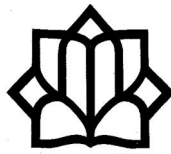


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه کاشان

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته طراحی کاربردی

با عنوان

ارتعاشات اجباری تیر کامپوزیتی اوپلر-برنولی با در نظر

گرفتن مؤلفه‌های غیر خطی کرنش

استاد راهنما

دکتر احمدرضا قاسمی

دانشجو

محدثه بافقی‌زاده

اسفند ماه ۹۲

تقدیم به

روح پاک پدر

و به

دستان پر مهر مادر...

که آب و آئینه و آفتاب من است

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خدای را که توفیق کسب دانش و معرفت را به ما عطا فرمود. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از تمامی اساتید بزرگوار به ویژه اساتید دوره‌ی کارشناسی ارشد که در طول سالیان گذشته مرا در تحصیل علم و معرفت و فضایل اخلاقی یاری نموده‌اند تقدیر و تشکر نمایم.

از استاد گرامی و بزرگوار جناب آقای دکتر احمد رضا قاسمی خوزانی که راهنمایی اینجانب را در انجام تحقیق، پژوهش و نگارش این پایان‌نامه تقبل نموده‌اند نهایت تشکر و سپاسگذاری را دارم.

همچنین از تشریک مساعی دکتر محمدی‌مهر و دکتر قربانپور به عنوان اساتید داور داخل دانشگاه که این پایان‌نامه را مورد مطالعه قرار داده و در جلسه دفاعیه شرکت نموده‌اند تشکر می‌نمایم.

در پایان از جناب آقای دکتر محمدی‌مهر که به عنوان نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دانشگاه قبول زحمت نموده‌اند سپاسگزاری می‌نمایم.

چکیده:

پایان نامه حاضر به تحلیل ارتعاشات اجباری یک تیر کامپوزیتی اوپلر-برنولی که تحت اثر بار هارمونیک قرار گرفته است، می‌پردازد. به منظور دستیابی به معادلات حاکم بر فیزیک مسئله، تئوری الاستیسیته کرنش محدود مورد استفاده قرار گرفته است. هدف اصلی مطالعه حاضر بررسی تاثیر مؤلفه‌های غیرخطی کرنش بر رفتار ارتعاشی تیر می‌باشد. به منظور در نظر گرفتن مؤلفه‌های غیرخطی کرنش، تانسور کرنش گرین-لاگرانژ مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از فرض برقراری قانون هوک بین تانسور تنش پیولا-کیرشهف نوع دوم و تانسور کرنش گرین-لاگرانژ و با محاسبه انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار انجام شده توسط نیروی خارجی، معادلات حاکم بر مسئله به همراه شرایط مرزی با استفاده از اصل هامیلتون تعمیم یافته به دست آمده‌اند. به منظور توصیف رفتار تیر کامپوزیتی، فرضیات تئوری کلاسیک چندلایه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. در این تحقیق روش عددی مربع سازی دیفرانسیلی به منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی و پاسخ فرکانسی تیر مورد استفاده قرار گرفته است. در این پژوهش ضمن محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای خطی و غیرخطی برای تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و ساده-ساده، پدیده جهش، پدیده رزونانس اصلی و رزونانس ثانویه، تأثیر نسبت ضخامت به طول تیر و نیز تأثیر مقادیر مختلف دامنه و فرکانس تحریک روی رفتار ارتعاشی آن در تیرهای کامپوزیتی از جنس کربن/اپوکسی و شیشه/اپوکسی مورد تحلیل قرار گرفته است.

نتایج بدست آمده نشان می‌دهند در شرایطی که فرکانس تحریک در محدوده فرکانس طبیعی تیر قرار دارد، دامنه نوسانات بسیار بزرگ بوده که نشان‌دهنده پدیده تشدید است. همچنین با تغییر شرایط مرزی از دوسرگیردار به دوسر ساده و گیردار-آزاد، دامنه نوسانات افزایش یافته که مرتبط با سختی ناشی از شرایط تکیه‌گاهی است. افزایش نسبت ضخامت به طول تیر باعث افزایش فرکانس طبیعی و کاهش دامنه نوسانات می‌شود.

کلمات کلیدی:

ارتعاشات اجباری، ارتعاشات غیرخطی، تئوری تیر اوپلر-برنولی، کرنش محدود، روش مربع سازی دیفرانسیلی.

