بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای مهدی ترکتاز** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۷۵۶۶۱۰۲۳ تحت عنوان: «**دستاوردهای ریاضیدانان مسلمان در حوزه جبر از قرن دوم تا قرن چهارم هجری با تمرکز بر آثار خوارزمی**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۲- استاد مشاور	فرید قاسملو	مربی	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر رحیم زارع‌نهندی	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر علی ایرانمنش ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر فرهاد قاسمی و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب سعید ترکتاز دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: سعید ترکتاز

تاریخ و امضا: ۹۰/۱۱/۱۸

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب ..... دانشجوی رشته ..... ورودی سال تحصیلی .....
مقطع ..... دانشکده ..... متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.....

تاریخ: ۹۰/۱۰/۱۸

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

دستاوردهای ریاضیدانان مسلمان در حوزه جبر از قرن دوم تا قرن چهارم هجری با تمرکز بر آثار خوارزمی

نگارنده: مهدی ترکتاز

استاد راهنما: دکتر علی ایرانمنش

استاد مشاور: فرید قاسملو

آذر ماه ۱۳۹۰

چکیده

در فصل اول سعی بر آن داریم تا به مطالعه تاریخ علم جبر در تمدن اسلامی و تمدن‌هایی که دستاوردهایی در این زمینه از ریاضیات داشتند بپردازیم و مهم‌ترین کارهای صورت گرفته مشهورترین ریاضیدانان تمدن‌هایی مانند مصر، بابل، یونان، هند، و چین را بررسی اجمالی کنیم.

در فصل بعدی پس از معرفی خوارزمی، مبتکر علم جبر، به بیان آثار و ترجمه‌های آن پرداخته و دستاورد های این ریاضی دان بزرگ که شامل حل اصولی معادلات خطی ،معادلات درجه دوم و جبر دوجمله‌ای‌ها است را، بررسی می کنیم و این دستاورد ها را با کارهای ریاضیدانان مشهور سایر تمدن‌ها در زمینه جبر مقایسه می کنیم و در ادامه جزئیات کارهای انجام‌گرفته توسط خوارزمی، و تأثیر او بر ریاضیات غرب را شرح می‌دهیم.

در فصل آخر ابتدا مختصری از زندگینامه ریاضیدانانی چون ابوکامل، ثابت بن قره، کرجی، سموئل، ابن‌هیثم، و خیام را بیان خواهیم کرد. سپس به معرفی آثار و ترجمه‌های موجود و تأثیر آنان در این زمینه از ریاضیات خواهیم پرداخت و در ادامه کارهای خوارزمی که توسط ابوکامل و ثابت بن قره دنبال شده اند مورد توجه قرار خواهد گرفت. در واقع آن‌ها معادلات خوارزمی را با ضرایب گنگ نیز در نظر گرفته و حل می‌کنند، سپس کرجی با کار بر روی یک جمله ای ها اولین نظریه در رابطه با حساب جبری را ارائه می‌دهد و در راستای کارهای کرجی سموئل و ابن‌هیثم با کار بر روی چند جمله ای ها موفق به تقسیم کردن چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر می شوند و در پایان عمر خیام به تقسیم بندی معادلات درجه سوم پرداخته واین معادلات را به روش هندسی حل می کند.

واژگان کلیدی : جبر و مقابله، معادلات درجه دوم ،معادلات درجه سوم، ، خوارزمی، ابوکامل، عمر خیام

تقدیم به:

تمام اساتید زندگی ام

که به من دانشی آموختند

تقدیر و تشکر :

از تمام کسانی که اینجانب را در جهت نیل به اهداف پایان نامه مرا یاری نموده اند مخصوصا از پروفسور علی ایرانمنش که بنده را به این کار تشویق ، و راهنمایی های لازم را انجام دادند و از آقای فرید قاسملو که بنده را یاری نمودند و زحمات زیادی در این راستا کشیدند تقدیر و تشکر می کنم .

