دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه :

برآوردیابی‌پارامترها درمدل‌رگرسیون‌خطی تحت تابع‌زیان لینکس

محمدحسین پیرنیافر

استاد راهنما :

دکترنرگس عباسی

استاد مشاور :

دکتر عبدالرضا بازرگان لاری

اسفند ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه :

برآوردیابی‌پارامترها درمدل‌رگرسیون‌خطی تحت تابع‌زیان لینکس

محمدحسین پیرنیافر

استاد راهنما :

دکترنرگس عباسی

استاد مشاور :

دکتر عبدالرضا بازرگان لاری

اسفند ۱۳۹۰

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **آقای محمد حسین پیرنیافر** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۸۸۰۰۰۳۶۱۵** با عنوان:

" برآوردیابی پارامترها در مدل رگرسیون خطی تحت تابع زیان لینکس"

با حضور هیأت داوران در روز **پنج‌شنبه** مورخ **۱۳۹۰/۱۲/۲۵** ساعت **۷:۳۰ صبح** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ...۱۸/۵...به حروف...هیجده و نیم.......... با درجه...عالی.......تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر نرگس عباسی	راهنما	دانشیار	پیام نور شیراز	
۲	آقای عبدالرضا بازرگان لاری	مشاور	استادیار	شیراز	
۳	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	خانم رحمت سلطانی	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۶۲۲۲۲۴۰-۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۴۹-۰۷۱۱
صندوق پستی :۱۳۶۸- ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب محمدحسین پیرنیافر دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است .

محمدحسین پیرنیافر

تاریخ و امضاء

۹۰/۱۲/۲۵

اینجانب محمدحسین پیرنیافر دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی گواهی می‌نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

محمدحسین پیرنیافر

تاریخ و امضاء

۹۰/۱۲/۲۵

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه مطعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به :

همسرم که پیوسته مشوق من برای تحصیل وتحقیق بوده است.

تشکر و قدردانی:

تشکر از دو فرشته زندگیم ، پدر ومادر عزیزم که در راه زندگی و تحصیل از هیچ کوششی دریغ نکرده‌اند و همواره یار و پشتیبان من بوده‌اند و با تشکر فراوان از استاد ارجمند خانم دکتر نرگس عباسی که در این پژوهش از هیچ کمکی دریغ ننموده‌اند و همواره با صبر و حوصله پاسخگوی سؤالات و راهنما و مشوق من بوده‌اند و همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر عبدالرضا بازرگان کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

چکیده

برآوردیابی پارامترهای توزیع نرمال در مـدل رگرسـیون خطـی تحـت تـابع زیـان لیـنکس و ادعـای موضوعاتی در این زمینه موردنظراست. در این پایـان‌نامـه، برآوردهـا و پـیش‌بینـی‌هـای بیـزی بـرای پارامترهای یک توزیع نرمال نتیجه می‌شوند. معمولاً از پیش‌بینی‌کننده‌ی فراوانـی‌گـرا هماننـد بـرآورد ماکسیمم درستنمایی که با یک روند جایگذاری بوسیله جانشین کـردن $\mathrm{MLE}(\mu)$ در توزیـع پیشـگو است استفاده می‌شود. همچنین دراین پایان‌نامه پیش‌بینی بیز را تحت تابع زیان $\alpha-$خطای قـدرمطلق، زیان لینکس مورد امتحان قرار می‌دهیم. اگر واریانس نامعلوم باشد، مزدوج توأم پیشین را در بـرآورد میانگین نامعلوم برای واریانس به‌وسیله واریانس نمونه بـرای زیـان‌هـای لیـنکس اسـتفاده مـی‌کنـیم. همچنین در ادامه برآوردهای بیز در ترکیبات خطی از ضرایب رگرسیونی اسـتفاده مـی‌شـوند، تحـت توزیع‌های پیشین مناسب، برآورد و پیش‌بینی بیز بهتراز برآورد ماکسیمم درسـتنمایی ارائـه مـی‌شـود. براساس زیان لینکس، برآورد بیز پیشین جفری بهتر و بالاتر از بـرآورد ماکسـیمم درسـتنمایی اسـت. بهرحال، در بحث پیش‌بینی، اغلب به‌صورت واضح نمی‌توان گفت که پـیش‌بینـی بیـز بهتراسـت ویـا برآورد ماکسیمم درستنمایی بهتر می‌باشد.

