بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
گرایش هندسه

شار روی ساختار $Spin(۷)$

استاد راهنما:
مسعود امینی زاده

دانشجو:
حمید ثابت کمال آبادی

بهمن ۱۳۹۳

تشکر و قدردانی

سپاس خدا را که نور شناختش را به قلب ما تابانید و شکرش را بر وجودمان الهام فرمود. دروازه‌ی بی‌پایان دانش به پروردگاریش را بر ما گشود و ما را به وادی پرفیض توحید خالصانه‌اش راهبری نمود.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر مسعود امینی زاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه تحقق نمی‌یافت.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران عشق و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسشان را .

هم چنین از همه‌ی دوستان خوبم و هم‌کلاسی‌های عزیزم، کمال تشکر را دارم.

حمید ثابت کمال آبادی

چکیده

در این پژوهش شار روی ساختار $Spin(7)$ را بررسی خواهیم کرد، در ابتدا ساختار $Spin(7)$ را تعریف کرده و شرط لازم و کافی برای خمینه هایی که این ساختار را می پذیرند بیان خواهیم کرد، سپس به تجزیه فضاهای فرم خواهیم پرداخت و در آخر شار عمومی روی ساختار $Spin(7)$ را بدست خواهیم آورد.

کلمات کلیدی: شار، ساختار $Spin(7)$ ،فضای فرم، هموستار، تجزیه.

پیش‌گفتار

پژوهش‌های بسیاری در زمینه‌ی $Spin(۷)$ و مفاهیم وابسته به آن، از جمله تاب تانسور انجام شده است. به ویژه مفهوم شار ساختار $Spin(۷)$ اول بار در کارهای اسپیرو کاریگیانیس مشاهده می‌شود که آن هم بر اساس گفته‌های این پژوهشگر در دهمین کنفرانس بین‌المللی در مورد هندسه دیفرانسیل و کاربردهای آن می‌باشد. مفهوم شار ساختار $Spin(۷)$ مشابه شار ساختار $G_۲$ است که در [۸] به تفصیل بیان شده است.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد که در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیمی خواهیم پرداخت که در طول این پژوهش مورد نیاز است. ابتدا تعاریف مقدماتی را بیان خواهیم کرد و سپس به بیان تعاریف اصلی می پردازیم.

در فصل دوم به بررسی خمینه های با ساختار $Spin(۷)$ خواهیم پرداخت و سپس متریک روی ساختار $Spin(۷)$ را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

در فصل سوم به بررسی تجزیه فضای فرم‌ها خواهیم پرداخت، وجود ساختار $Spin(۷)$ روی منیفلد M، تجزیه‌ای از فضای فرم‌ها را مشخص می‌کند که در این فصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در فصل چهارم با استفاده از مشتق گیری معادلات، شار عمومی روی ساختار $Spin(۷)$ را بدست خواهیم آورد.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیمی می‌پردازیم که در طول این پژوهش مورد نیاز است. ابتدا تعاریف مقدماتی را بیان کرده و سپس به بیان تعاریف اصلی می پردازیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. گوییم گروه لی G روی خمینه P از راست عمل می‌کند اگر نگاشت هموار $\sigma : P \times G \longrightarrow P$ با ضابطه $(p,g) \longmapsto p \cdot g$ موجود باشد چنان‌که

۱) $p \cdot (g_1 g_2) = (p \cdot g_1) \cdot g_2$

۲) $p \cdot e = p$

تعریف ۲.۱.۱. اگر X یک خمینه هموار و G یک گروه لی باشد. منظور از یک کلاف اصلی هموار روی X با ساختار گروه G، خمینه همواری مانند P و نگاشت هموار $\rho : P \longrightarrow X$ و عمل راست $\sigma : P \times G \longrightarrow P$ با ضابطه $(p,g) \longmapsto p \cdot g$ است، به‌گونه‌ای که

۱) ρ پوشا باشد

۲) برای هر $p \in P$ و $g \in G$، $\rho(p) = \rho(p \cdot g)$

۳) (خاصیت موضعا بدیهی) برای هر $x \in X$، همسایگی V از x در X و وابرریختی $\psi : \rho^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$، $\psi(p) = (\rho(p), \varphi(p))$ وجود داشته باشد که

