دانشکده علوم

گروه فیزیک

عنوان پایان نامه:

بررسی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های باز

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
فیزیک گرایش ذرات بنیادی

استاد راهنما:

دکتر محسن سربیشه‌ای

استاد مشاور:

دکتر صفا جامی

نگارش:

وحید پریشانی فروشانی

تیر ماه ۱۳۸۸

از زحمات دلسوزانهٔ استاد گرانقدر آقای دکتر محسن سربیشه‌ای که شکوه دانش آموختگی از ایشان برای من بسیار گرانبهاست، نهایت سپاس را به جا می‌آورم.

از یاری‌های استاد فرزانه سرکار خانم دکتر صفا جامی که افتخار همراهی با ایشان برایم بسیار با ارزش بود، نهایت تشکر را دارم.

از اساتید گرامی آقایان دکتر محمد ابراهیم زمردیان و دکتر کوروش جاویدان که زحمت مطالعهٔ این پایان نامه را بر عهده گرفته‌اند کمال سپاسگزاری را دارم.

از کلیهٔ اساتید گروه فیزیک دانشگاه فردوسی مشهد سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر ایمان سرگلزهی و آقای میرافضلی و کلیهٔ دوستان و همراهان همیشگی‌ام که بدون هیچ چشمداشتی به من یاری رساندند، نهایت سپاسگزاری و تشکر را بجا می‌آورم.

همچنین از دفتر گروه فیزیک به ویژه سرکار خانم‌ها اکبری و عصمت‌مدار بسیار سپاسگزارم.

در پایان از جناب آقای مفید بحرانی از اساتید محترم دانشگاه علوم پزشکی مشهد بخاطر حمایت بی دریغشان کمال سپاسگزاری را دارم.

وحید پریشانی فروشانی

چکیده :

درهم‌تنیدگی نقشی اساسی در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی، همچون فرآیندهای فرابرد کوانتومی، کدگذاری چگال و رمزنگاری کوانتومی ایفا می‌کند. بنابراین بررسی دینامیک آن در سیستم‌های فیزیکی باز مختلف دارای اهمیت اساسی است. برای بررسی دینامیک سیستم‌های باز کوانتومی، می‌توان از روش ابرعملگرها (عملگرهای کراوس) یا از معادلات Master، Langevin یا Stochastic Differential استفاده نمود. در قسمت‌های مختلف این پایان‌نامه از روش عملگرهای کراوس و معادله Master استفاده شده است.

با توجه به پیشرفت‌های نظری و تجربی در زمینهٔ اپتیک کوانتومی، بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی در سیستم‌های باز اپتیکی دارای اهمیت ویژه است. یکی از حالت‌های اصلی مورد بحث در اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس می‌باشد. حالت‌های همدوس حالت‌هایی هستند که دینامیک آنها بیشترین شباهت را به رفتار کلاسیکی نوسانگر هماهنگ دارد.

در این پایان‌نامه دینامیک درهم‌تنیدگی یک سیستم باز دوجزئی متشکل از حالت‌های همدوس را در شرایط مختلف فیزیکی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بررسی این سیستم علاوه بر پدیدهٔ آشنای میرایی ناگهانی درهم‌تنیدگی (میرایی درهم‌تنیدگی در زمانی بسیار کوتاه‌تر از میرایی همدوسی سیستم)، به پدیدهٔ جالب تولد ناگهانی درهم‌تنیدگی (بازتولید درهم‌تنیدگی پس از نابودی آن) نیز برمی‌خوریم.

عنوان	صفحه

فصل اول

مفاهیمی از اپتیک کوانتومی

در این فصل پس از ذکر مقدمات، تعریف حالت همدوس و حالت فشرده را ارائه می‌دهیم.

مقدمه

حالت‌های همدوس[۱] برای اولین بار توسط شرودینگر در سال ۱۹۲۶ در رابطه با حالت‌های کلاسیک نوسانگر هماهنگ کوانتومی پیشنهاد شدند. این حالت‌ها، حالت‌هایی هستند که دینامیک آنها بیشترین شباهت به رفتار کلاسیکی نوسانگر هماهنگ را دارد. بین سال‌های ۱۹۲۶ تا ۱۹۶۳ فعالیت دراین زمینه عملا راکد ماند تا در این سال توسط گلوبر[۲] و سودرشان[۳] کاربردهایی از این حالت‌ها در اپتیک کوانتومی ارائه گردید. آنها میدان نور را به صورت یک مجموعه از نوسانگرهای هماهنگ در نظر گرفتند بطوریکه حالت‌های عددی تعداد ذرات نور در هر مد نوسانگر را معرفی می‌کرد. حالت‌های همدوس در واقع ویژه حالت‌های عملگر نابودی نوسانگر هماهنگ می‌باشند که توسط گلوبر به منظور مطالعه توابع همبسته الکترومغناطیس مورد استفاده قرار گرفتند. در دهۀ ۱۹۷۰ میلادی به حالت‌های فشرده که در ابتدا حالات همدوس تعمیم‌یافته یا حالت‌های همدوس دو فوتونی[۴] نامیده می‌شدند، توجه بیشتری شد.