کلمات کلیدی:

برآورد بیزی، پیشین جفری، تابع زیان، برآوردگر ماکسیمم درستنمائی، تابع مخاطره یا ریسک.

فهرست

مقدمه

در بیست سال گذشته، دقت قابل ملاحظه‌ای روی مقایسه بین روش‌های بیزی و فراوانی‌گرا تحت برخی توابع زیان یکنواخت معلوم همانند زیان توان دوم خطا صورت گرفته است. استفاده کردن توابع زیان متقارن همانند زیان توان دوم خطا برای بسیاری از مسائل مناسب است. در بیشتر موارد، آنها انتخاب‌هایی معقول هستند. که در بسیاری از نوشته ها مطرح شده‌اند . و ممکن است برای جزئیات مورد بحث به اندرسون[۱] (۱۹۷٦ ، ۱۹۸٤) ، فولر[۲] (۱۹۸۷) و گلسر[۳] (۱۹۸۱، ۱۹۸۷) اشاره شود بهرحال، برای برخی از مسائل برآورد و پیش‌بینی به این صورت ممکن است نامناسب باشد.

در فصل اول، ابتدا به تشریح توزیع‌های نرمال یک‌متغیره وچندمتغییره پرداخته‌ایم و در ادامه به بیان انواع برآوردگرها و شیوه‌ی بدست آوردن آن‌ها و هم‌چنین برخی از ویژگی‌های این برآوردگرها پرداخته می‌شود و درآخر برخی از تابع زیان‌های مختلف را ارائه می‌کنیم.

در فصل دوم، ریسک مورد انتظار را برای MLE μ [٤] و ریسک پیش‌گویانه را برای زمانی که برآورد استفاده شده، جایگذاری می‌شود نتیجه‌گیری می‌کنیم. برآورد بیزی μ را تحت L_1 با مزدوج پیشین μ یا با مزدوج توأم پیشین (μ,σ^2) که وابسته به هر دو حالت σ^2 معلوم و یا نامعلوم است به‌دست می‌آوریم. همچنین یک پیش‌بینی برای توزیع نرمال به‌دست خواهیم آورد، که اگر واریانس σ^2 معلوم با مزدوج پیشین μ باشد، یک تقریب از پیش‌بینی بیزی تحت L_1 است. درادامه‌ی این فصل،برآورد بیزی و پیش‌بینی برای زیان‌های لینکس و زیان‌های مورد انتظار تحت لینکس مورد استنتاج قرار می‌گیرد و یک نظریه مجانبی سطح بالا برای این برآوردها و پیش‌بینی‌هایشان ایجاد شده است، و به

---

[۱]. Anderson

[۲]. Fuller

[۳]. Gleser

[۴]. برآورد ماکسیمم درستنمائی

ترتیب این ریسک‌ها از لحاظ فرض علمی تحت این توابع زیان مقایسه می‌شوند. در بخش ۲-۳ مقایسه‌ی برآوردگر بیزی $\hat{\mu}_B$ را بعنوان برآوردگر بیزی تحت $L_۲$ (زیان لینکس)، با μ_n که به‌عنوان برآوردگر بیزی تحت $L_۱$ (تابع زیان $\alpha-$خطای قدرمطلق) می‌باشد، ارائه شده‌است. براساس برخی توضیحات، حتی زمانی که $L_۱$ درست و صحیح است، تابع زیان $\hat{\mu}_B$ بهتراز μ_n نمایش داده می‌شود. بنابراین، این نوع نتایج می‌توانند بعنوان یک اخطار از این برآورد بیزی خام(ساده) ارائه شوند. زیرا توزیع‌های نرمال نقش یک قانون اساسی و مهم در آمار را بازی می‌کنند.

درفصل سوم، برآوردهای پارامترها در فصل‌های قبلی را در ترکیبات خطی از ضرایب رگرسیونی تحت این دو نوع تابع زیان $L_۱$ و $L_۲$ ادامه داده می‌شود. در فصل چهارم، تحلیل عددی و نتایج جدیدارائه شده‌اند. چندین لم که در اثبات قضایا مفید هستند، در پیوست آخر پایان‌نامه گنجانده شده است.

