بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

عملگرهای مسلط بر عملگرهای نرمال

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

مولف

فتح الله شمس الدین نژاد

استاد راهنما

خانم دکتر ثریا طالبی

سال و ماه انتشار

خرداد ۸۴

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

عملگرهای مسلط بر عملگرهای نرمال

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

مولف

فتح الله شمس الدین نژاد

استاد راهنما

خانم دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور

آقای دکتر جلیلیان

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

تاریخ: ....
شماره: ....
پیوست: ....

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: عملگرهای مسلط بر عملگرهای نرمال و تعیین زیرفضاهای پایای این عملگرها

که توسط آقای فتح الله شمس الدین نژاد **تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۵/۴/۸۴ **نمره:** شانزده و نیم ۱۶/۵ **درجه ارزشیابی:** خوب

اعضای هیئت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر [illegible] طاهر	استاد راهنما	استادیار	
دکتر علی جبلی عطار	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
خانم دکتر عقیله حیدری	استاد ممتحن	استادیار	
خانم دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تقدیم به

آلاله های بخون خفته حسن، فلکناز، مهدی، موسی و محسن

و برادر جانبازم:

علی

پیشگفتار

بی نهایت خرسندم که د رجوار بارگاه ملکوتی ثامن الحجج (ع) و با توکل به ذات اقدس الهی در فضایی آکنده از اخلاص و معنویت که به قیمت ریخته شدن خون صدها هزار شهید و ایثارگری رزمندگان به دست آمده است پروردگار عزیز فرصتی داد تا توانستم مرحله دیگری از فراگیری علم و دانش اندوزی را به پایان برسانم، بی گمان لطف و عنایت خاص او همیشه همه جا شامل حالم بوده و خواهد بود.

در این مرحله، به یقین راهنماییها و تجارب ارزنده استاد راهنما سرکار خانم دکتر ثریا طالبی بیش از حد موثر و مفید واقع شده لازم است از مساعدت و همکاری صمیمانه ایشان تشکر و قدردانی کنم که با صعه صدر و گشاده رویی تحسین برانگیزی، ما را در این امر یاری فرمودند انشاالله در همه امور موفق و سرافزار باشند.

همچنین از جناب آقای دکتر جلیلیان استاد مشاور محترم نیز تشکر و قدردانی می کنیم که با راهنماییهای مفیدشان کمک زیادی نمودند.

چکیده مقاله :

فرض کنید T یک عملگر بر روی فضای هیلبرت باشد (ما عملگر را یک عملگر خطی کراندار تعریف می کنیم).

ما می گوئیم که T بر عملگر N مسلط است اگر عملگر غیر صفر L وجود داشته باشد به طوریکه $LT=NL$ رابطه (۱).

می گوییم که T مسلط بر عملگر نرمال است اگر یک عملگر مسلط نرمال N وجود داشته باشد به طوریکه رابطه (۱) برقرار باشد.

عملگر مسلط T تحت فرضیات زیر برقرار است:

(A_1) L هسته غیر بدیهی نداشته باشد.

(A_2) L دارای برد چگال باشد .

(A_3) L دوری باشد.

زیر فضا را زیر فضای غیر صفر ، بسته و محض تعریف می کنیم. اگر عملگر L در (۱) هسته غیر بدیهی داشته باشد ، این خود به خود یک زیر فضای ثابتی از T است اما فرض می کنیم که L هسته نداشته باشد ودر بهترین حالتی T دوری است بستار برد L یعنی ℓ یک زیر فضای ثابتی از N است ، اگر T دوری و بر عملگر N مسلط باشد آنگاه نشان می دهیم که بنا به [۲] یک عملگر $\hat{T}$ وجود دارد به طوریکه T با تحدید عملگر به $\check{T} \oplus N$ به زیر فضای ثابت M هم ارز یکانی است : برعکس برای هر عملگر $\check{T}$ وهر

زیر فضای ثابت M، تحدید $\check{T} \oplus N$ به M عملگری است که بر N مسلط است. ما این نوع عملگرها را مطالعه می کنیم .در بخش دوم ما شرح کاملی از شبکه $\check{T} \oplus N$ که N یک عملگر نرمال کاهنده است را می آوریم .