فهرست مطالب

مقدمه ۱

فصل ۱ پیشینه علم جبر درتمدن اسلامی و تمدن‌های قبل از آن ۳

۱-۱ مصر باستان ۳

۱-۲ بابل ٤

۱-۳ کار عمده بابلی‌ها در جبر ٦

۱-٤ یونان باستان ۷

۱-۵ کارهای عمده دیوفانتوس در جبر ۸

۱-٦ هند ۹

۱-٦-۱ *برهمگوپتا* ۹

۱-٦-۲ *مهاویرا* ۱۰

۱-۷ چین ۱۱

۱-۸ ریاضیات اسلامی ۱۲

فصل ۲ خوارزمی مبتکر جبر ۱٤

۲-۱ خوارزمی و پیدایش مفهوم جدید از جبر ۱٤

۲-۲ آثار خوارزمی ۱۹

۲-۲-۱ کتاب جبر و مقابله ۱۹

۲-۲-۲ ترجمه‌ها ۲۰

۲-۲-۳ شارحان کتاب جبر و مقابله ۲۲

۲-۲-٤ کتاب الجمع والتفریق فی الحساب الهندی ۲۳

۲-۲-۵ زیج خوارزمی ۲٤

۲-۲-٦ صو ر ة الارض ۲۵

۲-۲-۷ استخراج التاریخ الیهود و اعیادهم ۲۵

۲-۲-۸ الرخامه ۲۵
۲-۲-۹ کتاب تاریخ ۲۶
۲-۲-۱۰ کتاب عمل الاسطرلاب والعمل بالاسطرلاب ۲۶
۲-۳ شرح جزئیات کار خوارزمی در کتاب جبر و مقابله. ۲۶
۲-٤ اثبات‌های هندسی خوارزمی از معادلات ۳۱
۲-٦ جبر دوجمله‌ای‌ها ۳۵
۲-۵ حل چند مسئله از خوارزمی ۳۷
۲-۷ تأثیر جبر خوارزمی بر دنیای غرب ۳۹
۲-۸ خوارزمی یادیوفانتوس ٤۰

فصل ۳ جبر اسلامی بعد از خوارزمی ٤۳

۳-۱ ابوکامل ٤۳
۳-۱-۱ آثار ابوکامل ٤٤
۳-۱-۲ ترجمه و تفسیرها ٤٦
۳-۲ ثابت بن قره ٤۹
۳-۳ کرجی و مکتب او ۵۲
۳-٤ سموئل و تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای‌ها ۵۹
۳-۵ ابن‌هیثم ٦۱
۳-٦ عمر خیام و اوج ریاضیات اسلامی ٦٦
۳-٦-۱ آثار خیام ٦۸
۳-٦-۲ تقسیم‌بندی و حل معادلات درجه سوم توسط خیام ۷۰
مقایسه کار ریاضیدان اسلامی و جمع‌بندی ۷٦
فهرست منابع ۷۹
واژه‌نامه ۸

مقدمه

صحبت کردن از دستاورد های ریاضیدانان مسلمان آسان نیست، چرا که در بحث از یک ریاضیدان، باید از تمام یافته‌های علمی در زمینه مورد بحث قبل از آن ریاضیدان آگاهی کامل داشته و حتی باید اطلاعات دقیقی از ریاضیدانان معاصر با او داشته باشیم و این هم همیشه امکان‌پذیر نیست. در بعضی مواقع حتی نمی‌توانیم به طور قطع بگوییم یک ریاضیدان اهل کجاست و حتی در تعیین زمان زندگانی او دچار مشکل می‌شویم. حتی با دانستن همه این موارد و با در نظر گرفتن اینکه هیچ یک از متون ریاضی از بین نرفته است، با یک مشکل اساسی دیگری مواجه‌ایم، وآن این است که نمی‌دانیم در شکاف زمانی بین دو ریاضیدان چه کارهای دیگری صورت پذیرفته تا بتوانیم به طور قطع بگوییم ریاضیدان بعدی چه ابداعاتی دارد و یا یک ابداع صرفاً به نام کسی ثبت شده یا خودش به واقع یک مبتکر بوده است. در تاریخ ریاضیات شاهدیم که بعضی از کتاب‌ها به نام حاکمان آن زمان ثبت شده است و این خود مشکل دیگری است. البته سعی ما بر این بوده که تا حد امکان از منابع معتبر و جدیدی که اخیراً روی آن‌ها کار شده، استفاده کنیم .