$\varphi : \rho^{-۱}(V) \longrightarrow G$ دارای ویژگی زیر باشد

$$\varphi(p \cdot g) = \varphi(p)g, \qquad \forall p \in \rho^{-۱}(V), g \in G.$$

کلاف اصلی را با $G \hookrightarrow P \longrightarrow M$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. اگر E و M دو خمینه باشند و $\pi : E \longrightarrow M$ یک نگاشت هموار باشد آنگاه E را یک کلاف برداری روی M گوییم اگر
۱)π پوشا باشد
۲)موضعاً بدیهی باشد
۳)برای هر $x \in M$، $E_x = \pi^{-۱}(x)$ و $\varphi |_{E_x} : E_x \longrightarrow R^m$ یک یکریختی است.

تعریف ۴.۱.۱. اگر M یک خمینه هموار باشد و ۳تایی (E, π, M) یک کلاف برداری روی M باشد، منظور از یک کنج از E در x، پایه مرتب
$p = (e_۱, ..., e_m)$ برای E_x است. برای هر p یک یکریختی $\rho : R^m \longrightarrow E_x$ موجود است به طوری که $\rho(e_i) = b_i$ و $\{e_۱, ..., e_m\}$ پایه استاندارد R^m است.
فرض کنیم $(F^E)_x$ مجموعه همه کنجهای E در x باشد به

$$F^E = \cup_{x \in M} (F^E)_x$$

کلاف کنجی E گویند.

۲.۱ تعاریف اصلی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید M یک خمینه و $\pi : E \longrightarrow M$ یک کلاف برداری باشد. یک هموستار ∇^E روی E یک نگاشت خطی
$\nabla^E : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E \otimes T^*M)$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$\nabla^E(\alpha e) = \alpha \nabla^E e + e \otimes d\alpha.$$

که $e \in \Gamma^\infty(E)$ یک مقطع هموار از E و α یک نگاشت هموار روی M است. منظور از $\Gamma^\infty(E)$ تمام مقاطع هموار کلاف برداری E است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید M یک خمینه و $\pi : E \longrightarrow M$ یک کلاف برداری روی M و ∇^E یک هموستار روی E باشد. اگر $x \in M$ و $\gamma : [۰, ۱] \longrightarrow M$ یک حلقه با نقطه پایه‌ای x باشد، یعنی $x = \gamma(۱) = \gamma(۰)$. نگاشت انتقال موازی $P_\gamma : E_x \longrightarrow E_x$ یک نگاشت خطی معکوس‌پذیر است.

$Hol_x(\nabla^E)$ (گروه هولونومی ∇^E با نقطه پایه‌ای x) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Hol_x(\nabla^E) = \{P_\gamma : \text{است } x \text{ یک حلقه با نقطه پایه‌ای } \gamma\}.$$

تعریف ۳.۲.۱. اگر $g_{\mu r}$ یک تانسور متری باشد، آنگاه ضرایب کریستوفل به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{۱}{۲}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\sigma} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\rho} g_{\alpha\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} g_{\rho\sigma}\Big)$$

تعریف ۴.۲.۱. اگر فرض کنیم ∇ یک هموستار روی M باشد، گوییم M دارای یک G-ساختار سازگار با ∇ است، اگر هموستار متناظر ∇ روی F یعنی D را بتوان به G-ساختار کاهش داد.

فصل ۲

خمینه‌های با ساختار $Spin(۷)$

در این فصل ابتدا ساختار $Spin(۷)$ را تعریف می کنیم و سپس شرایطی که یک خمینه باید داشته باشد تا ساختار $Spin(۷)$ بپذیرد را بیان می کنیم. در این فصل از مراجع [۶], [۸] استفاده می‌شود.

۱.۲ ساختار $Spin(۷)$

زیر گروه $Spin(۷)$ از $GL(۸,\mathbb{R})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Spin(۷) = \{A \in GL(۸,\mathbb{R}) \mid \ A^*\Omega_۰ = \Omega_۰\}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\Omega_۰ &= dx_{۱۲۳۴} + dx_{۱۲۵۶} + dx_{۱۲۷۸} + dx_{۱۳۵۷} - dx_{۱۳۶۸} - dx_{۱۴۵۸} \\
&- dx_{۱۴۶۷} - dx_{۲۳۵۸} - dx_{۲۳۶۷} - dx_{۲۴۵۷} + dx_{۲۴۶۸} + dx_{۳۴۵۶} \\
&+ dx_{۳۴۷۸} + dx_{۵۶۷۸}
\end{aligned}$$

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید F کلاف کنجی TM باشد، منظور از یک ساختار $Spin(۷)$ روی خمینه ۸-بعدی M یک زیر کلاف اصلی P از F با تار $Spin(۷)$ است.