فهرست مطالب

۱	فصل اول : مقدمه و تاریخچه	۱
۱	مقدمه	۱
۴	مروری بر مطالعات انجام شده	۲
۱۵	ساختار تحقیق	۳
۱۷	فصل دوم : ارتعاشات اجباری تیر کامپوزیتی اوپلر برنولی تحت کرنش محدود	۱۷
۱۷	مقدمه	۱
	معادلات حاکم بر ارتعاشات اجباری تیر کامپوزیتی اوپلر-برنولی تحت کرنش محدود	۲
۲۰		۲۰
۲۸	حل معادله دیفرانسیل حاکم	۳
۲۹	روش باقیمانده های وزنی	۱
۳۲	فصل سوم: روش های عددی حل معادله ارتعاش غیرخطی	۳۲
۳۲	مقدمه	۱
۳۵	مقدمه ای بر روش عددی DQM	3
۳۵	انتگرال مربعی	۱
۳۶	دیفرانسیل مربعی	۲
۳۷	مربع سازی دیفرانسیلی چند جمله ای	3
۳۸	محاسبه ضرایب وزنی برای مشتق مرتبه اول:	۴
۴۲	محاسبه ضرایب وزنی مشتقات مرتبه دوم و بالاتر	۵
۴۲	چگونگی توزیع نقاط	۶
۴۳	برخی مفاهیم مربوط به محاسبات غیر خطی	۳
۴۳	ضرب هادامارد	۱
۴۴	اعتبار سنجی	3
۵۹	فصل چهارم : نتایج تحلیل ارتعاش اجباری تیر کامپوزیتی	۵۹
۵۹	مقدمه	۱

۵۹ رزونانس اصلی و ثانویه	۲.۴
۶۰ نتایج	۳.۴
۶۱ شرط مرزی گیردار-گیردار	۱.۳.۴
۶۳ شرط مرزی ساده-ساده	۲.۳.۴
۶۶ شرط مرزی گیردار-آزاد	۳.۳.۴
۸۷ فصل پنجم : نتیجه گیری و پیشنهادات	۵.
۸۹ پیشنهادات	۱.۵

فهرست جدول ها

جدول ۱-۳ فرکانس های طبیعی بی بعد خطی و غیرخطی مربوط به ۵ مود اول ۴۶

جدول ۲-۳ فرکانس های بی بعد در حالت غیرخطی برای شرط مرزی گیردار-آزاد ۴۷

جدول ۳-۳ خصوصیات مواد کامپوزیتی ۵۷

جدول ۴-۳ فرکانس های طبیعی برای تیر کامپوزیتی از جنس شیشه-اپوکسی ۵۸

جدول ۵-۳ فرکانس های طبیعی برای تیر کامپوزیتی از جنس کربن-اپوکسی ۵۸

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۲: نمایش شماتیک تیر اویلر-برنولی [۴۹] ۲۰
- شکل ۲-۲: بار گسترده اعمالی روی تیر ۲۳
- شکل ۱-۳: انتگرال $f(x)$ در بازه بسته $[a, b]$ ۳۶
- شکل ۲-۳: یک مسئله یک بعدی ۳۶
- شکل ۳-۳: شکل مود اول تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار ۴۸
- شکل ۴-۳: شکل مود دوم تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار ۴۸
- شکل ۵-۳: شکل مود سوم تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار ۴۹
- شکل ۶-۳: شکل مود چهارم تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار ۴۹
- شکل ۷-۳: شکل مود اول تیر با شرایط مرزی ساده-ساده ۵۰
- شکل ۸-۳: شکل مود دوم تیر با شرایط مرزی ساده-ساده ۵۱
- شکل ۹-۳: شکل مود سوم تیر با شرایط مرزی ساده-ساده ۵۱
- شکل ۱۰-۳: شکل مود چهارم تیر با شرایط مرزی ساده-ساده ۵۲
- شکل ۱۱-۳: شکل مود اول تیر با شرایط مرزی گیردار-ساده ۵۳
- شکل ۱۲-۳: شکل مود دوم تیر با شرایط مرزی گیردار-ساده ۵۳
- شکل ۱۳-۳: شکل مود سوم تیر با شرایط مرزی گیردار-ساده ۵۴
- شکل ۱۴-۳: شکل مود چهارم تیر با شرایط مرزی گیردار-ساده ۵۴
- شکل ۱۵-۳: نمودار بک‌بون برای تیر کامپوزیتی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار ۵۵
- شکل ۱۶-۳: نمودار بک‌بون برای تیر کامپوزیتی برای شرایط مرزی ساده-ساده ۵۶
- شکل ۱۷-۳: نمودار بک‌بون برای تیر کامپوزیتی برای شرایط مرزی گیردار-آزاد ۵۶
- شکل ۱-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس شیشه-اپوکسی و کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ ۶۲
- شکل ۲-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس شیشه-اپوکسی و کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \omega_0$ ۶۲