با توجه به گستردگی تاریخ ریاضیات و اهمیت آن در امر آموزش ریاضی، در این پایان‌نامه سعی کردیم که در بازه زمانی قرن دوم تا قرن چهارم هجری دستاوردهای مهم مسلمانان در حوزه جبر و جزئیات کار این ریاضیدانان، مخصوصاً خوارزمی را، بررسی دقیق‌تری کرده و تا حد امکان کارها را با کارهای آنها ریاضی‌دانان هم عصردر سایر تمدن‌ها مقایسه کنیم، تا اهمیت دستاورد های مسلمانان در زمینه جبر روشن تر شود.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است: در فصل اول به تاریخ جبر قبل از دوران طلایی تمدن اسلام و سایر تمدن های قبل آن پرداخته شده است. در این فصل از منابع مختلف و معتبر موجود که از ریاضیدانان این تمدن ها به دست ما رسیده است استفاده شده و مختصری از فعالیت های صورت گرفته توسط آن ها بیان شده است. در فصل دوم، که عمده کار در این فصل صورت پذیرفته، از دو منبع عربی مصطفی مشرفه و لاتین فردریک روزن استفاده شده تا کار های خوارزمی را از دو دیدگاه جبری و هندسی مورد بررسی دقیق تری قرار دهیم، در فصل پایانی، که دستاورد های سایر دانشمندان مسلمان مورد مطالعه قرار گرفته است، بیشتر از کتاب جبر خیام و ابوکامل استفاده شده و تحلیل هایی روی آن ها صورت گرفته است، البته لازم به ذکر است که تا حد امکان کلیه مطالب به زبان ریاضیات کنونی نوشته شده است، تا استفاده از این مطالب برای کسانی که علاقمند به مطالعه در این زمینه از تاریخ ریاضیات هستند آسان شود.

در تاریخ ریاضیات شاهد هستیم که تا قرن نوزدهم علم جبر عمدتاً به دانش حل معادلات و عملیات بر روی چندجمله‌ای‌ها محدود بوده، که از این علم در دوره اسلامی به دانش جبر و مقابله تعبیر می‌شد، اما در قرن نوزدهم مفهوم کاملاً جدیدی از جبر به وجود آمد که موضوع آن بیشتر در زمینه ساختارهای جبری از جمله گروه، حلقه، میدان، است.

در صورت ارجاع به منبعی ابتدا نام نویسنده منبع را، که در آخر این پایان‌نامه ذکر شده است، می‌آوریم سپس تاریخ چاپ اثر و شماره صفحه کتابی که ذکر شده است،آورده می شود.

فـصل ا و ل

پیشینه علم جبر در تمدن اسلامی و تمدن‌های قبل از آن

ما ابتدا به بحث پیرامون علم جبر و کارهای انجام‌شده توسط ریاضی‌دانان سایر تمدن‌های قبل از اسـلام (مصـر، بین‌النهرین، یونان، هند، و چین که صاحب دستاوردهایی در این زمینه هستند) مـی‌پـردازیم و پـس از ذکـر نـام بزرگ‌ترین دانشمندانی که در زمینه جبر صاحب آثاری بوده و توانسته‌اند بر تاریخ ریاضیات در این زمینه تـأثیر بگذارند، دستاوردهای آن‌ها را در حوزه علم جبر بررسی کرده و مختصری از مهم‌ترین کـارهـای آنـان را بیـان کرده، تا اهمیت کار ریاضیدانان مسلمان و نوآوری‌های آنان در زمینه جبر مشخص شود.

۱-۱ مصر باستان

جبر مصر باستان فقط در حل تعدادی مسئله عددی خلاصه می‌شود که بسیاری از آن‌ها ساده بودنـد. مصـریان حتی عمل ضرب دو عدد را به شکل جمعی آن یعنی چند برابر کردن عدد به کار می‌بردند و منابعی که از آن‌هـا بـه دسـت مـا رسـیده تعـدادی پـاپیروس اسـت کـه معـروف‌تـرین آن‌هـا پـاپیروس رینـد[1] نـام دارد (Tabak, 2002, 10) که شامل تعدادی مسئله عددی است و فعلا در موزه بریتانیا اسـت. (مصـاحب، ۱۳۳۹: ۷۹)

به گفته هاوارد ریاضیات مصریان هرگز به سطح ریاضیات بابلی ها نرسـید. (Haward,1983: 44) آن هـا در حساب هم کاملاً ابتدایی بودند. برای مثال در پاپیروس رینـد آحمس[2] داریم اگر یک چیزی را بـا ۱/۷ همـان چیز جمع کنیم برابر ۱۹ می‌شود آن مقدار برابر چند است، که منجر به حل معادله $x + \frac{1}{7}x = 19$ مـی‌شـود. (Boyer,1991: 17) همچنین آن‌ها توانسته بودند به نسبت طلایی دست یابند که این نسبت با مقـداری کـه

[1] Rhind
[2] Ahmes

یونانی‌ها به دست آورده بودند برابر است. (Rossi, 2003: 24,25) عدد π نیز برای مصریان باستان ناشناخته نبود و آن‌ها مقدار $3\frac{1}{6}$ را برای آن در نظر می‌گرفتند.