۱-۱. حالت‌های عددی نوسانگر هماهنگ (حالت‌های فوک[۵])

حالت‌های عددی در مکانیک کوانتومی، ویژه حالت‌های هامیلتونی میدان آزاد هستند. این نام به افتخار V.A.Fock است.

عملگر شمارش[۶] N را که تعداد فوتون‌های موجود را در مد nام نوسانگر هماهنگ می‌دهد به صورت $N_m = a_m^\dagger a_m$ تعریف می‌کنیم. که در آن $a^\dagger$ ، a به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی می‌باشند. حالت کلی سیستم از ضرب تانسوری بردارهای حالت هر مد حاصل می‌شود. اگر هامیلتونی و عمگر شمارش را در این پایه‌ها نمایش دهیم، قطری خواهد شد. روابط زیر را برای یک مد خاص داریم:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad , \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad ۱-۱$$

---

[1] Coherent states

[2] Glauber

[3] Sudarshan

[4] Two photon coherent state

[5] Fock states

[6] Number operator

$$N\,|n\rangle = a^{\dagger}a\,|n\rangle = n\,|n\rangle \qquad ۱-۲$$

$$H\,|n\rangle = \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \tfrac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n\,|n\rangle \qquad ۱-۳$$

برای بدست‌آوردن kاُمین مد، $|n_k\rangle$، از حالت خلاء می‌بایست k بار عمگر خلق $a^{\dagger}$ را بر حالت خلاء تاثیر داد.

$$|n_k\rangle = \frac{\left(a_k^{\dagger}\right)^{n_k}}{\sqrt{n_k\,!}}|۰\rangle \qquad , \qquad n_k = ۰,1,2,... \qquad ۱-۴$$

۱. خصوصیات حالت‌های عددی نوسانگر هماهنگ (حالت‌های فوک)

۱. حالت‌های عددی (حالت‌های فوک) متعامد هستند. $\langle n_k\,|m_k\rangle = \delta_{nm}$

۲. حالت‌های عددی (حالت‌های فوک) مجموعهٔ کامل هستند. $\sum_{n=۰}^{\infty}|n_k\rangle\langle n_k| = 1$

۳. عدم قطعیت عملگر N برای این حالت‌ها صفر است. یعنی مولفه‌های آن نوسان ندارند[۱-۷].

۱-۲. *حالت‌های همدوس*

حالت‌های همدوس توسط گلاوبر و سودارشَن به عنوان ویژه حالت‌های عمگر نابودی a معرفی شدند[۳،۷]. بنابراین حالت‌های همدوس، ویژه حالت‌های یک مشاهده‌پذیر فیزیکی نیستند. برای حالت همدوس $|\alpha\rangle$، برای مورد تک‌مُدی داریم:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad ۱-۵$$

که در آن α می‌تواند هر عدد مختلطی باشد.

هر حالت همدوس را می‌توان بر حسب حالت‌های عددی (فوک) بسط داد:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=۰}^{\infty} C_n\,|n\rangle \qquad ۱-۶$$

که با قرار دادن در معادله (۱-۵) داریم

$$\left.\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a|\alpha\rangle &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,|n\rangle \end{aligned}\right\} \quad C_n\sqrt{n} = \alpha C_{n-1} \quad \Rightarrow \quad C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0 \qquad ۱-۷$$

برای پیدا کردن ضریب C_0 از شرط بهنجارش استفاده می‌کنیم

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |C_0|^2 \sum_n \frac{(\alpha)^{2n}}{n!} = |C_0|^2 \exp|\alpha|^2 \qquad ۱-۸$$

در نتیجه بسط حالت همدوس بر حسب حالت‌های فوک را می‌توان به صورت زیر نوشت [۶،۷].

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad ۱-۹$$

۱. خواص حالت همدوس

حالت‌های همدوس دارای خواصی هستند که آنها عبارتند از:

i. حالت‌های همدوس دارای کمینه عدم قطعیت هستند.

