بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته آنالیز ریاضی

برخی خواص قاب‌های زیرفضاهای بدست آمده از نظریه عملگرها

استاد راهنما: دکتر اصغر رحیمی

استاد مشاور: دکتر شهرام نجف‌زاده

پژوهش و نگارش: عبدا... صادقپور

تیر ماه ۱۳۸۹

قدردانی و تشکر

زندگی پر از لحظات تلخ و شیرین است و عمر سپری شدن همین لحظات. جهان امروز چنان منقلب شده که تلخی‌ها را تلخ‌تر و شیرینی‌ها را شیرین‌تر ساخته است. امروز علم و تکنولوژی همه جا را فرا گرفته و عقاید و سنت‌ها را زیر سوال برده است.

جهان امروز، جهان فکر است و نیاز به تقویت فکر، از همه اعصار بیشتر شده است. این فکر چیزی جز ریاضی نیست. در این پایان‌نامه سعی شده به بخش کوچکی از عدل ظریف و اعجاب آوری که آفریدگار خلقت در جهان به کار برده است اشاره شود، تا شاید در کامیابی بشر کمکی شده باشد.

از تمامی کسانی که در تنظیم این پایان‌نامه به من کمک کردند تقدیر و تشکر می‌کنم و همچنین از آقای دکتر رحیمی که با انرژی فراوان و روی گشاده در تمامی مراحل مرا کمک کردند تشکر ویژه دارم.

از پدر و مادرم که در تمامی مراحل تحصیل، زحمت‌های من بر دوش آنان بوده متشکرم.

و تشکر خاص از همسر دلسوز و صبورم که در تمام مدت تحصیل این دوره بار خانواده بر دوش ایشان بوده و در تمام مراحل زندگی پشتیبان و همراه من بوده‌اند.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه، تعریف عملگرها روی قاب‌های تلفیقی، روابط بین عملگرها، پایه متعامد یکه از زیرفضاها و قاب‌های تلفیقی برای یک فضای هیلبرت جدایی پذیر H مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اگر $\varepsilon = \{E_i\}_{i\in I}$ یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای هیلبرت مانند K باشد، شرط کافی روی پایه متعامد یکه و عملگر $T \in L(K,H)$ که $\{T(E_i\}_{i\in I})$ برحسب دنباله‌ای از وزن‌های قابل قبول به یک قاب تلفیقی تبدیل شود را، بررسی می‌کنیم.

سپس نتایج به دست آمده روی قاب‌ها و تصاویر مایل روی قاب‌ها را به قاب‌های تلفیقی تعمیم می‌دهیم. بعد از آن مفهوم تظریف یک قاب تلفیقی تعریف و برای به دست آوردن نتایجی در مورد فزونی قاب‌های تلفیقی استفاده می‌شود.

وزن‌های قابل قبول برای دنباله‌های مولد قاب‌های تلفیقی در زیرفضاها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با فرض این که $\{W_i\}_{i\in I}$ یک قاب تلفیقی برای فضای هیلبرت H باشد، شرایطی که عملگر T باید داشته باشد که $\{T(W_i)\}_{i\in I}$ یک قاب تلفیقی برای H شود، بررسی می‌گردد.

در پایان مثال‌هایی از قاب‌های تلفیقی بیان و بررسی می‌شود.

مقدمه

فرض کنیم H یک فضای حقیقی یا مختلط (جدایی پذیر) هیلبرت باشد، یک دنباله $F = \{f_i\}, i \in I$ در H یک قاب برای H نامیده می‌شود، اگر اعداد مثبت A و B موجود باشند که در رابطه زیر صدق می‌کنند،

$$A\|f\|^{۲} \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^{۲} \leq B\|f\|^{۲}, \quad (f \in H).$$

این مفهوم به قاب‌های زیر فضاها توسط کوتنیک[۱] و کاسازا[۲] تعمیم داده شد. یک روش برای این کار این است که $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای از زیر فضاهای بسته H و فرض کنیم $w = \{w_i\}_{i\in I} \in l^{\infty}(I)$ به طوری که $w_i > ۰$ برای هر $i \in I$ باشد. دنباله $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)$ یک قاب زیر فضاها می‌باشد اگر اعداد مثبت $A_{\mathcal{W}_w}$ و $B_{\mathcal{W}_w}$ موجود باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$A_{\mathcal{W}_w}\|f\|^{۲} \leq \sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{w_i}(f)\|^{۲} \leq B_{\mathcal{W}_w}\|f\|^{۲}, \quad (f \in H).$$

که در آن P_{W_i} روی W_i تعریف شده است.