۱-۲ بابل

بابلی‌ها حل دستگاه معادلات خطی با دو یا بیشتر از دو مجهول را می‌دانستند (Neugebauer,1969: 9) و آن‌ها را بدون کمک گرفتن از نمادهای ریاضی شبیه مثال زیر حل می‌کردند.

$$\begin{cases} 4x + y = 28 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

نماد امروزی	بابلی‌ها
$3x = 18$	$7 \times 4 = 28$
$x = 6$	$1\,8 = 10 - 28$
$y = 10 - 6 = 4$	$18 \times \frac{1}{3} = 6$
	$10 - 6 = 4$

بابلی‌ها مراحل روش امروزی را برای حل این‌گونه از معادلات طی می‌کردند، ولی فقط با محاسباتی که فاقد یک روشی کلی است. درواقع، در روش بابلی‌ها و برهمگوپتا[3] جواب واضح و دقیقی داده می‌شد، اما اساس آن مشخص نبود آن‌ها توانسته بودند دامنه وسیعی از معادلات را حل کنند هرچند آن‌ها هزاران سال برای حل معادلات وقت صرف کردند ولی آن‌ها روشی کلی برای حل معادلات با درجه بزرگ‌تر از یک به دست نیاوردند. کار بابلی‌ها در جبر خیلی ابتدایی بود و آن‌ها نتوانستند جبر را توسعه دهند و برای همین منظور جبر آن‌ها، جبری مقدماتی یا جبر حسابی و یا جبر عددی است. آن‌ها به حل معادلات نامعین نیز پرداخته بودند که یکی از معروف‌ترین این معادلات حل عددی معادله نامعین $a^2 + b^2 = c^2$ بود..(Tabak, 2002: 7)

مقداری که بابلی‌ها برای عدد π می‌گرفتند با مصریان متفاوت بود و آن‌ها $3\frac{1}{8}$ را برای این عدد در نظر می‌گرفتند. (Neugebaur,1969: 11)

بابلی‌ها ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد با حل دستگاه $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$ آشنا بودند که معادل حل معادله

[3] Brahmagupta

$x^2 + px = q$ است، که در آن x و y دو عدد متمایز هستند. البته، در حل این معادلات از نماد مشخصی استفاده نمی‌کردند و این معادلات فقط برای اعداد خاصی کاربردی بودند. (Stillwell,1989:51)

مثال: اگر مجموع دو عدد ١٤ و حاصل‌ضرب آن‌ها ٤٥ شود آن دو عدد کدامند؟

$\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 45 \end{cases}$ اگر جواب این مسئله را با نماد امروزی آن نشان دهیم جواب مسئله معادل حل دستگاه است با تغییر متغیر $x = 7 + a\,, y = 7 - a$ داریم:

$$(7\text{-a})(7 + \text{a}) = 45 \quad \rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \rightarrow a = 2$$

در نتیجه $x = 9\ ,\ y = 5$ می باشد.

مثال : معادله $x^2 + 6x = 16$ را به روش بابلی ها حل می کنیم:

$$x^2 + 6x = 16$$
$$x\,(x + 6) = 16$$
$$x + 6 = y \rightarrow y - x = 6 \rightarrow xy = 16$$
$$y = a + 3\,, x = a - 3 \rightarrow (a + 3)(a - 3) = 16$$
$$a^2 - 9 = 16 \quad \rightarrow \quad a = 5 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

و اگر ضریب x^2 عددی مخالف صفر مثلاً a بود معادله را در a ضرب کرده و با تغییر متغیر $\text{z} = \text{ax}$ معادله را برحسب متغیر z در می‌آوردند و با روشی که در بالا بدان اشاره شد معادله قابل حل می‌شد. (Burton, 2006: 67, Bashmakova, 2000: 4)