و نشان می دهیم که عملگر S متغیر یک جانبه باشد آنگاه T دارای زیر فضای ثابت است .در بخش سوم نتایج زیر فضای ثابت را به حالت $\hat{T} = S^{*(n)}$ گسترش می دهیم که n یک عدد صحیح مثبت است . در بخش چهارم نمونه هایی از عملگری که بر عملگری که ضرب می شود به وسیله x بر روی $[0,1]$ مسلط اند می آوریم و نشان می دهیم که سه دسته بندی مختلف از زیر فضاهای ثابت می تواند اتفاق بیفتد .

در بخش پنجم نتایج گوناگون را ذکر می کنیم . البته در بخش اول نشان می دهیم که حتی اگر ℓ، بستار برد L یک زیر فضای کاهشی برای N نباشد باز هم T دارای زیر فضای ثابت است .

عملگر های مسلط

بر عملگر های نرمال

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

تعاریف و مفاهیمی که در این پایان نامه به آن نیاز داریم در این فصل آورده شده است.

تعریف ۱-۱- تعریف زیرفضای ثابت:

اگر T یک عملگر باشد در این صورت زیرفضای M از فضای باناخ X برای عملگر T ثابت است اگر $x \in M$ آنگاه $Tx \in M$ یا $AM \subseteq M$. به عبارت دیگر T زیرفضای M را ثابت نگه دارد.

منظور از زیرفضا، زیرفضای غیرصفر و محض و بسته است.

تعریف ۱-۲- M یک زیرفضای کاهشی برای A است اگر M تحت A ثابت و همچنین $M^{\perp}$ نیز تحت A ثابت باشد. به عبارت دیگر $AM \subseteq M$ و $AM^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.

تعریف ۱-۳-عملگر نرمال عملگری است مانند P بطوری که $PP^{*} = P^{*}P$

تعریف ۱-۴- یک عملگر نرمال بر روی فضای هیلبرت زیر نرمال است اگر تحدید یک عملگر نرمال بر زیرفضای ثابت باشد.

تعریف ۱-۵- فضای برداری مختلط H را فضای ضرب داخلی می گوییم اگر برای هر $x, y, z \in H$ شرایط زیر برقرار باشد

الف) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

ب) $(x + \alpha y, z) = (x, z) + \alpha(y, z) \quad \forall \alpha \in C$

ج) $(x, x) \geq 0$

د) $x = 0$ اگر وفقط اگر $(x, x) = 0$

هر فضای ضرب داخلی را با نرم $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ می توان نرم دار نمود ٠

به هر فضای نرمدار کامل که نرم آن با استفاده از یک ضرب داخلی بدست آید فضای هیلبرت

می گوییم.

قضیه ۱-۱-(تامسون): اگر S یک عملگر زیر نرمال در یک فضای هیلبرت H باشد آنگاه

$W \in C$ وجود دارد. به طوریکه $(S-W)H$ یک زیرفضای بسته محض از H است که برای هر

عملگری جابجا می شود.[۱۲]

تعریف ۱-۶- دو عملگر A و B که $A \in B(H), B \in B(K)$ را هم ارز یکانی می گوئیم در

صورتی که یک عملگر یکانی $U: H \to K$ وجود داشته باشد به طوریکه $UAU^{-1} = B$.

تعریف ۱-۷- اگر $0 < P < \infty$ و $f(z)$ یک تابع تحلیلی روی D (دیسک واحد) باشد. در این

صورت $f \in H^P = H^P(D)$ اگر $\sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int |f(re^{i\theta})|^P d\theta = \|f\|_{H^P}^P < \infty$.

تعریف ۱-۸- H^∞ مجموعه تمام توابعی است که

$\|f_r\|_\infty = \sup_{0 \le r < 1} |f(re^{i\theta})| < \infty$

تعریف ۱-۹- اگر X یک فضای اندازه پذیر دلخواه با اندازه مثبت μ باشد و $0 < P < \infty$ و

f یک تابع مختلط بر X باشد، تعریف می کنیم $\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$ و $L^p(\mu)$ از تمام

f هایی تشکیل شده است که $\|f\|_p < \infty$، $\|f\|_p$ را نرم L^p ی f می نامیم.

و $f \in L^\infty$ است اگر $\|f\|_\infty = \sup_{x \in R^k} |f(x)| < \infty$.