فصل اول:

۱–۱ توزیع نرمال یک متغیره و چند متغیره

۱–۱–۱ مقدمه

توزیع نرمال یکی از مهم‌ترین توزیع‌های احتمالی پیوسته در نظریه احتمالات است. علت نام‌گذاری و همچنین اهمیت این توزیع، هم‌خوانی بسیاری از مقادیر حاصل شده، هنگام نوسان‌های طبیعی و فیزیکی پیرامون یک مقدار ثابت با مقادیر حاصل از این توزیع است. دلیل اصلی این پدیده، نقش توزیع نرمال در قضیه‌ی حدمرکزی است. به‌زبان ساده،در قضیه‌ی حد مرکزی نشان داده می‌شود که تحت شرایطی، مجموع مقادیر حاصل از متغیرهای مختلف که هرکدام میانگین و پراکندگی متناهی دارند، با افزایش تعداد متغیرها، دارای توزیعی بسیار نزدیک به توزیع نرمال است. این قانون که تحت شرایط و مفروضات طبیعی نیز برقرار است، سبب شده که برآیند نوسان‌های مختلفِ تعداد زیادی از متغیرهای ناشناخته، در طبیعت به صورت توزیع نرمال آشکار شود.

این توزیع را گاهی به دلیل استفاده‌ی کارل فردریک گاوس از آن در کارهای خود با نام توزیع یا تابع گوسی(گاوسی) نامیده می‌شود؛ همچنین به دلیل شکل تابع احتمال این توزیع، با نام انحنای زنگوله‌ای (زنگدیس) نیز معروف است.

تابع احتمال این توزیع دارای دو پارامتر است که یکی تعیین کننده‌ی مکان(μ) و دیگری تعیین کننده‌ی مقیاس(σ) توزیع هستند. همچنین میانگین توزیع با پارامتر مکان وپراکندگی آن با پارامتر مقیاس برابر است. منحنی تابع احتمال حول میانگین توزیع متقارن است. در حالت خاص اگر $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ باشد توزیع، نرمال استاندارد نامیده می‌شود.

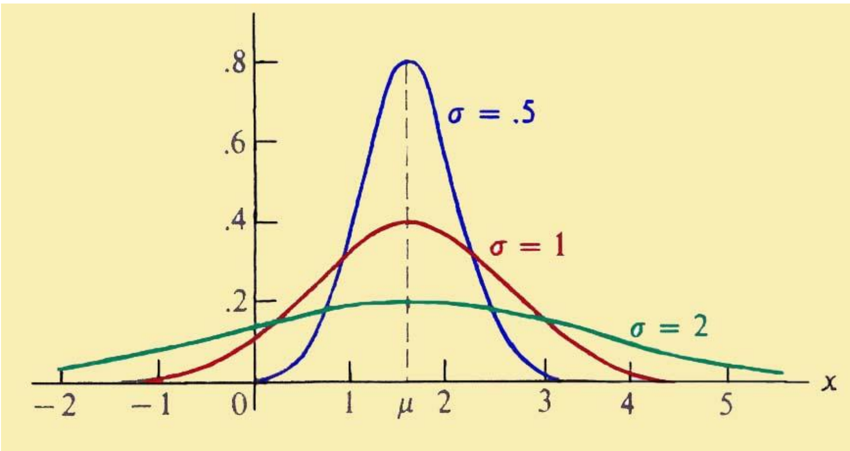
۱-۱-۲ توزیع نرمال یک متغیره

تعریف ۱-۱.گوییم متغییر تصادفی X به‌صورت نرمال توزیع شده‌است، اگر چگالی آن بـه‌صـورت زیـر باشد:

$$f_X(x) = f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^۲/۲\sigma^۲}, \qquad (۱-۱)$$

که درآن پارامترهای μ و σ در $\infty > \mu > \infty-$ و $\sigma > ۰$، صدق می‌کنند. هر توزیعی که با تابع چگالی داده شده در رابطه‌ی (۱ − ۱) تعریف شود، توزیع نرمال نامیده می‌شود.

برای نشان دادن پارامترها، نمادهای μ و $\sigma^۲$ را به کار برده‌ایم زیرا معلوم خواهد شد که این پارامترها به‌ترتیب میانگین و ورایانس این توزیع‌اند.