این یک معیار برای ساختن یک قاب برای فضای H به ما می‌دهد که به وسیله دنباله الحاقی از قاب‌ها برای زیر فضاهای H می‌باشد که در قضایای بعد به جزئیات آن می‌پردازیم.

اخیراً قاب زیر فضا به قاب‌های تلفیقی تغییر نام داده شد، این مفهوم در طول سال‌های گذشته بسیار مورد مطالعه قرار گرفته و بخش‌های جدیدی به دست آمده است.

اگر $\mathcal{W}_w$ یک قاب زیر فضاها باشد عملگرهای ترکیب، تجزیه و عملگر قاب تعریف شده و

---

[۱] Kutyniok

[۲] Casazza

خواصی از $\mathcal{W}_w$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. عملگر ترکیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{\mathcal{W}_w} : K_W = (\sum_{i\in I} \oplus W_i)_{l_۲} \longrightarrow H$$
$$T_{\mathcal{W}_w}(g) = \sum_{i\in I} w_i g_i \qquad\qquad (g = (g_i)_{i\in I} \in K_W)$$

اگر چه عملگر ترکیب از یک قاب زیر فضاهای $\mathcal{W}_w$ برای مطالعه خواصی از یک قاب سودمند است، اما این تعریف انعطاف پذیر نیست. طبق این تعریف پیدا کردن عملگرها برای هر اختلال قاب زیر فضاها مشکل است. مشاهده این که اثر $T_{\mathcal{W}_w}$ روی هر جمعوند متعامد K_W به وسیله این تعریف چگونه است، کاملاً مشخص است. منظور از این کار به دست آوردن انعطاف پذیری بیشتر در استفاده از روش نظریه عملگرها برای مطالعه قاب‌های تلفیقی می‌باشد.
پس کافی است شرطی را روی یک پایه متعامد یکه $\varepsilon = \{E_i\}_{i\in I}$ از زیر فضاهای یک فضای هیلبرت K و یک عملگر پوشا $T \in L(K, H)$ به دست آوریم تا دنباله $W = \{T(E_i)\}_{i\in I}$ با دنباله‌ای از وزن‌های شمارش پذیر مربوط به آن، به یک قاب زیر فضاها تبدیل شود.
این نتایج برای توصیف برخی از خواص قاب زیرفضاهای هم ارز استفاده می‌شود و فزونی یک قاب را مورد مطالعه قرار می‌دهد.
تعمیمی از نتایج دو تعریف بالا را که شامل دنباله ای از وزن‌های قابل قبول برای قاب زیرفضاها و تصویر مایل می‌باشد را به دست می‌آوریم. مفهوم دنباله‌ای از قاب زیرفضاها را تعریف می‌کنیم. این تعاریف روشی برای توصیف زیرفضاها نشان می‌دهند و ملاحظه می‌کنیم که نتایج به دست آمده مشابه نتایج شناخته شده در تعریف قاب کلاسیک می‌باشد. در صورتی که تذکرات و نتایج متعدد شناخته شده از نظریه قاب‌ها در تنظیم قاب زیر فضاها معتبر نیست.
برای مثال نشان می‌دهیم که قاب زیرفضاهای $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i\in I}$ برای H برای هر $G \in GL(H)$ دنباله $(v_i, G(W_i))_{i\in I}$ یک قاب ترکیبی پارسوال برای هر $v \in l^\infty(I)$ نمی‌باشد، در این مورد اگر $G = S_{\mathcal{W}_w}^{-\frac{۱}{۲}}$ انتخاب کنیم که $S_{\mathcal{W}_w}$ یک عملگر قاب $\mathcal{W}_w$ است که در مثال‌های (۶.۵) و (۵.۵) می‌بینیم که رابطه درست نیست. موارد متعددی به همین صورت وجود دارد.
در پایان مسائلی از نظریه قاب زیرفضاها برای یک دنباله مولد $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ از زیرفضاهای بسته H رامطالعه و خواصی از مجموعه وزن‌های قابل قبول

$$P(\mathcal{W}) = \{w \in l^\infty_+(I) : \mathcal{W}_w = (w, W_i)_{i\in I} \text{یک قاب ترکیبی برای } H \text{ باشد}\}$$

را به دست می‌آوریم.