لم ۱-۱- (لم فاتو): هر گاه $f_n : X \to [0,\infty]$ به ازای هر عدد صحیح n اندازه پذیر باشد. آنگاه

.$(\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu) \leq \liminf \int_X f_n d\mu$

قضیه ۱-۲- (قضیه تعمیم همگرایی لبگ): گیریم $\{g_n\}$ یک دنباله از تابعهای انتگرال پذیر است که تقریباً همه جا به تابع انتگرالپذیر g میل می کند و فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنباله از تابعهای اندازه پذیر باشد به گونه ای که $|f_n| < g_n$ و $\{f_n\}$ تقریباً همه جا به f همگرباشد. اگر

$$\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n$$

در این صورت $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

تعریف ۱-۱۰- اگر (X,m,μ) یک فضای اندازه مثبت بسد. مجموعه $\varphi \subset L^1(\mu)$ را به طور یکنواخت انتگرالپذیر گوئیم اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ چنان نظیر باشد به طوریکه $\forall f \in \varphi$ و $\mu(E) < \delta$ که E زیرمجموعه X است. در این صورت $\left|\int_X f d\mu\right| < \varepsilon$.

هر زیر مجموعه متناهی از $L^1(\mu)$ به طور یکنواخت انتگرالپذیر است.

اگر $\mu(X) < \infty$ و $\{f_n\}$ به طور یکنواخت انتگرالپذیر باشد و همچنین وقتی $n \to \infty$ $f_n(x) \to f(x)$ تقریباً همه جا و $|f(x)| < \infty$ تقریباً همه جا آنگاه $f \in L^1$ و $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$ و اگر $\mu(X) < \infty$ و $f_n \in L^1(T)$ و $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ موجود باشد $\{f_n\}$ به f طور یکنواخت همگراست.

تعریف ۱-۱۱- تابع f تعریف شده بر مجموعه $E \in M$ را اندازه پذیر می گوییم اگر $\mu(E^c) = 0$ و $f^{-1}(v) \cap E$ به ازای هر مجموعه باز v اندازه پذیر باشد.

تعریف ۱-۱۲- اگر X یک فضای باناخ باشد $\{\wedge_n\}$ دنبالـه ای از تابعهـای خطـی در X باشـد و $\sup\|\wedge_n\| = M < \infty$ در این صورت زیر دنباله ای مانند $\{\wedge_{ni}\}$ وجود دارد به طوریکه حـد ایـن زیر دنباله موجود است یعنی $\wedge x = \lim \wedge_{ni}(x)$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است.

و به عـلاوه $\wedge$ خطـی اسـت و $\|\wedge\| < M$. در ایـن صـورت مـی گـوئیم $\wedge$ حـد ضـعیف دنبالـه $\{\wedge_{ni}\}$ است.

تعریف ۱-۱۳- توپولوژی عملگر ضعیف یک توپولوژی بر روی B(X) که همان جبر عملگر های خطی که روی فضای هیلبرت می باشد ,تعریف می شود , که این توپولوژی توسط نیم نرمهای $\{P_{g,h} : g,h \in H\}$ که $P_{g,h}(A) = |\langle Ag,h\rangle|$ که $A \in B(X) \,\&\, g,h \in X$ تولید می شود.

یک دنباله A_i در B(X) تحت توپولوژی عملگر ضعیف همگرا به صفر می باشد, اگر و فقط اگر

$\langle A_i g,h\rangle \to 0 \quad \forall g,h \in X$

تعریف ۱-۱۴-اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی با دو گان X^* باشد برای هر $x \in X$ تابعک خطی f_x را بصورت $f_x\Lambda = \Lambda x$ بر روی X^* تعریف میکنیم, f_x ها نقاط X^* را جدا می کند, توپولوژی تعریف شده توسط f_x ها یک توپولوژی ضعیف برای X^* است.

توپولوژی ضعیف-* اغلب توپولوژی σ-ضعیف گفته می شود.

نکته مهم این است که اگر یک مجموعه در توپولوژی عملگر ضعیف بسته باشد آنگاه در توپولوژی ضعیف-* نیز بسته است. اما عکس آن درست نیست.

تعریف ۱-۱۵-اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد, و X^* فضای دوگان X ,نقاط X را جدا کند, ضعیف ترین توپولوژی روی X که تابعک های خطی $\Lambda \in X^*$ را پیوسته می کند توپولوژی ضعیف روی X می گوییم.