- شکل ۳-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی و کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = 3\omega_0$ ۶۳
- شکل ۴-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس شیشه- اپوکسی و کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ ۶۴
- شکل ۵-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس شیشه- اپوکسی و کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \omega_0$ ۶۵
- شکل ۶-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس شیشه- اپوکسی (راست)، کربن-اپوکسی (چپ) در حالت $\Omega = 3\omega_0$ ۶۵
- شکل ۷-۴: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی (راست)، کربن-اپوکسی (چپ) در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ ۶۷
- شکل ۸-۴: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی (راست)، کربن-اپوکسی (چپ) در حالت $\Omega = \omega_0$ ۶۷
- شکل ۹-۴: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی (راست)، کربن-اپوکسی (چپ) در حالت $\Omega = 3\omega_0$ ۶۸
- شکل ۱۰-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ برای مقادیر مختلف دامنه تحریک ۶۹
- شکل ۱۱-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس شیشه- اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ برای مقادیر مختلف دامنه تحریک ۶۹
- شکل ۱۲-۴: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ برای مقادیر مختلف دامنه تحریک ۷۰
- شکل ۱۳-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس کربن- اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ برای مقادیر مختلف دامنه تحریک ۷۱

- شکل ۴-۱۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس کربن- اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$
- و $h/l = \frac{1}{50}$ برای مقادیر مختلف دامنه تحریک ۷۱
- شکل ۴-۱۵: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار از جنس کربن- اپوکسی در حالت
- $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ برای مقادیر مختلف دامنه تحریک ۷۲
- شکل ۴-۱۶: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی در حالت
- $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ ۷۳
- شکل ۴-۱۷: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی در حالت
- $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{10}$ و $h/l = \frac{1}{5}$ ۷۳
- شکل ۴-۱۸: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس شیشه- اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$
- و $h/l = \frac{1}{50}$ ۷۴
- شکل ۴-۱۹: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس شیشه- اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$
- و $h/l = \frac{1}{10}$ و $h/l = \frac{1}{5}$ ۷۵
- شکل ۴-۲۰: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار-یک سر آزاد از جنس شیشه- اپوکسی در
- حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ ۷۶
- شکل ۴-۲۱: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار از جنس شیشه- اپوکسی در حالت
- $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{10}$ و $h/l = \frac{1}{5}$ ۷۶
- شکل ۴-۲۲: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس کربن- اپوکسی در حالت
- $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ ۷۷
- شکل ۴-۲۳: پاسخ فرکانسی تیر دو سر گیردار از جنس کربن- اپوکسی در حالت
- $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{10}$ و $h/l = \frac{1}{5}$ ۷۷

- شکل ۲۴-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ ۷۸
- شکل ۲۵-۴: پاسخ فرکانسی تیر دو سر ساده از جنس کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{5}$ و $h/l = \frac{1}{10}$ ۷۸
- شکل ۲۶-۴: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار-یک سر آزاد از جنس کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{50}$ ۷۹
- شکل ۲۷-۴: پاسخ فرکانسی تیر یک سر گیردار از جنس کربن-اپوکسی در حالت $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ و $h/l = \frac{1}{5}$ و $h/l = \frac{1}{10}$ ۷۹
- شکل ۲۸-۴: نمودار FRF برای تیر کامپوزیتی دوسرگیردار از جنس شیشه-اپوکسی . ۸۰
- شکل ۲۹-۴: نمودار FRF برای تیر کامپوزیتی دوسر تکیه‌گاه ساده از جنس شیشه-اپوکسی ۸۱
- شکل ۳۰-۴: نمودار FRF برای تیر کامپوزیتی گیردار-آزاد از جنس شیشه-اپوکسی .. ۸۱
- شکل ۳۱-۴: نمودار FRF برای تیر کامپوزیتی دوسرگیردار از جنس کربن-اپوکسی .. ۸۲
- شکل ۳۲-۴: نمودار FRF برای تیر کامپوزیتی دو سر تکیه‌گاه ساده از جنس کربن-اپوکسی ۸۲
- شکل ۳۳-۴: نمودار FRF برای تیر کامپوزیتی گیردار-آزاد از جنس کربن-اپوکسی ... ۸۳
- شکل ۳۴-۴: پدیده جهش برای تیر کامپوزیتی دو سرگیردار در حالت بی‌بعد ۸۴
- شکل ۳۵-۴: پدیده جهش برای تیر کامپوزیتی دو سر تکیه‌گاه ساده در حالت بی‌بعد .. ۸۵

۱. فصل اول : مقدمه و تاریخچه

۱.۱ مقدمه

امروزه در علم مهندسی، سازه‌های سنگین فلزی به تدریج با سازه‌های کامپوزیتی سبک‌تر و با استحکام بالاتر جایگزین شده‌اند. الیاف تقویت شده کامپوزیتی به طور وسیعی در صنایع هوافضا، هسته‌ای، زیردریائی و عمران مورد استفاده قرار می‌گیرند. مواد کامپوزیتی را می‌توان برای دستیابی به ترکیبی از ویژگی‌های مواد که می‌تواند شامل چگالی پائین، استحکام و سفتی بالا، میرایی بالا، مقاومت شیمیائی، مقاومت به شوک حرارتی و سایر ویژگی‌های مطلوب باشد، به طور دقیق طراحی کرد.

