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. *مجموعه $S \subseteq V$ در گراف G، یک **مجموعه احاطه‌گر** نامیده می‌شود هرگاه هر رأس $V(G) - S$ با رأسی از S، مجاور باشد. **عدد احاطه‌ای** گراف G، $\gamma(G)$، برابر کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد. یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G)$ را $\gamma(G)-$مجموعه می‌نامند.*

تعریف ۲.۲.۱. *مجموعه $S \subseteq V$ در گراف G، یک **مجموعه احاطه‌گر همبند** نامیده می‌شود هرگاه S یک مجموعه احاطه‌گر بوده و زیرگراف القایی $G[S]$ همبند باشد. **عدد احاطه‌ای همبند** G، $\gamma_c(G)$، برابر کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر همبند است. یک مجموعه احاطه‌گر همبند از اندازه $\gamma_c(G)$ را $\gamma_c(G)-$مجموعه می‌نامند.*



شکل ۲.۱: یک گراف با عدد احاطه‌ای ۲ و عدد احاطه‌ای همبند ۴

در شکل ۲.۱، $\{a, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم و $\{e, f, g, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر

همبند می‌نیمم می‌باشد. لذا $\gamma(G) = ۲$ و $\gamma_c(G) = ۴$.

گزاره ۳.۲.۱. *مجموعه احاطه‌گر S یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم از G است اگر و فقط اگر برای هر رأس $v \in S$ یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*

۱. *v یک رأس منفرد از S باشد؛*

۲. *رأس $u \in V - S$ با شرط $N_G(u) \cap S = \{v\}$ موجود باشد.*

برهان. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم G باشد. در این‌صورت برای هر رأس $v \in S$، $S - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G نمی‌باشد. بنابراین رأسی چون u در $V - S \cup \{v\}$ وجود دارد که توسط هیچ رأسی از مجموعه $S - \{v\}$ احاطه نشده است. در این‌صورت $u = v$ که در آن v یک رأس منفرد در S است یا $u \in V - S$. اگر u بوسیله‌ی مجموعه $S - \{v\}$ احاطه نشود، توسط S احاطه خواهد شد، آنگاه رأس u فقط با رأس v در S مجاور خواهد بود، یعنی $N_G(u) \cap S = \{v\}$.

بالعکس، فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر است و برای هر رأس $v \in S$، یکی از دو شرط فوق برقرار باشد. نشان می‌دهیم که S یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم است. فرض کنید که S یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم نباشد، در این‌صورت رأس $v \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $S - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. بنابراین، v با حداقل یک رأس در $S - \{v\}$ مجاور است که شرط اول برقرار نیست. همچنین اگر $S - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد، آنگاه هر رأس در $V - S$ با حداقل یک رأس در $S - \{v\}$ مجاور است، یعنی شرط دوم برقرار نیست. در نتیجه هیچ کدام از شروط برقرار نبوده و این یک تناقض است. □

لم ۴.۲.۱. *برای هر گراف G، $\frac{n(G)}{۱ + \Delta(G)} \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.*

برهان. گیرید v رأسی با ماکزیمم درجه $\Delta(G)$ باشد. در این‌صورت $V(G) - N_G(v)$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است و لذا $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

حال گیرید S یک $\gamma-$مجموعه در G باشد. در این‌صورت $V(G) = \bigcup_{v\in S} N_G[v]$. لذا

$$n(G) = |V(G)| \leq \sum_{v\in S} |N_G[v]| \leq |S||(\Delta(G) + ۱)|$$

و برهان تمام است. □

قضیه ۵.۲.۱. *اگر G یک گراف همبند با $n(G) \geq ۳$ باشد، آنگاه $\gamma_c(G) = n - \varepsilon_T(G) \leq n - ۲$. که در آن $\varepsilon_T(G)$ ماکزیمم تعداد یال آویز در هر درخت فراگیر T از گراف G است.*

برهان. فرض کنید T درخت فراگیر گراف G با $\varepsilon_T(G)$ رأس انتهایی بوده و L مجموعه رئوس انتهایی باشد. در این‌صورت $T - L$ یک مجموعه احاطه‌گر همبند با $n - \varepsilon_T$ رأس می‌باشد یعنی

$$\gamma_c(G) \leq n - \varepsilon_T(G).$$

بالعکس، فرض کنید S یک γ_c- مجموعه باشد. چون $G[S]$ همبند است، در نتیجه زیرگراف القایی $G[S]$ شامل یک درخت فراگیر مانند T_s است. درخت فراگیر T از G، حاصل از اضافه کردن $n - \gamma_c(G)$ رأس باقیمانده از $V - S$ به T_s و وصل کردن هر رأس در $V - S$ دقیقاً به یک رأس در S را در نظر بگیرید. حال T حداقل $n - \gamma_c(G)$ رأس انتهایی دارد. در نتیجه $\varepsilon_T(G) \geq n - \gamma_c(G)$ یا $\gamma_c(G) \geq n - \varepsilon_T(G)$. در نتیجه، $\gamma_c(G) = n - \varepsilon_T(G)$. چون $\varepsilon_T(G) \geq ۲$، حکم برقرار است.

□

نتیجه ۶.۲.۱. *اگر T درختی با $n > ۳$ رأس باشد، آنگاه $\gamma_c(T) = n - l(T)$، که در آن $l(T)$ تعداد برگ‌های درخت T است.*

تبصره ۷.۲.۱. *مجموعه احاطه‌گر همبند یک درخت T متشکل از همه رئوس برشی T می‌باشد.*

قضیه ۸.۲.۱. *برای هر گراف همبند G، $\frac{n}{\triangle(G)+۱} \leq \gamma_c(G) \leq ۲m - n$. علاوه بر این، $\gamma_c(G) = \frac{n}{\triangle(G)+۱}$ اگر و فقط اگر $\triangle(G) = n - ۱$ و $\gamma_c(G) = ۲m - n$ اگر و فقط اگر G یک مسیر باشد.*

برهان. چون $\gamma(G) \leq \gamma_c(G)$، کران پایین از لم ۴.۲.۱ نتیجه می‌شود. بنابر قضیه ۵.۲.۱،

$$\gamma_c(G) \leq n - ۲ = ۲(n - ۱) - n.$$

چون G همبند است درنتیجه $m \geq n - ۱$ و لذا $\gamma_c(G) \leq ۲m - n$.

اگر G یک مسیر باشد، آنگاه بنابر نتیجه ۶.۲.۱، $\gamma_c(G) = n - ۲ = ۲(n-۱) - n = ۲m - n$.

بالعکس، فرض کنید $\gamma_c(G) = ۲m - n$. در این‌صورت بنابر قضیه ۵.۲.۱، $۲m - n \leq n - ۲$،