خصوصاً شرایطی روی $\mathcal{W}$ که $P(\mathcal{W}) \neq \emptyset$ را به دست می‌آوریم. برخی نتایج خاص درباره این مسائل را به دست آورده و رابطه هم ارزی بین وزن‌های سازگار با وزن‌های مربوط به یک دنباله مولد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مثال‌های متعددی که پیچیدگی‌ها و تناقض‌هایی از این مسائل را نشان می‌دهد را بیان می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم

فرض کنیم H و K فضاهای جدایی پذیر هیلبرت باشند و $B(H,K)$ فضایی از تبدیلات خطی کراندار مانند $A : H \longrightarrow K$ (اگر $H = K$ باشد آنگاه $B(H,K)$ را به صورت $B(H)$ نمایش می‌دهیم) باشد، گروه عملگرهای معکوس پذیر در $B(H)$ را با $GL(H)$ نمایش می‌دهیم و $GL(H)^{+}$ یک مجموعه عملگرهای وارون پذیر مثبت روی H می‌باشد. برای یک عملگر $A \in B(H,K)$، $R(A)$ نمایش برد A و $N(A)$ فضای پوچ A می‌باشد. $A^{*} \in B(K,H)$ عملگر الحاقی A و $\|A\|$ نرم عملگر A است.

تعریف ۱.۱. اگر T یک عملگر خطی باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|T(h)| : \|h\| = ۱\} \\ &= \sup\{|T(h)|/\|h\| : h \in H, h \neq ۰\} \\ &= \inf\{C > ۰ : |T(h)| \leq C\|h\| : h \in H\}. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۱. فرض کنیم Kو H فضاهای هیلبرت باشند و $T : H \longrightarrow K$ یک تبدیل خطی باشد. اگر نرم تبدیل خطی متناهی باشد، تبدیل را کراندار گویند و مجموعه تمام تبدیلات خطی کراندار از H به K با علامت $B(H,K)$ نمایش داده می‌شود. اگر $H = K$ آنگاه آن را با نماد $B(H)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. تبدیل خطی $T : H \longrightarrow K$ را فشرده گویند اگر $v = \{Tx : \|x\| \leq ۱\}$ فشرده باشد یعنی، هر دنباله از v دارای یک زیردنباله همگرا باشد. مجموعه عملگرهای فشرده از H به روی K را با نماد $K(H,K)$ و اگر $H = K$ آن را با نماد $K(H)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱. عملگر $T \in B(H)$ را مثبت گویند اگر برای هر $h \in H$ داشته باشیم $\langle Th, h \rangle \geq ۰$ و با علامت $T \geq ۰$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۵.۱. برای دو عملگر $T \in B(H)$ و T' ، $T \leq T'$ اگر و تنها اگر $T' - T \geq ۰$.

تعریف ۶.۱. هر فضای برداری یک پایه هامل (بزرگترین مجموعه مستقل خطی) دارد.

اگر X یک فضای باناخ باشد، یک دنباله از بردارهای $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ متعلق به X یک پایه برای X می‌باشد، اگر برای هر $f \in X$ اسکالر منحصر به فرد $\{c_k(f)\}_{k=۱}^{\infty}$ موجود باشد که $f = \sum\limits_{k=۱}^{\infty} c_k(f)e_k$.

تعریف ۷.۱. یک زیر مجموعه متعامد یکه از یک فضای هیلبرت H زیر مجموعه مانند ε است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱- برای هر $e \in \varepsilon$ داشته باشیم $\|e\| = 1$،

۲- اگر $e_1, e_2 \in \varepsilon$ و $e_1 \neq e_2$ آنگاه $e_1 \perp e_2$.