قضیه ۲.۱.۲. خمینه ۸-بعدی M یک ساختار $Spin(۷)$ می پذیرد اگر و تنها اگر $\Omega \in \Lambda^۴(M)$ موجود باشد که برای هر $x \in M$ (T_xM, Ω_x) با $(\mathbb{R}^۸, \Omega_۰)$ یکریخت شود.

در اینجا یکریختی به این معناست که پایه $\{\frac{\partial}{\partial x_8}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_1}\}$ از T_xM موجود باشد بطوریکه $\Omega_x(\frac{\partial}{\partial x_{i_4}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{i_8}}) = \Omega_\circ(\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_4})$ که در آن $\{\varepsilon_8, \cdots, \varepsilon_1\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^8$ باشد.

برهان. فرض کنیم یک ساختار $Spin(7)$ روی M موجود باشد. بنابراین یک زیر کلاف اصلی P با تار $Spin(7)$ از F موجود است.

P یک کلاف اصلی با تار $GL(8,\mathbb{R})$ است لذا یک عمل راست
$\sigma : P \times GL(8,\mathbb{R}) \longrightarrow P$ با ضابطه $((x, e_1, ..., e_8), A) \longrightarrow (x, f_1, ..., f_8)$
وجود دارد.

اگر $(x, e_1, \cdots, e_8)$ و $(x, f_1, \cdots, f_8)$ اعضای P باشند، آنگاه ماتریس $A \in Spin(7)$ موجود است که $f_i = A_i^j e_j$.

اگر $\{e^1, \cdots, e^8\}$ دوگان $\{e_1, \cdots, e_8\}$ باشد که $(x, e_1, \cdots, e_8) \in P$، Ω_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= e_{1234} + e_{1256} + e_{1278} + e_{1357} - e_{1368} - e_{1458} \\
&- e_{1467} - e_{2358} - e_{2367} - e_{2457} + e_{2468} + e_{3456} \\
&+ e_{3478} + e_{5678}
\end{aligned}$$

که در آن $e_{ijkm} = e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^m$.

حال نشان می‌دهیم Ω_x خوش تعریف است. باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
& e_{1234} + e_{1256} + e_{1278} + e_{1357} - e_{1368} - e_{1458} \\
- \;& e_{1467} - e_{2358} - e_{2367} - e_{2457} + e_{2468} + e_{3456} \\
+ \;& e_{3478} + e_{5678} = f_{1234} + f_{1256} + f_{1278} + f_{1357} \\
- \;& f_{1368} - f_{1458} - f_{1467} - f_{2358} - f_{2367} - f_{2457} \\
+ \;& f_{2468} + f_{3456} + f_{3478} + f_{5678}
\end{aligned}$$

از تساوی $A^*\Omega_\circ = \Omega_\circ$ خوشتعریفی ثابت می‌شود.

برگشت: P را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P = \{(x, e_1, \cdots, e_8) : \Omega_x(e_{i_1}, \cdots, ei_4) = \Omega_\circ(\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_4})\}$$

Ω_x یک ۴-فرمی است. از تساوی $\Omega_x(e_{i_1},\cdots,ei_4)=\Omega_\circ(\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_4})\}$ نتیجه می‌شود که ضرایب $\Omega_{i_1,\dots,i_4}$ برابر ضرایب $e_{i_1,\dots,i_4}$ است. حال $A^*\Omega_\circ$ را محاسبه می‌کنیم که در آن A ماتریسی است که دو پایه ای که بر شرط P صدق می‌کند را به هم تبدیل می‌کند، می‌بینیم که $A^*\Omega_\circ=\Omega_\circ$. $\square$

۲.۲ متریک روی ساختار $Spin(7)$

تعریف ۱.۲.۲. اگر M یک خمینه ریمانی جهت پذیر با عنصر حجم متریک ω باشد، آنگاه عملگر $*$ به صورت زیر تعریف می‌شود که در آن $dim(M)=n$.