در حدود ٤٠٠٠ سال پیش روش کلی‌تری از حل معادلات درجه دوم توسط بابلی‌ها دیده می‌شود. بابلی‌ها با روش حل معادلات درجه دوم به روش مربع کردن آشنا بودند و احتمالاً همه معادلات را به سه شکل:

$$\begin{cases} x^2 + px = q \\ x^2 = px + q \\ x^2 + q = px \end{cases}$$

حل می‌کردند (Boyer,1991: 31,33, Burton, 2006: 71,Tabak,2002: 6) و حتی معادلاتی از درجه سوم و حالت خاصی از درجه‌های چهارم و هشتم که به شکل

$$ax^4 + bx^2 = c$$
$$ax^8 + bx^4 = c$$

بودند را به روش جایگذاری اعداد و تبدیل آن‌ها به فرم معادلات درجه دوم حل کرده بودند.
(Boyer, 1991: 33 − 34)

بـابلی‌هـا بـا رابطـه $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$ آشـنا بـوده و در حـل مسـائل از آن کمـک مـی‌گرفتنـد (Boyer,1991: 32) همچنین آن‌ها برای محاسبه رابطه $n^2 + n^3 = a$ جدول‌هایی را تنظیم کرده بودند و از آن بهره می‌جستند(Boyer,1991: 18) .

آن‌ها با قاعده ضرب علامت‌ها آشنا بوده و آن‌ها را به کار می‌بردند و عبارت‌های دوجمله‌ای نظیر:

$$(a-b)(c-b) = ac-ab-bc + b^2$$

را به راحتی ضرب می‌کردند.(Bashmakova, 2000: 5)

بابلی ها احتمالا با فرمولهایی نظیر:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(h^2 + x)^{1/2} \cong h + \frac{x}{2h}$$ آشنا بوده و تقریب

را می‌دانستند.(Neugebauer, 1969: 8, Daln, 2002: 34, Burton, 2006: 83). به طور کلی بابلی‌ها در جبر قوی‌تر از هندسه و در زمینه کارهای محاسباتی نیز توانمند بودند.

۱-۳ کار عمده بابلی‌ها در جبر

ـ بابلی‌ها از هیچ نماد جبری استفاده نمی‌کردند و همه مسائل را به صورت شفاهی حل می‌کردند که گاهی به آن

جبرلفظی[4] نیز اطلاق می‌شود.(Haward,1983: 86.)

ـ حل مسائل منجر به معادلاتی با ضرایب عددی دلخواه می‌شدند ولی برای معادلات کلی $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن a , b , c پارامترهایی دلخواه باشند راه‌حلی وجود نداشت. (Tabak,2002: 13)

ـبابلی ها هیچ اثباتی برای جواب‌های به دست آمده نداشتند، اما آن‌ها مثال‌های زیادی را برای انواع مختلف مسائل آورده بودند که نمایان‌گر شیوه کار آن‌ها در حل مسائل ریاضیاتی در آن زمان بود.(Tabak, 2002: 7)

ـ مسائل انتخاب شده جواب‌های گویا داشتند و برای معادله درجه دوم فقط یک جواب ارائه می‌شد و اعداد منفی،گنگ، و صفر معنی نداشتند.(Boyer, 1991: 33)

ـ مسائل اغلب عبارت‌هایی به زبان هندسه بود ولی خودشان غیر هندسی بودند و هیچ کاربرد خاصی نداشتند و احتمالاً آن‌ها را برای آموزش دانش‌آموزان به کار می‌گرفتند.(Boyer, 1991: 33)

۱-٤ یونان باستان

ریاضیات یونانی اساساً متفاوت از ریاضیات بابلی‌ها و چینی‌هاست. ریاضیات یونان به ظاهر با تالس میلتوسی[5] آغاز شده است؛ معادلاتی که آن‌ها حل می‌کردند بسیار مشکل‌تر از ریاضیات بابلی‌ها و چینی‌ها بود. یونانی‌ها بر خلاف سایر تمدن‌ها ریاضیات را برای حل مسائل مالیاتی یا تقسیم املاک و غذا و یا نقشه‌برداری استفاده نمی‌کردند. آن‌ها به ریاضیات به خاطر خود ریاضیات علاقمند بودند و افکارشان را با اعداد، نقاط، صفحه، منحنی، اجسام هندسی، و غیره بیان می‌کردند و ریاضیات آن‌ها، ریاضیات محض بود یونانی‌ها معادلات سیاله خطی را حل می‌کردند و با حل دستگاه‌های چندمعادله و چندمجهولی آشنا بودند ولی تقریباً از آن‌ها چیزی در زمینه جبر به دست ما نرسیده است. آن‌ها در زمینه هندسه بسیار قوی‌تر از جبر بودند و معادلات درجه دوم را به کمک روش های هندسی حل می‌کردند و این می‌توانست زمینه‌ای برای شکل‌گیری هندسه جبری باشد بدون شک مشهورترین ریاضیدان یونانی که آثاری از او در زمینه جبر به جا مانده دیوفانتوس[6] اسکندرانی است برجسته‌ترین کار او خلاصه‌نویسی در جبر است که با این کارش تأثیر زیادی در این زمینه از ریاضیات گذاشته است معروف‌ترین اثر وی در جبر آریثمتیکا[7] نام دارد که به واسطه آن گام بزرگی در جهت پیشبرد جبر گذاشت