تیرها معمولاً به عنوان یکی از المان‌های مهم سازه‌ای شناخته می‌شوند، که معمولاً برای مقاومت در برابر کشش، فشار و خمش در بسیاری از سازه‌های مدرن مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تیرهای کامپوزیتی به عنوان سازه‌های سبک حمل‌کننده بار در قطعات و سائل نقلیه فضائی، اتومبیل‌ها، سازه‌های عمرانی و مکانیکی عمل می‌کنند. علاوه بر این، بسیاری از عضوهای سازه‌ای مانند بال هواپیما، پره توربین‌ها و ملخ هلیکوپتر را می‌توان به صورت یک تیر مدلسازی و تحلیل نمود.

بطور کلی تمام اجسامی که دارای دو پارامتر جرم و کشسانی هستند، می‌توانند نوسان کنند. از اینرو اغلب ماشین‌ها و سازه‌های صنعتی تا اندازه‌ای ارتعاش می‌کنند و در طراحی معمولاً باید رفتار نوسانی آنها در نظر گرفته شود.

مسئله ارتعاشات سیستم‌های پیوسته یک بعدی دارای اهمیت زیادی از نظر تئوری و فنی است. مسئله ارتعاشات تیرها به عنوان یک مدل ساده از سیستم‌های پیوسته یک بعدی، به

دلیل کاربرد روز افزون آن‌ها به یکی از موضوعات مهم تبدیل شده و توجه بسیاری در چند دهه اخیر به آن اختصاص یافته است.

دو دسته بندی کلی برای ارتعاشات وجود دارد که ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری نامیده می‌شوند [۱]. ارتعاشات آزاد وقتی روی می‌دهد که سیستم از حالت تعادل اولیه خارج شده و تحت کنش نیروهای ذاتی خود سیستم نوسان کند و نیروهای تحریک خارجی وجود نداشته باشند. سیستمی که ارتعاشات آزاد دارد با یک یا چند فرکانس طبیعی نوسان می‌کند. این فرکانس‌ها خواص سیستم دینامیکی هستند که با توزیع جرم و سفتی آن تعیین می‌شوند.

ارتعاشات اجباری یکی دیگر از شاخه‌های ارتعاشات است، که تحلیل آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. وقتی یک سیستم تحت تأثیر تحریک هارمونیک قرار می‌گیرد، سیستم با همان فرکانس تحریک نوسان می‌کند. منابع معمول تحریک هارمونیک عبارت از نامیزانی در ماشین‌های چرخان، نیروهایی که توسط ماشین‌های رفت و برگشتی ایجاد می‌شوند و حرکت خود ماشین می‌باشند. این تحریک‌ها می‌توانند برای ماشین نامطلوب باشند زیرا در صورت بروز دامنه‌های نوسانی بزرگ، عملکرد این تجهیزات یا ایمنی سازه دچار آسیب می‌شود. از طرف دیگر اگر فرکانس تحریک با یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر شود حالت تشدید روی می‌دهد و ممکن است نوسان‌های بزرگ و خطرناک روی دهد. شکست سازه‌های بزرگی مثل پل‌ها، ساختمان‌ها یا بال هواپیماها از جمله حوادثی است که می‌تواند بر اثر تشدید روی دهد. از اینرو در اغلب حالت‌ها باید از تشدید، و همچنین از ایجاد دامنه‌های بزرگ جلوگیری شود. به عنوان مثال یکی از دلایل مهم شکست پره‌های توربین گاز به علت خستگی در اثر ارتعاش در محدوده تشدید پره می‌باشد [۲]. بنابراین باید مودهای ارتعاشی که پره در آنها در حالت تشدید قرار می‌گیرد شناسایی شده و از آنها دوری شود. با انجام آنالیز مودال روی پره می‌توان به اصلاح پروفیل پره جهت دوری از تشدید، افزایش راندمان توربین و عملکرد بهتر در اثر کنترل تغییرشکل‌های پره تحت تأثیر ارتعاش دست یافت. این امر سبب عمر بیشتر پره و هزینه پائین تعمیر یا تعویض پره می‌شود. بحث درباره رفتار ماشین‌ها برای استفاده بهینه از آنها اهمیت دارد. به عنوان نمونه موتورهایی که روی بال هواپیما نصب می‌شوند با توجه به دور موتور و فرکانسی که دارند، می‌توانند بار هارمونیکی را به سازه بال القا کنند. همچنین برای شبیه‌سازی