$$*:\Lambda^p(M)\longrightarrow\Lambda^{n-p}(M)$$
$$\alpha\wedge*\beta\longrightarrow g(\alpha,\beta)\omega.$$

فرض می‌کنیم یک ساختار $Spin(7)$ روی M داشته باشیم تعریف می‌کنیم

$$\Lambda^2_3(M)=\{\beta\in\Lambda^2(M);*(\Omega\wedge\beta)=3\beta\},$$
$$\Lambda^2_{-1}(M)=\{\beta\in\Lambda^2(M);*(\Omega\wedge\beta)=-\beta\}.$$

$\Lambda^2(M)$ را می توان به صورت زیر نوشت، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

$$\Lambda^2(M)=\Lambda^2_3\oplus\Lambda^2_{-1},$$

اگر $\alpha\in\Lambda^2(M)$ باشد آنگاه $\alpha=\alpha_3+\alpha_{-1}$ که $\alpha_3\in\Lambda^2_3(M)$ و $\alpha_{-1}\in\Lambda^2_{-1}(M)$.

قضیه ۲.۲.۲. برای هر دو میدان V و W روابط زیر برقرار است.

$$(V\lrcorner W\lrcorner\Omega)\wedge(V\lrcorner W\lrcorner\Omega)\wedge\Omega=6(|V|^2|w|^2+\langle V,W\rangle^2)vol$$

برهان.

$$\begin{aligned}(V\lrcorner W\lrcorner\Omega)\wedge(V\lrcorner W\lrcorner\Omega)\wedge\Omega &= (6(\langle V,V\rangle\langle W,W\rangle-\langle V,W\rangle\langle W,V\rangle\\ &+ 7(\Omega(V,W,V,W)))vol\\ &= 6(|V|^2|w|^2+\langle V,W\rangle^2)vol\end{aligned}$$

$\square$

فرض کنید یک ساختار $Spin(۷)$ روی M داشته باشیم. بنابراین ۴-فرمی Ω روی M را داریم که به ازای هر x، (Ω_x, T_xM) با $(\Omega_\circ, \mathbb{R}^۸)$ یکریخت است. یعنی پایه $\{e_\circ, \cdots, e_۷\}$ از T_xM موجود است که

$$\Omega_x(e_{i_۱}, \cdots, e_{i_۴}) = \Omega_\circ(\varepsilon_{i_۱}, \cdots, \varepsilon_{i_۴})$$

که در آن $\{\varepsilon_\circ, \cdots, \varepsilon_۷\}$ پایه متعامد یکه استاندارد $\mathbb{R}^۸$ است.
بنابراین $\Omega_x^۲(e_{i_۱}, \cdots, e_{i_۸}) = \Omega_\circ^۲(\varepsilon_{i_۱}, \cdots, \varepsilon_{i_۸}) \neq \circ$،
از روی Ω، متریک ریمانی g_Ω روی M را به صورت زیر تعریف می‌شود.
اگر V یک میدان برداری روی M باشد، که $V(p) \neq \circ$ باشد آنگاه می‌توان در یک همسایگی از نقطه p کنج $(q, e_۱, \cdots, e_۷)$ را در نظر گرفت.
تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
B_{ij}(V) &= ((e_i \lrcorner V \lrcorner \Omega) \wedge (e_j \lrcorner V \lrcorner \Omega) \wedge (V \lrcorner \Omega))(e_۱, \cdots, e_۷),\\
A(V) &= ((V \lrcorner \Omega) \wedge \Omega)(e_۱, \cdots, e_۷),\\
V \lrcorner (\Omega \wedge \Omega) &= (V \lrcorner \Omega) \wedge \Omega + \Omega \wedge (V \lrcorner \Omega) = ۲(V \lrcorner \Omega) \wedge \Omega,\\
V \lrcorner \Omega^۲ &= ۲(V \lrcorner \Omega) \wedge \Omega.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$V \lrcorner \Omega^۲(e_۱, \cdots, e_۷) = ۲A(V).$$

در نتیجه

$$\circ \neq \Omega^۲(V, e_۱, \cdots, e_۷) = ۲A(V) \Rightarrow A(V) \neq \circ$$

$$g_\Omega(V, V) = \sqrt{\frac{۷^۳(detB_{ij}(V))^{\frac{۱}{۴}}}{۶^{\frac{۷}{۴}} A(V)^۳}}$$

که در آن

$$detB_{ij}(V) = ۶^۷ \mid V \mid^{۱۲} (V^\circ)^۹ (det_۸(g))^{\frac{۹}{۴}},$$

$$A(V) = ۷V^\circ (det_۸(g))^{\frac{۱}{۴}}.$$

حال می‌توان از روی g_Ω یک هموستار لوی چویتا ∇ روی M تعریف کرد.