[4] Rhetorical algebra
[5] Thales Miletus
[6] Diophantus
[7] Arithmetica

که شامل ۱۵۰ مسئله جبری است که هر مسئله با تدابیر هوشمندانه و تکنیک‌های مبتکرانه‌ای حل شده است. شاید دیوفانتوس از بزرگترین ریاضی‌دانانی باشد که خودش را کاملاً وقف ریاضیات کرد و رشته جبر را مجزا از هندسه مطالعه کرد.

کمیت‌ها در یونان باستان به دو دسته تقسیم بندی می‌شدند دسته اول: اعداد طبیعی (اعداد گویا نیز به صورت نسبت‌هایی بین همین اعداد طبیعی تعریف می‌شدند) و دسته دوم: کمیت‌های هندسی مانند طول سطح وحجم وغیره بودند. یونانی ها در حالت کلی با مفهوم اعداد حقیقی آشنا نبوده و اعداد گنگ را به صوت پاره‌خط‌هایی نمایش می‌دادند (معصومی همدانی، ۵۷۸) آن ها با مفهوم اعداد منفی آشنا نبودند و دیوفانتوس جواب $x = -4$ را برای معادله $4x + 20 = 4$ نامعقول می‌دانست یعنی از مفهوم انتزاعی عدد منفی بی‌خبر بود البته بعد از رنسانس علمی در اروپا است که عدد منفی معنی پیدا می‌کند. (مصاحب، ۱۳۳۹: ۱۱۱و ۱۱۲).

۱-۵ کارهای عمده دیوفانتوس در جبر

ـ ارائه دو قاعده کلی برای کار با عبارت‌های جبری

الف) حذف جملات یکسان از دو طرف معادله

ب) انتقال جملات از یک سمت معادله به سمت دیگر آن

– معرفی توان‌های منفی برای یک مقدار مجهول x و بیان قوانین صریح برای توان‌ها (Bashmakova, 2000: 38)

$-6 \leq m, n, m + n \leq 6$ برای $x^n x^m = x^{n+m}$

ـ او عملیات با ضرب جملات با ضرایب منفی را انجام می‌داد (Bashmakova,2000: 38) برای مثال:

$(-a)(-b) = ab$

- بیان اثبات های هندسی از معادلاتی که به روش جبری حل می شدند.

حل معادلاتی از درجه سه که قابل تبدیل به یک معادله از درجه دوم بود که در آریثمتیکا، (مهم‌ترین کتاب جبر دیوفانتوس) فقط معادله درجه سوم آن هم از نوع خاص زیر است که به این شکل حل شده است:

$x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$

$x^3 + x = 4x^2 + 4$

$x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1) \rightarrow x = 4$

ـ نماد گذاری $\mathrm{K}^{\mathrm{Y}}\mathrm{K}$، $\Delta\mathrm{K}^{\mathrm{Y}}\Delta$، $\Delta^{\mathrm{Y}}\Delta$، K^{Y}، Δ^{Y}و $\mathfrak{z}$ که به ترتیب برای عبارتهای x^6 و x^5و x^4و x^3و x^2و x که او این نمادها را برای مختصرنویسی در جبر برای توان‌های کمتر از شش استفاده می‌کرد و با این کارش جبر لفظی را به جبر تلخیصی[۸] تبدیل کرد. (Heath, 1910: 38)

– حل معادلات درجه دوم و ارائه جواب‌های طبیعی و گویای مثبت برای آن‌ها. (Ibid:60)

– ارائه روش‌های مختلف و استفاده از تغییر متغیرها و معادلات کمکی برای حل ۵۰ مسئله متفاوت.

– محدود کردن جواب‌ها و ارائه جواب‌های تقریبی برای آنها، که او در این روش دچار اشتباهاتی نیز می‌شد.