شکل ۱-۱: چگالی‌های نرمال

به‌سهولت می‌توان بررسی کرد که مد چگالی نرمال در $x = \mu$ و نقاط عطف آن در $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ رخ می‌دهند. (شکل ۱-۱را ببینید). چون توزیع نرمال در این پایان‌نامه فراوان پیش می‌آید، نمادگذاری برای آن ارائه می‌شود. اگر متغییرتصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد می‌نویسیم: $X \sim N(\mu,\sigma^۲)$. همچنین نماد $\phi_{\mu,\sigma^۲}(x)$ را برای چگالی $X \sim N(\mu,\sigma^۲)$ و نماد $\Phi_{\mu,\sigma^۲}(x)$ را برای تابع توزیع تجمعی آن به‌کار خواهیم برد.

اگر متغییر تصادفی نرمال دارای میانگین صفر و واریانس ۱ باشد، متغییرتصادفی **نرمال استاندارد** یا متغییر تصادفی نرمال شده نامیده می‌شود. برای متغییر تصادفی نرمال استاندارد، زیرنویس‌های زیرین نمادهای چگالی و تابع توزیع حذف می‌شوند. یعنی،

$$\phi(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}x^{۲}} \qquad , \qquad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(\mu)du\,. \qquad (۲-۱)$$

چون $\phi_{\mu,\sigma^{۲}}(x)$ تابع چگالی است، پس مستلزم آن است که،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{\mu,\sigma^{۲}}(x)dx=۱,$$

باشد، که درستی آن را می‌پذیریم.

قضیه ۱-۱:اگر X متغییر تصادفی نرمال باشد،

$$\mathbb{E}[X]=\mu, \qquad var[X]=\sigma^{۲}, \qquad M_X(t)=e^{\mu t+\sigma^{۲}t^{۲}/۲}. \qquad (۳-۱)$$

برهان:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}]\\ &= e^{t\mu}\mathbb{E}\left[e^{t(X-\mu)}\right]\\ &= e^{t\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{t(X-\mu)}e^{-(1/2\sigma^{۲})(X-\mu)^{۲}}dx\\ &= e^{t\mu}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(X-\mu)}e^{-(1/2\sigma^{۲})[(X-\mu)^{۲}-2\sigma^{۲}t(X-\mu)]}\,dx\end{aligned}$$

اگرعبارت داخل کروشه را مربع کامل کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}(X-\mu)^{۲}-2\sigma^{۲}t(X-\mu) &= (X-\mu)^{۲}-2\sigma^{۲}t(X-\mu)+\sigma^{۴}t^{۲}-\sigma^{۴}t^{۲}\\ &= (X-\mu-\sigma^{۲}t)^{۲}-\sigma^{۴}t^{۲}\,,\end{aligned}$$

پس داریم:

$$\mathrm{m}_X(t)=e^{t\mu}e^{\sigma^{۲}t^{۲}/2}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(X-\mu-\sigma^{۲}t)^{۲}/۲\sigma^{۲}}\,dx\,.$$

حاصل انتگرال همراه با ضریب $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}$ لزوماً یک است زیرا برابر سطح زیر نمودار توزیع نرمال با میانگین $\mu+\sigma^{۲}t$ و واریانس $\sigma^{۲}$ است. بنابراین،

$$\mathrm{m}_X(t) = e^{\mu t + \sigma^۲ t^۲/۲}.$$

با مشتق‌گیری از $\mathrm{m}_X(t)$ وقرار دادن $t = ۰$، نتیجه می‌شود:

$$\mathbb{E}[X] = \mathrm{m}'_X(۰) = \mu$$

و

$$var[X] = \mathbb{E}[X^۲] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^۲ = \mathrm{m}''_X(۰) - \mu^۲ = \sigma^۲,$$

که ازاین‌جا استفاده از نمادهای μ و $\sigma^۲$ برای پارامترها توجیه می‌شود.

چون انتگرال نامتناهی $\phi_{\mu,\sigma^۲}(x)$ شکل تابعی ساده‌ای ندارد، تابع توزیع تجمعی را تنها می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\Phi_{\mu,\sigma^۲}(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi_{\mu,\sigma^۲}(u)\, du. \qquad (۱-٤)$$

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد اگر بخواهیم یک متغییر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ در بازه‌ی دلخواهی قرار گیرد، می‌توانیم برحسب تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد پیدا کنیم.