فصل ۳

تجزیه فضای فرم‌ها

در این فصل ابتدا تجزیه فضاهای فرم را بیان می‌کنیم و سپس به اثبات قضایای مربوط به این تجزیه می‌پردازیم. در این فصل از مراجع [۳] ,[۷] ,[۶] ,[۸] استفاده می‌شود.

۱.۳ تجزیه فضای فرم‌ها

وجود ساختار $Spin(۷)$ روی خمینه M، تجزیه‌ای از فضای فرم‌ها را مشخص می‌کند که در ادامه به آن می‌پردازیم. مشاهده می‌کنیم که فضای $\Lambda^{۲}$ به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$\Lambda^{۲} = \Lambda^{۲}_{۳} \oplus \Lambda^{۲}_{-۱},$$

که در آن

$$\Lambda^{۲}_{۳} = \{\beta \in \Lambda^{۲}; *(\Omega \wedge \beta) = ۳\beta\},$$
$$\Lambda^{۲}_{-۱} = \{\beta \in \Lambda^{۲}; *(\Omega \wedge \beta) = -\beta\}.$$

تعریف ۱.۱.۳. اگر (M, g) یک خمینه ریمانی و V یک میدان برداری روی M باشد، آنگاه دوگان V وابسته به g، که آن را با V^b نشان می‌دهیم، یک ۱-فرمی روی M است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} V^b \quad &: \quad TM \longrightarrow \mathbb{R} \\ &V^b(w) = g(v, w) \end{aligned}$$

اگر $x_1, \cdots, x_m$ مختصات موضعی M باشند، $\frac{\partial}{\partial x_i}$ یک میدان برداری است و چون (dx_i) پایه فضای دوگان است، (یعنی هر p-فرمی ترکیب خطی dx_i است)، لذا داریم:

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^b = L_{ij} dx^j,$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial x_i})^b(\frac{\partial}{\partial x_k}) &= g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}) = g_{ik},\\ L_{ij}dx^j(\frac{\partial}{\partial x_k}) &= L_{ij}\delta_k^j = L_{ik},\end{aligned}$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$L_{ik} = g_{ik} \Rightarrow (\frac{\partial}{\partial x_i})^b = g_{ij}dx^j.$$

به طور مشابه، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۲.۱.۳. اگر α یک ۱-فرمی روی M باشد، آنگاه دوگان α وابسته به g که با $\alpha^\sharp$ نشان داده می‌شود، یک میدان برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\alpha^\sharp \ : M \longrightarrow TM$$

که برای هر ۱-فرمی β روی M،

$$\beta(\alpha^\sharp) = g(\alpha, \beta).$$

که در آن $g(\alpha, \beta)$ به شرح زیر تعریف می‌شود:
اگر $x_1, \cdots, x_m$ مختصات موضعی M باشد، $\alpha \in \Lambda^k(M)$ بنابراین

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{i_1, \cdots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

اگر α یک k-فرم باشد داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \lrcorner \alpha = \frac{1}{(k-1)!}\alpha_{m, i_1, \cdots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

زیرا

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}} \lrcorner \mathrm{dx^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{dx^{i_k}} = \begin{cases} \circ & j \notin \{i_۱, \cdots, i_k\}, \\ (-۱)^{r-۱} dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} & \\ \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} & j = i_r. \end{cases}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} i_{\frac{\partial}{\partial x_m}} \alpha &= i_{\frac{\partial}{\partial x_m}} (\frac{۱}{k!} \alpha_{i_۱, \cdots, i_k} dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= (\frac{۱}{k!} \alpha_{m, i_۲, \cdots, i_k} dx^{i_۲} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &- (\frac{۱}{k!} \alpha_{i_۱, m, \cdots, i_k} dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ +\cdots+ & (-۱)^{k-۱} (\frac{۱}{k!} \alpha_{i_۱, \cdots, i_{k-۱}} dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-۱}}). \end{aligned}$$