سازه‌هایی مانند پل و بررسی اثر عبور وسائل نقلیه بر روی پایداری سازه پل، معمولاً تحلیل ارتعاشات اجباری تحت بار متحرک^۱، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اغلب سیستم‌های مهندسی با تحریک هارمونیک روبرو هستند. این تحریک معمولاً بر اثر نامیزانی ماشین آلات چرخان ایجاد می‌شود. اگرچه تحریک هارمونیک خالص کمتر از تحریک تناوبی و انواع دیگر آن روی می‌دهد، فهم رفتار سیستمی که تحت تأثیر تحریک هارمونیک است ضرورت دارد، زیرا به کمک آن می‌توان پاسخ سیستم را به انواع کلی‌تر تحریک به دست آورد. تحریک هارمونیک می‌تواند به صورت نیرو یا تغییر مکان یک نقطه از سیستم باشد. نامیزانی در ماشین‌های چرخان یک منبع معمولی برای تحریک نوسانی است [۱].

می‌توان گفت سهم بیشتری از تحقیقات صورت گرفته در زمینه ارتعاشات به مطالعه ارتعاشات آزاد سازه‌ها پرداخته‌اند و کارهای مطالعاتی کمتری در زمینه تحلیل ارتعاشات اجباری صورت گرفته است. با توجه به اینکه در اکثر کاربردهای صنعتی، سازه‌ها تحت بارگذاری‌های هارمونیک ناشی از نامیزانی جرم و یا بارگذاری‌های تصادفی قرار می‌گیرند، تحقیق و مطالعه در زمینه ارتعاشات اجباری از اهمیت خاصی برخوردار است.

اکثر سازه‌هایی که به‌طور بهینه طراحی شده‌اند، تحت شرایط عملیاتی شدید هستند و دامنه‌های ارتعاشی بزرگی را تجربه می‌کنند. برای نوسانات کوچک و با فرض بروز خیزهای کوچک، پاسخ یک جسم تغییرشکل‌پذیر می‌تواند به طور دقیق با معادلات و شرایط مرزی خطی توصیف شود. در حالی که، با افزایش دامنه نوسانات، اثرات غیرخطی اهمیت پیدا می‌کنند. پدیده‌های ارتعاشی که می‌توان آنها را با تئوری ارتعاشات خطی مدل کرد شامل ارتعاشات با دامنه کوچک اشیاء طویل و باریک مثل پل‌های طویل، بال هواپیما، پره‌های هلیکوپتر و حرکات چرخشی^۲ شافت‌های انعطاف‌پذیر هستند. از طرف دیگر پدیده‌های معینی مشاهده می‌شوند که بدون در نظر گرفتن عوامل غیرخطی موجود در سیستم غیر قابل توصیف هستند. در واقع برهم کنش بین پل و فنداسیون، بین پره با هوا و بین شافت و یاتاقان غیرخطی هستند. سیستم‌های غیرخطی رفتارهایی را نشان می‌دهند که برای توصیف آنها باید از تئوری‌های غیرخطی استفاده نمود.

¹ Moving load

² whirling

عوامل بروز رفتار غیرخطی در سازه‌ها، علاوه بر دامنه‌های ارتعاشی بزرگ، می‌تواند به عوامل هندسی، اینرسی، مادی یا ساختاری، نیروهای حجمی و یا اصطکاک تقسیم شود. به‌طور کلی غیرخطی هندسی ناشی از تغییرشکل‌های بزرگ است که منجر به رابطه غیرخطی کرنش-جابجایی می‌شود. غیرخطی هندسی می‌تواند توسط کشش غیر خطی^۱، انحناها و دوران‌های بزرگ المان‌های سازه‌ای و کرنش‌های بزرگ ایجاد شود. کشش غیرخطی صفحه‌میان‌ی یک جسم تغییرشکل‌پذیر، در صورتی که شرایط تکیه‌گاهی آن به گونه‌ای باشد که حرکت نقاط انتهایی و یا لبه‌های آن را محدود کند، با ارتعاشات عرضی آن توأم می‌شود. این کشش منجر به ایجاد رابطه غیرخطی بین کرنش و جابجایی می‌گردد. اگر ارتعاشات با دامنه بزرگ با تغییرات بزرگ در انحنا همراه باشد، به‌کارگیری رابطه غیرخطی بین انحنا و جابجایی ضروری است. اثرات غیرخطی اینرسی ناشی از حضور جرم‌های متمرکز یا توزیع شده هستند. غیرخطی مادی نیز در صورتی که تنش‌ها توابع غیرخطی از کرنش‌ها باشند، رخ می‌دهد. نیروی اصطکاک نیز در صورتی که تابع غیرخطی از جابجائی و سرعت باشد، مانند اصطکاک خشک، می‌تواند منجر به بروز رفتار غیرخطی گردد [۳-۴].