یک دنباله $\{x_i\}$ در Xبه x_0 نسبت به توپولوژی ضعیف همگرا است اگر و فقط اگر

$$\langle x_i, x^* \rangle \to \langle x_0, x^* \rangle \quad \forall x^* \in X^*$$

از طرفی توپولوژی ضعیف به وسیلهٔ

$$P_{x^*}^{(x)} = \left| \langle x, x^* \rangle \right|$$

تعیین می شود اما توپولوژی ضعیف-* به وسیله $P_x^{(x^*)} = \left| \langle x, x^* \rangle \right|$ تعیین می شود.

تعریف ۱-۱۶-: (شرط کشی – تحلیلی): دسته ای از توابع مشتق پذیر نامتناهی بر روی $T = [0,2\pi]$ کشی تحلیلی است: اگر همه مشتقات این توابع در یک نقطه صفر شود آنگاه این توابع صفرند.

قضیه ۱-۳- قضیه (Denjoy-Carleman): فرض کنید $\{M_n\}$ دنباله افزایشی اکید و محدب لگاریتم باشد. آنگاه $C^{\#}(M_n)$ کشی تحلیلی است $C^{\#}(M_n)$ یعنی دسته ای از توابع مشتق پذیر نامتناهی f روی T به طوریکه رابطه $\|f^{(n)}\| \le R^n M_n$ برای یک R حقیقی به ازای آنها درست است. منظور از اینکه دنباله $\{C_n\}$ محدب لگاریتم باشد یعنی $\log C_n$ محدب باشد.

قضیه ۱-۴- (Fuglede-Putnam): اگر M و N دو عملگر نرمال در $B(H)$ باشند و

$B:H \to H$ عملگری باشد به طوریکه $NB=BM$ در این صورت داریم:

$N^*B=BM^*$

قضیه ۱-۵- اگر A_1 و A_2 دو عملگر در $B(H_1)$ و $B(H_2)$ باشند و عملگرهای

$X_{12}:H_2 \to H_1$ و $X_{21}:H_1 \to H_2$ طوری تعریف شوند که $X_{21}A_1=A_2X_{12}$

و $X_{12}A_2=A_1X_{21}$ می گوییم A_1 و A_2 عملگرهای کشی – مشابه اند.

تعریف ۱-۱۷- فرض کنید N_1 و N_2 دو عملگر نرمال بر روی H_1 و H_2 باشند. اگر

$X:H_1 \to H_2$ عملگری باشد به طوریکه $XN_1=N_2X$، آنگاه : ۱) ker X زیرفضای کاهشی

برای N_1 است. ۲) CL(ran X) (بستار برد عملگر X)زیرفضای ثابتی برای N_2 است.

قضیه ۱-۶- هر عملگر نرمال بر روی فضای هیلبرت با بعد کمتر از ۲ دارای زیرفضای ثابت

غیرصفر است.

تعریف ۱-۱۸- اگر A_1 و A_2 دو عملگر بر روی فضا های H_1و H_2 باشد آنگاه A_1 با عملگر

A_2 مشابه است $(A_1 \approx A_2)$اگر یک عملگر معکوس $X:H_1 \to H_2$ وجود داشته باشد به

طوریکه $XA_1=A_2X$.

کشی مشابه و مشابه روابط هم ارزی اند. اگر دو عملگر نرمال کشی مشابه باشند در این صورت

آن دو هم ارز یکانی اند.

تعریف ۱-۱۹- حاصل جمع مستقیم دو عملگر، اگر A و B دو عملگر باشند در این صورت

حاصل جمع مستقیم دو عملگر به صورت $A\oplus B=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ است.

تعریف ۱-۲۰- اگر A یک عملگر باشد در این صورت e یک بردار دوری است در صورتی که H کوچکترین زیرفضای ثابتی باشد که شامل e است لازم به یادآوری است که A یک عملگر از H به H است. عملگر A دوری است اگر یک بردار دوری داشته باشد. به عبارت دیگر A یک بردار دوری e دارد اگر $H=CL\{P(A)e_0\}$ که P چند جمله ای است.

قضیه ۱-۷- اگر N یک عملگر نرمال باشد یک اندازه E روی یک زیرمجموعه بورل از $\sigma(N)$ (اسپکتروم N) وجود دارد به طوریکه

$$N=\int ZdE(Z)$$

E یک اندازه طیفی اسکالر است.