اگر عملگرهای x و p را برحسب عملگرهای خلق و نابودی باز نویسی کنیم.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega x + ip) \quad , \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega x - ip) \qquad ۱-۱۰$$

برای محاسبهٔ اصل عدم قطعیت[7] هایزنبرگ، $(\Delta x)^2(\Delta y)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$ ، خواهیم داشت:

$$\langle x\rangle_\alpha = \sqrt{\hbar/2\omega}\,\langle\alpha|(a+a^\dagger)|\alpha\rangle = \sqrt{\hbar/2\omega}\left(\alpha+\alpha^*\right) \qquad ۱-۱۱$$

$$\left\langle x^2\right\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2\omega}\langle\alpha|\left(a+a^\dagger\right)^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2\omega}\left(1+\left(\alpha+\alpha^*\right)^2\right) \qquad ۱-۱۲$$

$$(\Delta x)_\alpha^2 = \left\langle x^2\right\rangle_\alpha - \langle x\rangle_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2\omega} \qquad ۱-۱۳$$

[7] Heisenberg uncertainty principle

برای تکانهٔ، p نیز رابطهٔ مشابهی بدست می‌آید

$$(\Delta p)_{\alpha}^{2}=\frac{\hbar\omega}{2}$$ ۱۴-۱

در نتیجه

$$(\Delta x)_{\alpha}^{2}(\Delta p)_{\alpha}^{2}=\frac{\hbar^{2}}{4}$$ ۱۵-۱

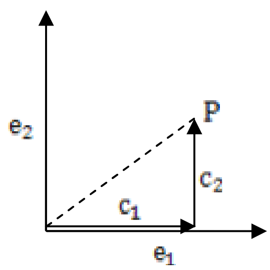
که نشان می‌دهد حالت همدوس دارای کمینه عدم قطعیت هستند [۲،۴،۷] .

ii. *حالت‌های همدوس متعامد نیستند* ***[۳،۴،۷].***

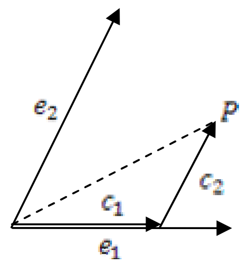
$$\begin{aligned}\langle\alpha|\beta\rangle&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^{2}+|\beta|^{2}\right)\right)\sum_{n,m}\langle m|\frac{\alpha^{n}\beta^{*m}}{\sqrt{n!m!}}|n\rangle\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha-\beta|^{2}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left(\alpha\beta^{*}-\alpha^{*}\beta\right)\right)\end{aligned}$$ ۱۶-۱

$$\left|\langle\alpha|\beta\rangle\right|^{2}=\exp\left(-|\alpha-\beta|^{2}\right)$$ ۱۷-۱

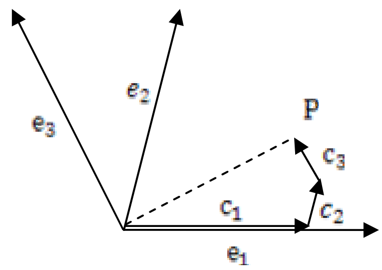
iii. *حالت‌های همدوس یک مجموعهٔ فوق کامل[۸] هستند.*



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

نمایش نقطه p در صفحه مختصات با استفاده از مولفه‌های بردار مکان:

شکل (۱): پایه‌ها متعامد و مستقل خطی هستند و مجموعه کاملی را تشکیل می‌دهند، نمایش $r=c_1e_1+c_2e_2$ یکتا می‌باشد. شکل (۲): پایه‌ها نامتعامد هستند ولی هنوز استقلال خطی دارند و مجموعه کاملی تشکیل می-

[8] Over complete

دهند، نمایش $r=c_1e_1+c_2e_2$ یکتا می‌باشد. شکل (۳): پایه‌ها، e_1,e_2,e_3 ، نامتعامد هستند و مجموعه فوق کاملی را تشکیل می‌دهند که هر کدام از پایه‌ها می‌توانند ترکیبی از پایه‌های دیگر باشد بنابراین، نمایش $r=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$ یکتا نمی‌باشد. برای پایه‌های شکل (۳)، مجموعهٔ فوق‌کامل را با از بین بردن یکی از پایه‌ها می‌توان به مجموعه کامل تبدیل کرد ولی این کار در حالت کلی ساده نمی‌باشد.