قضیه ۸.۱. فرض کنیم K یک زیر فضای بسته از H و $h \in H$ باشد. اگر Ph یک نقطه منحصر به فرد در K باشد طوری که $h - Ph \perp K$ آنگاه :

۱- P یک تبدیل خطی روی H است،

۲- برای هر $h \in H$ ، $\|Ph\| \leq \|h\|$،

۳- $P^2 = P$ یعنی P خودتوان است،

۴- $kerP = K^{\perp}$ و $R(P) = K$.

برهان. رجوع شود به [۲] صفحه ۱۰۷. □

تعریف ۹.۱. اگر M یک زیرفضای خطی بسته از H باشد آن را با نماد $M \sqsubseteq H$ نمایش می‌دهیم. حال اگر M یک زیر فضای خطی بسته از H و P نگاشت خطی تعریف شده در قضیه (۸.۱) باشد، آنگاه P را تصویر متعامد H روی M گویند و P_M تصویر عمود بر روی M است.

تعریف ۱۰.۱. اگر $M \sqsubseteq H$ و $N \sqsubseteq H$ آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$M \ominus N = M \cap (M \cap N)^{\perp}$$

فرض کنیم I یک مجموعه شمارش پذیر باشد. فضای دنباله های کراندار $\{a_i\}_{i \in I}$ که a_i اعداد مثبت اکید هستند را با $l^{\infty}_{+}(I)$ نمایش می‌دهیم. ضرب معمولی (یا ضرب زوج‌های مرتب) $l^{\infty}(I)$ را در $l^{\infty}_{+}(I)$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۱.۱. یک پیچش روی جبر $\mathcal{A}$ نگاشت مزدوج خطی، به صورت $a \longrightarrow a^*$ روی $\mathcal{A}$ است طوری که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$،

۱- $a^{**} = a$،

۲- $(ab)^* = b^* a^*$،

۳- $(a+b)^* = a^* + b^*$،

جفت $(\mathcal{A},*)$ یک جبر پیچشی یا یک $*$−جبر نامیده می‌شود، اگر $S \subseteq \mathcal{A}$، $S^* = \{a^* | a \in S\}$ و اگر $S = S^*$، آنگاه S را خودالحاق می‌نامیم. یک زیر جبر الحاقی $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ یک $*$−جبر از $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. آنگاه تابع

$$P_x : B(H) \longrightarrow R^+$$
$$U \longrightarrow \|U\|$$

یک نیم نرم روی $B(H)$ است.

تعریف ۱۳.۱. توپولوژی موضعاً محدب روی $B(H)$ تولید شده توسط خانواده جدایی پذیر $(P_x)_{x\in H}$ را توپولوژی قوی روی $B(H)$ نامند.

تعریف ۱۴.۱. یک جبر باناخ عبارت است از جبر $\mathcal{A}$ روی میدان F از اعداد مختلط که یک $\|.\|$ به آن نسبت داده شده است. $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ است به طوری که برای هر a,b در $\mathcal{A}$ داریم:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

تعریف ۱۵.۱. یک C^*−جبر یک $*$−جبر باناخ $\mathcal{A}$ همراه با یک رابطه پیچشی است به طوری که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم،

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲.$$

تعریف ۱۶.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. اگر $\mathcal{A}$ به طور قوی بسته باشد، $*$−زیر جبر $B(H)$ را که $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$، یک جبر فون نیومان[۱] روی H نامیم. چون توپولوژی قوی، ضعیف تر از توپولوژی نرم است یک مجموعه به طور قوی بسته در توپولوژی نرم نیز بسته است.