در هر عبارت روی اندیس‌ها جمع داریم، بنابراین اگر m را با جابجایی، به اولین اندیس بیاوریم داریم:

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_m}} \alpha = (\frac{k}{k!} \alpha_{m, i_۱, \cdots, i_{k-۱}} dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}),$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \lrcorner \alpha = \frac{۱}{(k-۱)!} \alpha_{m, i_۱, \cdots, i_k} dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-۱}}.$$

اگر g یک متریک روی M باشد، می‌توان یک متریک روی k-فرمی‌ها، به صورت زیر تعریف کرد،

$$g(dx_{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, dx_{j_۱} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}) = det(g^{i_a j_b}),$$

که (g^{ij}) معکوس ماتریس (g_{ij}) است و

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}),$$

$$g(dx^i, dx^j) = g^{ij},$$

بخصوص اگر

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{k!}\alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}},\\
\beta &= \frac{1}{k!}\beta_{j_1,\cdots,j_k} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{k-1}},\\
g(\alpha,\beta) &= g(\frac{1}{k!}\alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}\\
&, \quad \frac{1}{k!}\beta_{j_1,\cdots,j_k} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{k-1}})\\
&= (\frac{1}{k!})^2 \alpha_{i_1,\cdots,i_k}\beta_{j_1,\cdots,j_k} det(g^{i_a j_b})\\
&= (\frac{1}{k!})^2 \alpha_{i_1,\cdots,i_k}\beta_{j_1,\cdots,j_k} (\sum_\sigma sgn\sigma g^{i_1 j_{\sigma(1)}}\cdots g^{i_k j_{\sigma(k)}}).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$g(\alpha,\beta) = \frac{1}{k!}\alpha_{i_1,\cdots,i_k}\beta_{j_1,\cdots,j_k} g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_k j_k}.$$

مثلا اگر dx^i، ۱-فرمی باشد، $(dx^i)^\sharp$ یک میدان برداری است پس ترکیب خطی از $\frac{\partial}{\partial x_i}$ هاست. یعنی $(dx^i)^\sharp = L^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$

$$\begin{aligned}
dx^k((dx^i)^\sharp) &= g(dx^i, dx^k) = g^{ik},\\
dx^k(L^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}) &= L^{ij}\delta^k_j = L^{ik},
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$g^{ik} = L^{ik} \Rightarrow (dx^i)^\sharp = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

اگر βیک k-فرمی باشد، $*\beta$ یک $(8-k)$-فرمی است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

تعریف ۳.۱.۳. برای هر k-فرمی α

$$\alpha \wedge *\beta = g(\alpha,\beta) vol.$$

قضیه ۴.۱.۳. اگر M یک خمینه دلخواه n-بعدی و ω یک میدان برداری و α یک k-فرمی باشد، آنگاه

۱) $*(\omega\lrcorner\alpha) = (-1)^{k+1}(\omega^b \wedge *\alpha)$

۲) $(\omega\lrcorner\alpha) = (-1)^{nk+n} * (\omega^b \wedge *\alpha)$

۳) $*(\omega\lrcorner * \alpha) = (-1)^{nk+n+1}(\omega^b \wedge \alpha)$

۴) $\omega\lrcorner * \alpha = (-1)^k * (\omega^b \wedge \alpha)$

برهان. برای اثبات قسمت اول به صورت زیر عمل می‌کنیم
فرض کنیم

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

و

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x_m},$$

$$(\omega\lrcorner\alpha) = \frac{1}{(k-1)!}\alpha_{m,i_1,\cdots,i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

اگر β یک $(k-1)$-فرمی دلخواه به صورت زیر باشد

$$\beta = \frac{1}{(k-1)!}\beta_{m,j_1,\cdots,j_{k-1}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{k-1}},$$

داریم

$$\beta \wedge *(\omega\lrcorner\alpha) \ = g(\beta, \omega\lrcorner\alpha) vol.$$

و از طرفی

$$g(\beta, \omega\lrcorner\alpha) \ = \frac{1}{(k-1)!}\alpha_{m,i_1,\cdots,i_{k-1}}\beta_{j_1,\cdots,j_{k-1}} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_{k-1} j_{k-1}}.$$