تعریف ۱-۲۱- اگر μ یک اندازه بورل منظم بر روی C با Support (پوسته) فشرده K باشد N_μ بر $L^2(\mu)$ را به صورت $N_\mu(f)=zf$ برای هر $f\in L^2(\mu)$ تعریف می کنیم. براحتی می توان ثابت کرد که $N_\mu^*(f)=\bar{z}f$. از این رو عملگر N_μ نرمال است

تعریف ۱-۲۲- اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی روی D باشد در این صورت تعریف می کنیم :

$$\log^+|f(z)|=\max(\log|f(z)|,0)$$

تعریف ۱-۲۳- : یک تابع تحلیلی $f(z)$ بر روی D از رده نوانلینا (Nevanlinna) $(f\in N)$ است اگر $\sup_r \int \log^+|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$

تعریف ۱-۲۴- اگر μ یک اندازه روی X و ν یک اندازه مثبت بـر روی X باشـد, μ پیوسـته مطلق نسبت به νاست ($\mu \le \nu$)اگر $\nu(\Delta)=0$ در آنگاه $\mu(\Delta)=0$ که Δ یک زیر مجموعه از X است.

تعریف ۱-۲۵- دسته همه زیرفضاهای ثابت T را LatT تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۲۶- یک تابع درونی تابعی است مانند $M \in H^{\infty}$ در صـورتی کـه تـساوی $|M^{*}|=1$ تقریباً همه جا در هر نقطه T برقرار باشدM^{*} حدود شعاعی M می باشد یعنی:

$$M^{*}(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1}M(re^{i\theta})$$

تعریف ۱-۲۷- هر گاه φ یک تابع اندازه پذیر مثبت برT باشد به طوریکه $\log\varphi \in L^{1}(T)$ و به ازای $z \in U$

$$Q(z)=C\ \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log(\varphi(e^{it}))dt\right\}$$

در این صورت $Q(z)$را تابع برونی تعریف می کنیم که c ثابت و $|C|=1$

تعریف ۱-۲۸- اگر $f \in H^{p}$ و $f \neq 0$ و $Q_f(z)$یک تابع برونی باشد در این صورت یک تـابع داخلی مانند M_f وجود دارد به طوریکه $f=M_f Q_f$

توابع M_fو Q_fرا به ترتیب عوامل داخلی و خارجی (درونی و بیرونـی) تعریـف میکنـیم. Q_f فقط مقادیر مرزی را اختیار می کند.

تعریف ۱-۲۹- تعریف حاصلضرب بلاشکه : هر گاه $\{a_n\}$ دنباله ای در U (گوی واحد) باشد بـه

طوریکه $a_n \neq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$ و k یک عدد صحیح نامنفی باشد

$$B(z)=z^K \bigcap_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\frac{|a_n|}{a_n} \qquad (\forall z \in U)$$

آنگاه $B \in H^{\infty}$ و B صفری جز نقاط a_n ندارد، تابع B را یک حاصلضرب بلاشکه می نامیم.

تعریف ۱-۳۰- یک فضا شبه متریک نامیده می شود, هر گاه ρ تعریف شده بر این فضا همه شرطهای متریک را برآورد کند بجز این که $\rho(x,y)=0$ لزوماً $x=y$ را ایجاب نکند.

تعریف ۱-۳۱- ρ یک متریک شبه هذلولی تعریف می شود اگر

$$\rho(\lambda,\mu)=\frac{\lambda-\mu}{1-\bar{\lambda}\mu}$$

قضیه ۱-۸- قضیه بورلینگ – هلسن:اگر E یک زیرفضایی از L^2 باشد و عملگر φ روی E تعریف شود آنگاه دو حالت روی می دهد:

۱) $\varphi E = E$ این در حالتی است که مجموعه اندازه پذیر e در T وجود داشته باشد به طوریکه $E=\chi_e L^2$ که χ_e تابع مشخصه روی مجموعه e است.

۲) $\varphi E \neq E$ در این حالت یک تابع اندازه پذیر U روی T (دایره واحد) با $|U|=1$ وجود دارد که

$$E=UH^2$$

تعریف ۱-۳۲-انتگرال پواسون را بصورت $p_{z_0}(t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,l\frac{1}{t-z_0}$ تعریف می کنیم

تعریف ۱-۳۳- اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد در این صورت

$$\log|f(z_0)| \leq \int \log|f(t)| P_{z_0}(t)$$