یک باناخ $*$−جبر، یک $*$−جبر $\mathcal{A}$ همراه با نرم زیر، ضربی کامل است به طوری که

$$\|a^*\| = \|a\| : \forall a \in A.$$

تعریف ۱۷.۱. یک $*$−جبر یک باناخ C^*−جبر است هرگاه

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲ : \forall a \in A.$$

[۱] Von Neumann

بنابراین یک جبر فون نیومان یک C^*−جبر است.
اگر $\mathcal{A}$ یک $*$−جبر روی یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ یک جبر فون نیومان است.
قضیه ۱۸.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک $*$−جبر روی فضای هیلبرت H باشد و $id_H \in A$. در این صورت $\mathcal{A}$ یک جبر فون نیومان است اگر و تنها اگر $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{**}$.
حال چون $l^\infty(I)$ خودالحاقی است پس

۱- $a^{**} = a$,

۲- $(ab)^* = ab = b^*a^*$.

لذا یک $*$−جبر است و $\text{۱} = id_R \in l^\infty(I)$. در نتیجه طبق قضیه (۱۸.۱) یک جبر فون نیومان است.

فرض کنیم $M, N \sqsubseteq H$ که H یک فضای هیلبرت است. زاویه بین M و N را با $\alpha(M, N)$ نمایش می‌دهیم که در فاصله $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ می‌باشد و کسینوس آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C[M, N] = \sup\{|\langle x, y\rangle| : x \in M \ominus N, y \in N \ominus M, \|x\| = \|y\| = \text{۱}\}$$

اگر $M \subset N$ یا $N \subseteq M$، آنگاه تعریف می‌کنیم $C[M, N] = \circ$. همچنین اگر آنها متعامد باشند، آنگاه $C[M, N] = \circ$.
تعریف ۱۹.۱. کوچکترین زاویه بین دو زیر فضای بسته M و N از فضای هیلبرت را با $\alpha_\circ(M, N)$ نمایش می‌دهیم که مقدار آن در فاصله $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ قرار دارد و کسینوس آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_\circ[M, N] = \sup\{|\langle x, y\rangle| : x \in M, \|x\| \leq \text{۱}, y \in N, \|y\| \leq \text{۱}\}.$$

سینوس زاویه بین دو زیر فضای بسته را به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$S[M, N] = (\text{۱} - C[M, N]^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}.$$

گزاره ۲۰.۱. اگر $M, N \sqsubseteq H$، آنگاه

$$C[M, N] = C[N, M] = C[M \ominus N, N] = C[M, N \ominus M].$$

برهان.

$$C[M,N] = \sup\{|\langle x,y\rangle| : x \in M \ominus N, y \in N \ominus M, \|x\| = \|y\| = ۱\}.$$

چون $|\langle x,y\rangle| = |\langle y,x\rangle|$، پس

$$C[M,N] = \sup\{|\langle x,y\rangle| : x \in M \ominus N, y \in N \ominus M, \|x\| = \|y\| = ۱\} = C[N,M].$$

داریم،

$$C[M \ominus N, N] = \sup\{|\langle x,y\rangle| : x \in M \ominus N \ominus N, y \in N \ominus M \ominus N, \|x\| = \|y\| = ۱\}.$$

از طرفی،

$$\begin{aligned}
(M \ominus N) \ominus N &= (M \ominus N) \cap [(M \ominus N) \cap N]^{\perp} \\
&= (M \ominus N) \cap [(M \cap (M \cap N)^{\perp}) \cap N]^{\perp} \\
&= (M \ominus N) \cap [(M \cap N) \cap (M \cap N)^{\perp}]^{\perp} \\
&= (M \ominus N) \cap \{۰\}^{\perp} \\
&= (M \ominus N) \cap H \\
&= M \ominus N
\end{aligned}$$

و

$$N \ominus (M \ominus N) = N \cap (N \cap (M \ominus N))^{\perp} = N \cap H = N$$

$$\begin{aligned}
&\sup\{|\langle x,y\rangle| : x \in M \ominus N \ominus N, y \in N \ominus M \ominus N, \|x\| = \|y\| = ۱\} \\
= \;& \sup\{|\langle x,y\rangle| : x \in M \ominus N, y \in N, \|x\| = \|y\| = ۱\} \\
= \;& \sup\{|\langle x,y\rangle| : x \in M \ominus N, y \in N \ominus M, \|x\| = \|y\| = ۱\} \\
= \;& C[M \ominus N, N].
\end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$C[M \ominus N, N] = C[M, N \ominus M].$$

پس حکم ثابت می‌شود.