قضیه ۱-۲:اگر $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$، آن‌گاه،

$$P[a < X < b] = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \qquad (۱-۵)$$

برهان:

$$P[a < X < b] = \int_a^b \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{-\frac{۱}{۲}[(X-\mu)/\sigma]^۲}\, dx = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}z^۲} dz$$
$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

تذکر: $\Phi(x) = ۱ - \Phi(-x).$

توزیع نرمال به عنوان الگوی منطقی برای رفتار برخی پدیده‌های تصادفی ظاهر می‌شود. این توزیع شکل حدی بسیاری از توزیع‌های احتمال دیگر نیز هست. توزیع نرمال، توزیع حدی در **قضیه‌ی مشهور حدمرکزی** نیز می‌باشد.

قضیه۱-۳:قضیه‌ی حد مرکزی. اگر به ازای هر عدد صحیح مثبت n، متغییرهای تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مستقل و هم‌توزیع، با میانگین μ_X و واریانس $\sigma_X^۲$ باشند، آن‌گاه برای هر z

$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad F_{Z_n}(z) \to \Phi(z) \qquad (۱-٦)$$

که درآن،

$$Z_n = \frac{(\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n])}{\sqrt{var[\bar{X}_n]}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}.$$

ما از روابط $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu_X$ و $var[\bar{X}_n] = \sigma_X^۲/\mathrm{n}$ استفاده کرده‌ایم. رابطه‌ی $(۱-٦)$ بیان می‌کند که برای هر شناسه ثابت z، مقدار تابع توزیع تجمعی متغییر تصادفی $Z_n(n = ۱,۲, \ldots)$ به مقدار $\Phi(z)$ میل می‌کند. (یادآور می‌شویم که $\Phi(.)$ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است).

به‌مفهوم قضیه‌ی حد مرکزی توجه کنید: اگر متغییرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $X_۱, X_۲, \ldots, X_n, \ldots$ را که دارای میانگین و واریانس نیز هستند در اختیار داشته باشید آن‌گاه $\bar{X}_n = \left(\frac{۱}{n}\right)\sum X_i$ که از کم کردن میانگینش از آن و تقسیم حاصل بر انحراف معیارش به صورت «استاندارد شده»درمی‌آید، دارای توزیعی است که به نرمال استاندارد نزدیک می‌شود. نکته‌ی کلیدی که باید توجه کرد این‌جاست، مادامی که متغییرهای تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n, \ldots$ دارای میانگین و واریانس باشند، توزیع مشترک آن‌ها هرچه باشد هیچ فرقی نمی‌کند.

۳-۱-۱ توزیع نرمال چند متغییره

توزیع $\mathbf{u}$ که با $\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(۰,۱)$ نشان داده می‌شود، شروع می‌کنیم. دراین حالت همان‌طور که می‌دانیم میانگین این متغییرتصادفی برابر صفر و واریانس آن برابر واحد است. متغییرتصادفی x دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $۰ < \sigma^۲$ است اگر توزیع آن با توزیع

$\mu + \sigma u$ که درآن $u \sim N(۰,۱)$ است، یکی باشد. دراین حالت pdf این متغییر به‌صورت

$$(۲\pi\sigma^۲)^{-۱/۲} exp\left(-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲\right) \qquad (۱-۷)$$

است که درآن $-\infty < \mu$، $x < \infty$ و $۰ < \sigma$. تابع مولد گشتاور این متغییر تصادفی عبارت است از

$$\mathrm{m}_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left(e^{t(\mu+\sigma u)}\right) = e^{t\mu}\mathbb{E}[e^{bu}] \ , \quad (b = t\sigma)$$

$$\mathrm{m}_X(t) = e^{t\mu + b^۲/۲} \qquad (۸-۱)$$

اکنون P متغییرتصادفی مستقل نرمال استاندارد $u_۱, \dots, u_p$ را در نظر بگیرید. تابع چگالی احتمال توأم آن‌ها عبارت است از

$$(۲\pi)^{-P/۲} exp\left[-\frac{۱}{۲}(u_۱^۲ + \cdots + u_P^۲)\right]$$

در نماد برداری داریم $\mathbf{u} = (u_۱, \dots, u_p)'$ که درآن $u_۱^۲ + \cdots + u_P^۲ = \mathbf{u}'\mathbf{u}$. بنابراین تابع چگالی احتمال $\mathbf{u}$ به‌صورت

$$(۲\pi)^{-P/۲} exp\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{u}'\mathbf{u}\right), \qquad -\infty < u < \infty \qquad (۹-۱)$$

نوشته می‌شود. توجه کنید که

$$\mathbb{E}[u] = \mathbb{E}(u_۱, \dots, u_p)' = \left(\mathbb{E}(u_۱), \dots, \mathbb{E}(u_p)\right)' = \mathbf{0}'$$