مؤلفه‌های غیرخطی ممکن است در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم یا شرایط مرزی و یا هر دو ظاهر شوند. شکل غیرخطی ظاهر شده در این معادلات بستگی به دستگاه مختصات استفاده شده و جهت نیروهای حجمی مانند گرانش دارد. مثال‌هایی از شرایط مرزی غیرخطی شامل سطوح آزاد^۲ در سیالات و قیود وابسته به تغییرشکل هستند [۳-۴].

۲.۱ مروری بر مطالعات انجام شده

در زمینه ارتعاشات تیرهای فلزی و کامپوزیتی مطالعات بسیاری توسط محققین انجام گرفته است. همانطور که پیشتر ذکر شد، اکثر پژوهش‌های انجام شده مربوط به حوزه ارتعاشات آزاد بوده و مطالعات صورت گرفته روی ارتعاشات اجباری سهم کمتری را به خود اختصاص داده است. از طرف دیگر، در بیشتر تحقیقات صورت گرفته در زمینه ارتعاشات غیرخطی از نوع هندسی از فرضیات فون کارمن استفاده شده است که طبق آن کرنش‌ها کوچک در نظر گرفته می‌شوند.

¹ Nonlinear stretching

² Free surfaces

مطالعه ارتعاشات با دامنه بزرگ تیرهای با تکیه‌گاه ساده به کار کریگر [۵] برمی‌گردد که در آن معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش یافتند. سپس حل آنها به صورت توابع بیضوی^۱ با استفاده از تقریب تک پارامتری^۲ به دست آمد. به طور مشابه برجن [۶] برای مسئله ارتعاشات با دامنه بزرگ تیرهایی با تکیه‌گاه لولا حلی را بر پایه پروسه کلاسیک مکانیک سیستم‌های پیوسته ارائه کرد. سرینیواسان [۷-۸] روش ریلی-ریتز را برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر تعادل دینامیکی برای ارتعاشات آزاد و اجباری تیرها و ورق‌های با تکیه‌گاه ساده به کار گرفت. محققان قبلی قادر بودند معادله دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی حاکم را به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی بر حسب تابع مجهولی از زمان کاهش دهند و با استفاده از تقریب تک پارامتری، حل معادله دیفرانسیل معمولی را بر حسب توابع بیضوی بنویسند [۷]. سرینیواسان با استفاده از پروسه ریتز-گالرکین، حل $w(x,t)$ را به صورت $w(x,t) = C_n \phi_n(x,t)$ انتخاب کرد که C_n مجموعه‌ای از پارامترهای مجهول است. توابع ϕ_n انتخاب شده باید شرایط مرزی نیروئی مسئله را ارضا کنند. روش ریتز-گالرکین به طور کلی منجر به یک دستگاه معادلات جبری بر حسب C_n می‌شود. برای تقریب تک پارامتری، معادله نهائی از مرتبه دو است که روابط دامنه-فرکانس مطلوبی را فراهم می‌کند [۷].

سرینیواسان در تحقیقی دیگر به مطالعه ارتعاشات آزاد و اجباری تیرها و ورق‌ها تحت ارتعاشات با دامنه نسبتاً بزرگ پرداخته است. وقتی که تکیه‌گاه‌های چنین اعضاء سازه‌ای در حین خمش، ثابت (بدون حرکت) باشند، یک تنش غشائی در این اعضاء القاء می‌شود. همین تنش غشائی به عنوان منبع غیرخطی بودن در پژوهش او در نظر گرفته شده است [۸].

اونسین [۹] مطالعات خود را برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش اختلال بسط داد. طبق نظر او حل‌هایی که به صورت تقریبی با استفاده از جداسازی متغیرها به صورت ترکیبی از متغیر مکان (x) و متغیر زمان (t) در نظر گرفته می‌شدند برای شرایط مرزی ساده کاربرد داشتند و برای سایر شرایط مرزی باید از روش اختلال استفاده کرد. او از این روش برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار و گیردار-ساده استفاده کرد. با صرف‌نظر کردن از اینرسی، معادله حرکت یک تیر یکنواخت با تکیه‌گاه‌های ثابت با معادله به دست آمده توسط دیگر

¹ Elliptic functions

² One-term approximation

پژوهشگران [۷] مشابه است. ارتعاشات غیرخطی تیرها با تکیه‌گاه‌های میانی یا تیرهایی که انتهای آنها به صورت الاستیک مهار شده است، می‌تواند به صورت مشابه تحلیل شود [۹].