$\square$

گزاره ۲۱.۱. اگر $dim M < \infty$ آنگاه $C[M,N] < ۱$.

برهان. رجوع شود به [۱۴] گزاره ۲.۲. $\square$

لم ۲۲.۱. $M+N$ بسته است اگر وتنها اگر $(M\cap N)^{\perp} = M^{\perp}+N^{\perp}$ و $M^{\perp}+N^{\perp}$ بسته باشد.

برهان. رجوع شود به [۱۴]. $\square$

لم ۲۳.۱. هرگاه M و N زیرفضاهایی بسته از H باشند، احکام زیر هم ارزند:

۱- $C_{\circ}[M,N] < ۱$.

۲- $M\cap N = \{\circ\}$ و $M+N$ بسته است.

۳- برای هر $x\in M, y\in N$ یک مقدار $\rho > \circ$ موجود است به طوری که $\|x+y\| > \rho\|y\|$.

۴- $\inf\{d(y,M)|y\in N, \|y\| = ۱\} > \circ$.

برهان. اثبات (۱ $\longrightarrow$ ۲): فرض کنیم $C_{\circ} = C_{\circ}[M,N]$. چون $|\langle x,y\rangle| \leq C_{\circ}\|x\|\|y\|$، پس

$$\begin{aligned}\|x+y\|^{۲} &= \|x\|^{۲} + ۲Re\langle x,y\rangle + \|y\|^{۲}\\ &\geq \|x\|^{۲} - ۲|\langle x,y\rangle| + \|y\|^{۲}\\ &\geq \|x\|^{۲} - ۲C_{\circ}\|x\|\|y\| + \|y\|^{۲}\\ &= (\|x\| - \|y\|)^{۲} + ۲(۱ - C_{\circ})\|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

حال اگر $C_{\circ} < ۱$ آنگاه طبق قضیه (۲۵.۱)، $M\cap N = \{\circ\}$. پس اگر فرض کنیم $x_n \in M+N$ و $x_n \longrightarrow x$ آنگاه $x_n = z_n + y_n$ که $z_n\in M$ و $y_n \in N$ در نتیجه

$$\|x_n\|^{۲} = \|z_n + y_n\|^{۲} \geq (\|z_n\| - \|y_n\|)^{۲} + ۲(۱ - C_{\circ})\|x_n\|\|y_n\|.$$

چون دنباله $\{x_n\}$ کراندار است و $C_{\circ} < ۱$ لذا دنباله‌های $\{\|z_n\| - \|y_n\|\}$ و $\{\|z_n\|\|y_n\|\}$ کراندار است. در نتیجه دنباله‌های $\{\|z_n\|\}$و $\{\|y_n\|\}$ کراندارند. لذا $z\in M$ و $y\in N$ وجود دارند به طوری که

$$z_n \xrightarrow{w} z, y_n \xrightarrow{w} y.$$

(مفهوم همگرایی ضعیف در فضای هیلبرت) :

$\langle z_n, m\rangle \longrightarrow \langle z, m\rangle \quad (m \in H)$

$\langle y_n, n\rangle \longrightarrow \langle y, n\rangle \quad (n \in H)$

و چون $x_n \longrightarrow x$ یا $z_n + y_n \longrightarrow x$، لذا نتیجه می‌گیریم $x = z + y$ پس $M + N$ بسته است.

(۳ $\longrightarrow$ ۲): فرض کنید $M \cap N = \{\circ\}$ و $X := M + N$ بسته باشد آنگاه X یک فضای هیلبرت است. با استفاده از قضیه گراف بسته که نگاشت تصویر Q از X بروی M یا مشابه آن N پیوسته است، بنابراین برای هر $x \in M$ و $y \in N$:

$$\|x\| = \|Q(x+y)\| \leq \|Q\|\|x+y\|.$$

با انتخاب $\rho = \|Q\|^{-۱}$ حکم ثابت می‌شود.