و همچنین

$$\mathrm{cov}(\mathbf{u}) = \mathbb{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \mathbb{E}\begin{pmatrix} u_۱^۲ & u_۱u_۲ & \cdots & u_۱u_p \\ u_۲u_۱ & u_۲^۲ & \cdots & u_۲u_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_pu_۱ & u_pu_۲ & \cdots & u_P^۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}$$

زیرا u_i ها مستقل و در نتیجه دارای کوواریانس صفرند. بنابراین بردار تصادفی $\mathbf{u}$ دارای بردار میانگین $\mathbf{0}$، ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{I}$ و تابع چگالی احتمال(۱ - ۹) می‌باشد وآن‌را به‌صورت $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ نشان می‌دهیم که درآن $\mathbf{0}$ میانگین $\boldsymbol{I}$ ، $\mathbf{u}$ ماتریس کوواریانس یا ماتریس پراکندگی $\mathbf{u}$ واندیس P، بعد بردار تصادفی $\mathbf{u}$ می‌باشد. اکنون تعریف توزیع نرمال چند متغییره را مانند حالت یک متغییره ارائه می‌دهیم.

تعریف۱-۲:گوییم بردار تصادفی P بعدی $\mathbf{x}$ دارای توزیع نرمال چند متغییره‌ی ناویژه‌ی $N_P(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ است اگر توزیع $\mathbf{x}$ مانند توزیع $\boldsymbol{\mu} + A\mathbf{u}$ باشد که درآن A ماتریسی است $P \times P$ به‌طوری که $\Sigma = AA'$ و $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$، $\boldsymbol{\mu}$ را میانگین توزیع و $\boldsymbol{\Sigma}$ را ماتریس کوواریانس یا ماتریس پراکندگی توزیع نامیم.

تعریف دیگری را که معادل تعریف فوق است ارائه می‌دهیم.

تعریف۱-۳:بردار تصادفی P بعدی $\mathbf{x}$ را دارای توزیع نرمال چندمتغییره گوییم اگر و فقط اگر هر ترکیب خطی از $\mathbf{x}$ دارای توزیع یک متغییره باشد.

۱-۱-۴ بعضی از ویژگی‌های توزیع نرمال چند متغییره

دراین بخش بعضی از ویژگی‌های توزیع نرمال چند متغییره را فهرست‌وار ذکر می‌کنیم. فرض‌کنید $\mathbf{x} \sim N_P(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$، آن‌گاه تابع مولد گشتاور $\mathbf{x}$ به‌صورت

$$\mathrm{m}(t) = \mathbb{E}[\exp(t_۱ x_۱ + t_۲ x_۲ + \cdots + t_P x_P)] = \mathbb{E}[\exp \mathbf{t}'\mathbf{x}] = \mathbb{E}[\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} + \mathbf{t}'\mathbf{A}\mathbf{u})]$$

تعریف می‌شود که درآن $\mathbf{u} \sim N_P(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ می‌باشد و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(t) &= \mathbb{E}[\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} + \mathbf{t}'\mathbf{A}\mathbf{u})] \\
&= (\exp \mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\mathbb{E}(\exp \mathbf{b}'\mathbf{u}) \qquad (\mathbf{b}' = \mathbf{t}'\mathbf{A}) \\
&= (\exp \mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\mathbb{E}[\exp(b_۱ u_۱ + b_۲ u_۲ + \cdots + b_P u_P)] \\
&= (\exp \mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) \prod_{i=۱}^{P} \mathbb{E}(e^{b_i u_i}) \\
&= (\exp \mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) \prod_{i=۱}^{P} \left(\exp \frac{۱}{۲} b_i^۲\right) \\
&= (\exp \mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) \left(\exp \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{P} b_i^۲\right) \\
&= \exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) \left(\exp \frac{۱}{۲} \mathbf{b}'\mathbf{b}\right) \\
&= \exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) \left(\exp \frac{۱}{۲} \mathbf{t}'\mathbf{A}\mathbf{A}'\mathbf{t}\right) \\
&= \exp\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} + \frac{۱}{۲} \mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right),
\end{aligned}$$

که درآن از(۱ − ۸) واز استقلال u_iها استفاده شده است. پس با این توضیحات دراصل قضیه‌ی پایین که اولین ویژگی می‌باشد را اثبات کرده‌ایم.