می [۱۰] فرمولاسیون المان محدود را برای ارتعاشات دامنه بزرگ تیرها و ورق‌ها ارائه کرد. در کار او، از تغییر شکل محوری صرف‌نظر شده و نیروی محوری میانگین در طول المان ثابت فرض شده است.

در سال ۱۹۷۳ پاندلای و ستیمورتی [۱۱] معادلات مودال را برای ارتعاشات غیرخطی تیرها، ورق‌ها، حلقه‌ها و پوسته‌ها با استفاده از معادلات لاگرانژ توسعه دادند و تفاوت موجود در طبیعت معادلات مودال برای تیرها، ورق‌ها، حلقه‌ها و پوسته‌ها را برجسته کردند. آنها با توجه به این مطلب که در اکثر تحقیقات صورت گرفته روی ارتعاشات خمشی با دامنه بزرگ تیرها و ورق‌ها، غیرخطی از نوع سخت شونده (افزایش فرکانس با دامنه) و در مورد حلقه‌ها و پوسته‌ها از نوع نرم شونده بوده (کاهش فرکانس با دامنه) است، این موضوع را با معادلات مودال این اعضا سازه‌ای نشان دادند. هدف اصلی پژوهش آنها به دست آوردن دید روشنی از ساختار معادلات مودال سازه‌های مختلف بوده است. آنها برای به دست آوردن معادلات از پیکره‌بندی لاگرانژ استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که اگر یک ورق مسطح تقویت شود، آنگاه می‌توان انتظار داشت که ورق تقویت شده، درجه بالاتری از غیرخطی از نوع سخت شونده را نسبت به ورق تقویت نشده از خود بروز دهد. به طور مشابه می‌توان چنین رفتاری را از پوسته تقویت شده با حلقه انتظار داشت. اگر پوسته با اعضاء طولی و فریم‌های حلقوی تقویت شود، اعضاء طولی در غیرخطی از نوع سخت شونده سهمیم خواهند شد، در حالی که حلقه‌ها در غیر خطی نرم شونده سهمیم خواهند شد، به طوری که تأثیر نهایی به اندازه دقیق هر نوع غیرخطی مربوط به حلقه‌ها و اعضاء طولی بستگی خواهد داشت [۱۱].

در سال ۱۹۷۵ ریفیلد [۱۲] از روش تقریبی برای مسائل ارتعاشات غیرخطی با تأثیرات غیرخطی مادی با شرایط مرزی مختلف استفاده نمود. راتو و همکارانش [۱۳] نیز ارتعاشات غیرخطی تیرها و ورق‌ها را مطالعه کردند و برای تیرها تغییرشکل برشی و اینرسی دورانی را در نظر گرفتند. در معادلات آنها، تغییرشکل محوری در نظر گرفته نشده و روابط کرنش-جابجایی غیرخطی، خطی‌سازی شده‌اند. در پژوهش آنها روابط کرنش-جابجایی غیرخطی برای تیرهای با تکیه‌گاه ساده و گیردار با در نظر گرفتن تغییرشکل برشی ارائه شده است.

در ادامه راجو و همکارانش [۱۴] در سال ۱۹۷۶ مسئله ارتعاشات غیرخطی روی تیرها و ورق‌ها را با استفاده از روش ریلی-ریتز و با در نظر گرفتن تغییر شکل درون صفحه‌ای^۱ و اینرسی و با استفاده از خطی‌سازی رابطه کرنش-جابجایی بررسی کردند. نتایج پژوهش آنها نشان می‌دهد که تأثیر تغییر شکل طولی یا درون صفحه‌ای و اینرسی در جهت کاهش غیرخطی بودن در رابطه فرکانس-دامنه است. علاوه بر این برای تیرهای باریک و ورق‌های نازک تأثیرات اینرسی طولی قابل صرف نظر کردن است. وقتی که سازه تحت ارتعاشات خمشی با دامنه بزرگ قرار می‌گیرد، مودهای طولی یا درون صفحه‌ای با مودهای خمشی کوپل می‌شوند. در پژوهش آنها روش ریلی-ریتز برای به دست آوردن رابطه کرنش-جابجایی یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده تحت ارتعاشات با دامنه بزرگ به کار گرفته شده است.