برای بدست آوردن رابطهٔ کامل بودن[۹] برای حالت‌های همدوس به روش زیر عمل می‌کنیم.

$$\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\int d^2\alpha \exp\left(-|\alpha|^2\right)\alpha^n\alpha^{*m} \qquad ۱۸-۱$$

با قرار دادن:

$$\alpha = r\exp(i\phi) \qquad \Rightarrow \qquad d^2\alpha = rdrd\phi \qquad ۱۹-۱$$

داریم

$$\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\int dr\ \ r^{n+m+1}\exp\left(-|r|^2\right)\int d\phi\ \exp\left(i\ (n-m)\phi\right) \qquad ۲۰-۱$$

با توجه به اینکه:

$$2\delta_{n,m} = \frac{1}{\pi}\int d\phi\ \exp\left(i\ (n-m)\phi\right) \qquad ۲۱-۱$$

$$\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \qquad ۲۲-۱$$

که نشان می‌دهد حالت‌های همدوس فوق کامل‌اند [۳،۶،۸].

iv. عملگر جابجایی[۱۰]

حال عملگر $D(\alpha)=\exp\left(\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*}a\right)$، که عملگر جابجایی نامیده می شود را معرفی می‌کنیم. می‌توان نشان داد حالت‌های همدوس از تاثیر عملگر جابجایی بر حالت خلاء حاصل می‌شوند Glauber [۳،۴،۷،۸].

برای این منظور از اتحاد بکر، هاستروف و کمپل استفاده می‌کنیم.

---

[9] Complete

[10] Displacement

$$\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)\exp\left(-\frac{1}{2}[A,B]\right)$$ ۲۳-۱

$$D(\alpha)|\circ\rangle=\exp\left(\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*}a\right)|\circ\rangle=\exp\left(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}\right)\exp\left(\alpha a^{\dagger}\right)\exp\left(-\alpha^{*}a\right)|\circ\rangle$$ ۲۴-۱

اثر بخش اول می‌دهد:

$$\exp\left(-\alpha^{*}a\right)|\circ\rangle=\left(1-\alpha^{*}a+\left(\alpha^{*}a\right)^{2}/2!-\dots\right)|\circ\rangle=|\circ\rangle$$ ۲۵-۱

بخش دوم را به صورت بسط زیر می‌نویسیم.

$$\exp\left(\alpha a^{\dagger}\right)|\circ\rangle=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{n!}\left(a^{\dagger}\right)^{n}|\circ\rangle$$ ۲۶-۱

$$\left(a^{\dagger}\right)^{n}|\circ\rangle=\sqrt{n!}\,|n\rangle$$ ۲۷-۱

$$D(\alpha)|0\rangle=|\alpha\rangle$$ ۲۸-۱

با توجه به بسط زیر خواهیم داشت:

$$\exp(\varepsilon A)B\exp(-\varepsilon A)=B+\varepsilon[A,B]+\frac{\varepsilon^{2}}{2!}\left[A,[A,B]\right]+\dots$$ ۲۹-۱

$$D^{\dagger}(\alpha)aD(\alpha)=a+\alpha \quad , \quad \left[\alpha a^{\dagger}+\alpha^{*}a,a\right]=\alpha$$ ۳۰-۱

$$D^{\dagger}(\alpha)a^{\dagger}D(\alpha)=a^{\dagger}+\alpha^{*} \quad , \quad \left[\alpha a^{\dagger}+\alpha^{*}a,a^{\dagger}\right]=\alpha^{*}$$ ۳۱-۱

برای تابعی از عملگرهای خلق و فنا داریم:

$$D^{\dagger}(\alpha)F\left(a,a^{\dagger}\right)D(\alpha)=F\left(a+\alpha,a^{\dagger}+\alpha^{*}\right)$$ ۳۲-۱

از ضرب دو عملگر جابجایی یک عملگر جابجایی با یک ضریب فاز حاصل می‌شود. جابجایی کل برابر مجموع جابجایی‌های جداگانه می باشد[۳،۴،۷]. بطور مثال:

$$D(\alpha)D(\alpha')=\exp\left(\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*}a\right)\exp\left(\alpha' a^{\dagger}-\alpha'^{*}a\right)$$
$$D(\alpha)D(\alpha')=\exp\left(\left(\alpha+\alpha'\right)a^{\dagger}-\left(\alpha^{*}+\alpha'^{*}\right)a\right)\exp\left(\left(\alpha\alpha'^{*}-\alpha^{*}\alpha'\right)/2\right)$$ ۳۳-۱