حال

$$\beta \wedge (\omega^b \wedge *\alpha) = g(\beta \wedge \omega^b, \alpha).$$

فرض می‌کنیم $\omega^b = g_{mj}dx^j$

$$\begin{aligned}\beta\wedge\omega^b &= \frac{1}{(k-1)!}\beta_{j_1,\cdots,j_{k-1}}g_{mj}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{k-1}}\wedge dx^j\\ &= \frac{1}{k!}(\beta\wedge\omega^b)_{j_1\cdots j_k}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}.\end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه

$$\frac{1}{k!}(\beta\wedge\omega^b)_{j_1\cdots j_k} = \frac{1}{(k-1)!}\beta_{j_1\cdots j_{k-1}}g_{mj_k},$$

داریم

$$\begin{aligned}g(\beta\wedge\omega^b,\alpha) &= \frac{1}{k!}(k\beta_{j_1\cdots j_{k-1}}g_{mj_k})\alpha_{i_1\cdots i_k}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_kj_k}\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\beta_{j_1\cdots j_{k-1}}g_{mj_k}\alpha_{i_1\cdots i_k}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_kj_k}\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\beta_{j_1\cdots j_{k-1}}\alpha_{i_1\cdots i_{k-1},m}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_{k-1}j_{k-1}}\\ &= (-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}\beta_{j_1\cdots j_{k-1}}\alpha_{m,i_1\cdots i_{k-1}}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_{k-1}j_{k-1}}\\ &= (-1)^{k+1}g(\beta,\omega\lrcorner\alpha).\end{aligned}$$

برای اثبات قسمت دوم ابتدا نشان می‌دهیم

$$*^2 = (-1)^{k(m-k)}.$$

اگر $\alpha = dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ ، آنگاه $*\alpha = \pm dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{m-k}}$.
که $\{j_1,\cdots,j_{m-k}\}$ متمم $\{i_i,\cdots,i_k\}$ در $\{1,\cdots,m\}$ است و $\pm$ علامت جایگشتی است که $\{j_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{m-k}\}$ را به $\{1,\cdots,m\}$ تبدیل می‌کند.
اگر این جایگشت زوج باشد

$$**\alpha = *(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{m-k}}) = (-1)^{k(m-k)}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},$$

که در آن $(-1)^{k(m-k)}$ علامت جایگشتی است که $\{j_1,\cdots,j_{m-k},i_i,\cdots,i_k\}$ را به $\{i_i,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{m-k}\}$ تبدیل می‌کند.

اگر جایگشت فرد باشد

$$**\alpha = -*(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-k}}) = -(-(-1)^{k(m-k)} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}).$$

حال قسمت دوم قضیه را اثبات می‌کنیم،

$$\begin{aligned} *(*(\omega \lrcorner \alpha)) &= (-1)^{k+1} * (\omega^b \wedge *\alpha), \\ (-1)^{(k-1)(m-k+1)}(\omega \lrcorner \alpha) &= (-1)^{k+1} * (\omega^b \wedge *\alpha), \\ \omega \lrcorner \alpha &= (-1)^{k+1-((k-1)(m-k+1))} * (\omega^b \wedge *\alpha) \\ &= (-1)^{mk+k} * (\omega^b \wedge *\alpha). \end{aligned}$$

حال با توجه به این که

$$\begin{aligned} k+1-((k-1)(m-k+1)) &= k+1-mk+k^2-k+m-k+1 \\ &= k^2-mk-k+m+2 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$k^2-mk-k+m+2-mk-m = -2mk+k(k-1)+2$$

که عبارتی زوج است یعنی هر دو توان از لحاظ زوج و فردی مانند هم هستند، پس می‌توان به جای $k+1-((k-1)(m-k+1))$ از $mk+m$ استفاده کرد.

برای اثبات قسمت سوم به صورت زیر عمل می‌کنیم،

$$*(\omega \lrcorner \alpha) = (-1)^{k+1}(\omega^b \wedge *\alpha).$$

در عبارت فوق به جای α از $*\alpha$ استفاده می‌کنیم، بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} *(\omega \lrcorner * \alpha) &= (-1)^{m-k+1}(\omega^b \wedge ** \alpha) \\ &= (-1)^{m-k+1}(-1)^{k(m-k)}(\omega^b \wedge \alpha) \\ &= (-1)^{m-k+1+km-k^2}(\omega^\wedge \alpha) \\ &= (-1)^{mk+m-1}(\omega^\wedge \alpha). \end{aligned}$$