پراتاپ و وارادان [۱۵] ارتعاشات غیرخطی تیرهائی با تکیه‌گاه ساده را با استفاده از معادلات تعادل غیرخطی واقعی، عبارات غیرخطی دقیق برای انحناء و غیرخطی که ناشی از نیروی محوری است، مطالعه کردند. همچنین آنها معیاری برای تعریف درجه غیرخطی بودن ارائه دادند. در تحقیق آنها برای ساده سازی مسئله از نیروهای اینرسی طولی صرف نظر شده است. روندی ترکیبی از روش‌های المان محدود و اختلال برای مطالعه ارتعاشات سازه‌های غیرخطی توسط پاداوان [۱۶] ارائه شده است.

در سال ۱۹۸۲ استیمورتی [۱۷-۱۸] کارهای انجام شده در زمینه روش‌های کلاسیک تحلیل تیرها با انواع غیرخطی مادی، هندسی و سایر موارد غیرخطی و همچنین کارهای انجام شده روی تحلیل المان محدود تیرهای غیرخطی تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی را گردآوری کرد.

می و آمفای [۱۹] ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی با دامنه بزرگ را برای تیرها مورد مطالعه قرار دادند. آنها اثرات جابجایی طولی و اینرسی طولی را در فرمولاسیون خود در نظر گرفته‌اند و با استفاده از روش المان محدود و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف به حل مسئله پرداختند. در پژوهش آنها تابع تحریک خارجی به صورت هارمونیک و تابعی از کسینوس در نظر گرفته شده که هم به صورت بار گسترده و هم به صورت بار متمرکز مورد بررسی قرار گرفته است. آنها وابستگی دامنه ارتعاش به نسبت فرکانس و کرنش را برای بارگذاری‌ها و

¹ In-plane deformation

شرایط مرزی مختلف مطالعه نموده و نتیجه گرفتند که تأثیرات تغییرشکل طولی و اینرسی طولی در جهت کاهش غیرخطی بودن است.

در سال ۱۹۸۸ ساراما و همکاران [۲۰] حل ریلی-ریتز را با در نظر گرفتن جابجائی درون صفحه‌ای و اینرسی ارائه دادند و خطای موجود در فرمولاسیون قبلی را که ناشی از تقریب خطی سازی معادل بود، پیدا کردند. همچنین آنها دوباره فرمولاسیون گالرکین، لاگرانژی، ریتز و المان محدود را آزمودند و دو فرمولاسیون المان محدود ترکیبی برای تحلیل بحرانی فرض‌های مختلفی که پیشتر برای مسئله ارتعاشات تیرها با تکیه‌گاه ساده به کار گرفته می‌شد، ارائه دادند.

سینق و همکارانش [۲۱] نسبت‌های فرکانسی را از معادله حرکت، معادله بالانس انرژی و روش اختلال و حل ریتز-گالرکین که از ۴ حالت ترکیبی ممکن به دست آمده است، همراه با و بدون جابجائی محوری و همراه با و بدون تقریب‌های خطی‌سازی، استخراج کردند. آنها مشاهده کردند که فرمولاسیون بدون جابجائی محوری با خطی‌سازی و فرضیات هارمونیک ساده، فرکانس‌های غیرخطی مشابهی را با فرکانس‌های به دست آمده از روش‌های دیگر مانند ریتز-گالرکین و اختلال که با جابجائی محوری و بدون فرضیات نوسان هارمونیک و خطی‌سازی به دست آمده‌اند، تولید می‌کند. در نتیجه، سینق و همکارانش [۲۲] فرمول‌بندی را برای ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرها ارائه دادند که در آن معادلات ماتریسی المان محدود دینامیکی (با استفاده از شکل مود همگرا شده) به معادلات جبری کاهش یافته‌اند و با استفاده از انتگرال‌گیری عددی مستقیم حل شده‌اند. آنها نتیجه گرفتند که در هیچ تحلیل ارتعاشاتی غیرخطی، نمی‌توان از جابجائی‌های محوری صرف‌نظر کرد. در سال ۱۹۸۹ کاپانیکا و راسیتی [۲۳] یک المان تیر تیموشنکو دو گره‌ای با ۱۰ درجه آزادی در هر گره برای مطالعه ارتعاشات غیرخطی تیرهای کامپوزیتی چندلایه متقارن و نامتقارن بر پایه تئوری‌های کلاسیک مرتبه اول و مراتب بالا با استفاده از روش انتگرال‌گیری که پیشتر توسط سینق و همکاران ارائه شده بود، ارائه کردند. آنها معادلات ماتریسی المان محدود دینامیکی را که با استفاده از شکل مودهای خطی با فرض نوسانات هارمونیک به دست آمده را به یک معادله جبری کاهش داده و معادله جبری به دست آمده را برای دستیابی به نسبت‌های فرکانسی با روش اختلال حل کردند.