(۴ $\longrightarrow$ ۳): اگر $P_M : H \longrightarrow M$ یک نگاشت تصویر عمود باشد، آنگاه برای هر $x \in H$ نزدیکترین نقطه یکتا به x در M به صورت زیر می‌باشد:

$$\|x - P_M x\| = d(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

حال اگر (۳) برقرار باشد یعنی برای هر $y \in N$ که در شرایط $\|x + y\| \geq \rho\|y\|$ صدق کند و $\|y\| = ۱$ با inf گرفتن روی تمام $x \in N$ داریم:

$$d(y, N) \geq \rho$$

چون $\rho := \inf\{d(y, M) : y \in N, \|y\| = ۱\} > \circ$ پس رابطه (۴) به دست می‌آید.

(۱ $\longrightarrow$ ۴): فرض کنیم رابطه (۴) برقرار باشد، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم (۱) برقرار نباشد پس $x_n \in M$ و $y_n \in N$ وجوددارند که $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow ۱$ و $\|y_n\| = \|x_n\| = ۱$. چون $\rho := \inf\{d(y, M) : y \in N, \|y\| = ۱\} > \circ$ پس

$$\rho^۲ \leq \|y_n - x_n\|^۲ = \|y_n\|^۲ - ۲Re\langle x_n, y_n\rangle + \|x_n\|^۲ = ۲(۱ - Re\langle x_n, y_n\rangle) \longrightarrow \circ$$

که این تناقض است. پس رابطه (۱) برقرار است. $\square$

گزاره ۲۴.۱. اگر $M, N \sqsubset H$ آنگاه احکام زیر هم ارزند:

۱- $C(M,N) < 1$.

۲- $M\cap (M\cap N)^{\perp} + N\cap (M\cap N)^{\perp}$ بسته است.

۳- $M+N$ بسته است.

برهان. (۱ $\leftrightarrow$ ۲): چون $C[M,N] = C_{\circ}[M\cap (M\cap N)^{\perp}, N\cap (M\cap N)^{\perp}]$
و $[M\cap (M\cap N)^{\perp}]\cap [N\cap (M\cap N)^{\perp}] = \{\circ\}$
با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۲) قضیه قبل $M\cap (M\cap N)^{\perp} + N\cap (M\cap N)^{\perp}$ بسته است.

(۲ $\leftrightarrow$ ۳): فرض کنیم $Y = M\cap (N\cap M)^{\perp}$ و $Z = N\cap (N\cap M)^{\perp}$ نشان می‌دهیم $Y+Z$ بسته است اگر وتنها اگر $M+N$ بسته باشد. ابتدا درستی روابط زیر را بررسی می‌کنیم.

$$Y+Z = M\cap (N\cap M)^{\perp} + N\cap (N\cap M)^{\perp} = (M+N)\cap (M\cap N)^{\perp}.$$

واضح است که

$$Y+Z \subseteq (M+N)\cap (M\cap N)^{\perp}. \tag{۱.۰.۱}$$

حال اگر $x\in (M+N)\cap (M\cap N)^{\perp}$ آنگاه $x = y+z$ که $y\in M$ و $z\in N$ چون $x\in (M\cap N)^{\perp}$ پس $P_{M\cap N}(x)$. بنابراین:

$$\begin{aligned} x = x - P_{M\cap N}(x) &= y - P_{M\cap N}(y) + z - P_{M\cap N}(z) \\ &\in M\cap (N\cap M)^{\perp} + M\cap (N\cap M)^{\perp}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(M+N)\cap (M\cap N)^{\perp} \subseteq Y+Z. \tag{۲.۰.۱}$$

از روابط (۱.۱.۳) و (۲.۰.۱) داریم:

$$Y+Z = (M+N)\cap (M\cap N)^{\perp}$$

حال ثابت می‌کنیم $M+N = (Y+Z)+M\cap N$. داریم:

$$(Y+Z)+M\cap N \subseteq M+N+M\cap N = M+N. \tag{۳.۰.۱}$$

حال اگر $x \in M+N$ آنگاه $y \in M$ و $z \in N$ موجود است به طوری که $x=y+z$،

$$\begin{aligned} x &= P_{M\cap N}(x)+P_{(M\cap N)^\perp}(x)\\ &= P_{M\cap N}(x)+P_{(M\cap N)^\perp}(y)+P_{(M\cap N)^\perp}(z)\\ &= P_{M\cap N}(x)+(y-P_{M\cap N}(y))+(z-P_{M\cap N}(z)) \qquad \text{چون } P_{M^\perp}=I-P_M\\ &\in M\cap N+M\cap(N\cap M)^\perp+N\cap(N\cap M)^\perp\\ &= (M\cap N)+(Y+Z) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$M+N\subseteq (M\cap N)+(Y+Z) \tag{۴.۰.۱}$$