۱-٦ هند

هندیان مجموع تصاعدهای حسابی و هندسی را یافته بودند (Clark, 1930: 36) و مانند دیوفانتوس جبر را تلخیص کرده و اعداد گنگ و منفی را می‌شناختند و توانسته بودند، تمام جواب‌های صحیح معادله سیاله خطی $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$ را به دست آورند. (Burton, 2006: 227)

نظر کلی بر این است که منابع اولیه علوم جبر از هند آغاز شده باشد. در اینجا کار دو ریاضیدان بزرگ هند را، که تأثیر زیادی روی ریاضیات اسلامی داشته‌اند، بررسی خواهیم کرد.

۱-٦-۱ برهمگوپتا

یکی از بزرگ‌ترین ریاضیدانان هندی برهمگوپتا است که در قرن هفتم میلادی می‌زیسته و یکی از بارزترین مشخصه‌های اثر وی، استفاده از سبک نمادگذاری جبری است شبیه کاری که دیوفانتوس انجام داد با این تفاوت که او برای نشان دادن اعداد منفی یک نقطه روی آن عدد می‌گذاشت و برای نشان دادن متغیرهای معادله از رنگ‌های مختلف استفاده می‌کرد، شبیه همان کاری که امروزه برای مشخص کردن متغیرها از حروف $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ استفاده می‌کنیم حتی او یکی از بخش‌های کتابش را معادلات با چندین رنگ نامیده است (Tabak, 2002: 40) نمادگذاری او در ریاضیات اهمیت دارد، زیرا نمادگذاری باعث می‌شود که مطالب خلاصه‌شده و پذیرش ایده‌های ریاضیات آسان‌تر شود همچنین راه رابرای پذیرش فرمول‌های کلی، برای

[8] Syncopated algebra

رسیدن به راه‌حل‌های آسان هموارتر کند. مانند ارائه فرمول کلی معادله خطی $ax + by = c$ که در آن a , b , c اعداد دلخواهی هستند یعنی ضرایب می‌توانند مثبت، منفی، و یا صفر باشند. حتی او ضرایب گنگ را مانند ضرایب گویا می‌پذیرفت ضرایبی که دیوفانتوس فقط برای اعداد مثبت به کار برد. (Tabak, 2002: 41)

توسعه دستگاه اعداد وتحدیدهایی مناسب، که برای حل مسائل به کار برد، بهترین مشخصه ریاضیات هندی است او همچنین مانند دیوفانتوس به حل معادلات نامعین علاقمند بود و سعی کرد تمام جواب‌های ممکن را با تحدیدهای مناسب به دست آورد.

۱-٦-۲ مهاویرا[9]

مهاویرا یکی از ریاضیدانان بزرگ هند در قرن نهم میلادی است که ریاضیات او الهام گرفته از برهمگوپتا است اثر او اولین کتاب هندی است که به ریاضیات محض در قرن نهم میلادی پرداخته است، از این کتاب گاهی به عنوان *کتاب شرح برهمگوپته* یاد می‌شود ولی کتاب مهاویرا محتوایی بیشتر از کتاب برهمگوپتا دارد در کتاب *مهاویرا* تلاشی جدی برای خلاصه کردن، آموزش و ارتقای دانش ریاضیات شده است. در مورد این کتاب دیدگاه‌های مختلفی وجود دارد. مثلاً یک دیدگاه کلی بر این باور است که، اثر*مهاویرا* کتاب پرمحتوایی است که شامل قوانین و مثال‌هایی است که در آن قوانین بدون اثبات هستند (Tabak, 2002: 41).

او همچنین به اتحادهای جبری علاقمند بود و از آن‌ها برای حل مسائل استفاده می‌کرد. مانند اتحاد:

$$a^3 = \mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b}) + \mathrm{b}^2(\mathrm{a}-\mathrm{b}) + \mathrm{b}^3$$

مسائل جبری درکتاب *مهاویرا* به دو دسته تقسیم می‌شدند: دسته اول ترکیبیات، که او به مطالعه در این زمینه، که امروزه علم مستقل از جبر است، پرداخته بود و به فرمول بسیار مهمی که امروزه استفاده گسترده‌ای دارد رسید که انتخاب r شی از n شی را نشان می‌دهد:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{\mathrm{r}(\mathrm{r}-1)(\mathrm{r}-2)\dots(2)(1)}$$

[9] Mahavira