ازروابط (۳.۰.۱) و (۴.۰.۱) داریم:

$$M+N=(M\cap N)+(Y+Z)$$

حال فرض کنیم $Y+Z$ بسته باشد از روابط $M+N=(Y+Z)+(M\cap N)$ و $Y+Z\subseteq (M\cap N)^\perp$ نتیجه می‌گیریم $M+N$ بسته است. زیرا اگر P_M و P_N جا به جایی باشند آنگاه $P_{\overline{M+N}}=P_M+P_N-P_MP_N$. در نتیجه اگر $M\subset N^\perp$ آنگاه $M+N$ بسته است و $P_{M+N}=P_M+P_N$.

□

گزاره ۲۵.۱. اگر $M,N\sqsubseteq H$ آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

۱- $0\le C[M,N]\le C_0[M,N]\le 1$.

۲- $C[M,N]=C_0[M\cap(N\cap M)^\perp, N\cap(N\cap M)^\perp]$.

۳- اگر $M\cap N=\{0\}$ آنگاه $C[M,N]=C_0[M,N]$ و $\alpha(M,N)=\alpha_0(M,N)$.

۴- اگر $M\cap N\neq\{0\}$ آنگاه $C_0[M,N]=1$.

برهان. با استفاده از تعریف $C[M,N]$ و $C_0[M,N]$ داریم $C[M,N]>0$. چون $M\cap(M\cap N)^\perp\subseteq M$ و به همین ترتیب $N\cap(M\cap N)^\perp\subseteq N$ ، پس $C[M,N]\le C_0[M,N]$

و چون

$$C_\circ[M,N]=\sup\{|\langle x,y\rangle| : x\in M, y\in N, \|x\|=۱, \|y\|=۱\}$$

و $\|x\|\|y\| < ۱$ پس $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\| < ۱$ و قسمت (۱) اثبات شد.

قسمت (۲) در گزاره (۲۰.۱) ثابت شد.

۳) اگر $M\cap N=\{\circ\}$ آنگاه $(M\cap N)^\perp = H$ و

$$M\cap (M\cap N)^\perp = M\cap H = M$$
$$N\cap (M\cap N)^\perp = N\cap H = N$$

در نتیجه $C[M,N]=C_\circ[M,N]$ و $\alpha(M,N)=\alpha_\circ(M,N)$

چون برای هردو زیر فضاها M و N می‌باشند.

۴) اگر $M\cap N\neq\{\circ\}$ باشد چون

$$C_\circ[M,N]=\sup\{|\langle x,y\rangle| : \|x\|=\|y\|=۱, x\in M, y\in N\}.$$

و $\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|$ پس $|\langle x,y\rangle| \leq ۱$ و با توجه به تعریف سوپریمم داریم $C_\circ[M,N]=۱$ و حکم ثابت می‌شود. زیرا اگر $C_\circ[M,N]<۱$ یکی از حالات $C_\circ[M,N]=\circ$ است که در این صورت $M\cap N=\{\circ\}$ و این با $M\cap N\neq\circ$ تناقض دارد. □

اگر P_M تصویر عمود بروی M باشد که $M\sqsubseteq H$ است آنگاه تصویر عمود بروی $M^\perp$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$P_{M^\perp}=I-P_M.$$

گزاره ۲۶.۱. احکام زیر هم ارزند:

۱- P_M و P_N جا به جایی اند یعنی $P_MP_N=P_NP_M$.

۲- $P_{M\cap N}=P_MP_N$.

۳- P_MP_N یک تصویر عمود است.