جملهٔ $\alpha\alpha'^{*}-\alpha^{*}\alpha'$ موهومی محض است، که به عنوان یک ضریب فاز قبل از $D\left(\alpha+\alpha'\right)$ قرار می‌گیرد. درنتیجه می‌توان تاثیر یک عملگر جابجایی $D\left(\alpha'\right)$ را روی حالت همدوس بصورت مجموع دو جابجایی با یک ضریب فاز در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} D\left(\alpha'\right)\left|\alpha''\right\rangle &= D\left(\alpha'\right)D\left(\alpha''\right)\left|\circ\right\rangle = \exp\left(\left(\alpha'\alpha''^{*}-\alpha'^{*}\alpha''\right)\big/2\right)D\left(\alpha'+\alpha''\right)\left|\circ\right\rangle \\ &= \exp\left(\left(\alpha'\alpha''^{*}-\alpha'^{*}\alpha''\right)\big/2\right)\left|\alpha'+\alpha''\right\rangle \end{aligned} \quad ۳۴-۱$$

دو عملگر جابجایی متفاوت $D\left(\alpha\right)$ و $D\left(\alpha'\right)$ متعامد هستند.

$$Tr\left[D\left(\alpha\right)D^{\dagger}\left(\alpha'\right)\right]=\pi\delta^{2}\left(\alpha-\alpha'\right) \quad ۳۵-۱$$

در اینجا $\delta^{2}(\alpha)$ برابر $\delta\left(\mathrm{Re}[\alpha]\right)\delta\left(\mathrm{Im}[\alpha]\right)$ است [۸].

۷. *آمار فوتونی [۳،۴،۷].*

احتمال اینکه یک حالت همدوس $\left|\alpha\right\rangle$ دارای تعداد n فوتون باشد برابر است با:

$$\left\langle n\middle|\alpha\right\rangle=\sum_{n}\exp\left(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}\right)\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}}\left\langle n\middle|n\right\rangle \quad ۳۶-۱$$

در نتیجه توزیع تعداد فوتون‌ها در هر حالت همدوس به صورت زیر در می‌آید.

$$P_{n}\equiv\left|C_{n}\right|^{2}=\left|\left\langle n\middle|\alpha\right\rangle\right|^{2}=\exp\left(-|\alpha|^{2}\right)\frac{\alpha^{2n}}{n!} \quad ۳۷-۱$$

مشاهده می‌کنیم این توزیع پواسون[۱۱] است. تعداد متوسط فوتون‌ها برابر است با

$$\left\langle n\right\rangle=\left\langle\alpha\middle|a^{\dagger}a\middle|\alpha\right\rangle=|\alpha|^{2} \quad ۳۸-۱$$

$$\left\langle n^{2}\right\rangle=\left\langle\alpha\middle|a^{\dagger}aa^{\dagger}a\middle|\alpha\right\rangle=\left\langle\alpha\middle|a^{\dagger}a\middle|\alpha\right\rangle+\left\langle\alpha\middle|a^{\dagger 2}a^{2}\middle|\alpha\right\rangle=|\alpha|^{2}+|\alpha|^{4} \quad ۳۹-۱$$

واریانس تعداد فوتون‌ها عبارتست از

$$\left(\Delta n\right)^{2}=\left\langle n^{2}\right\rangle-\left\langle n\right\rangle^{2}=\left\langle n\right\rangle \quad ۴۰-۱$$

---

[11] Poisson

۱-۳. حالت‌های فشرده [۵].

در سال ۱۹۲۶ میلادی ارل هس کنارد[12] تحول زمانی سه سیستم زیر را مورد بررسی قرار داد[۹].

۱. ذره باردار در میدان الکتریکی.
۲. ذره باردار در میدان مغناطیسی.
۳. تابع گاوسی در پتانسیل نوسانگرهماهنگ (که به پیدایش حالات فشرده انجامید).

کنارد متوجه شد حالت‌های بالا دارای شرایط زیر هستند.

۱- حاصل‌ضرب عدم قطعیت‌های مکان x و اندازه حرکت خطی p این سیستم‌ها مقدار ثابتی است.

۲-مقدار کمینهٔ حاصل‌ضرب عدم قطعیت‌ها با $\sin^2 2t$ که در آن t زمان است، تغییر می‌کند.

۳-حاصل‌ضرب عدم قطعیت‌های مکان x و اندازه حرکت خطی p آنها در هر نیم دوره دو بار کمینه می‌شود.

۴-حالت‌هایی که برای آنها عدم قطعیت‌ها با هم برابر می‌شوند، حالت‌های همدوس نامیده می‌شود.

در واقع او دریافت که این حالت‌ها حرکت کلاسیکی داشته و نیز گاوسی هستند ولی پهنای آنها بر خلاف حالت پایهٔ نوسانگر هماهنگ ، با زمان نوسان می‌کند[۱۰].

اما این مقاله سال‌های بسیاری مسکوت ماند زیرا به نظر می‌رسید که این حالت‌ها سال‌ها پیش از زمان خود کشف شده بودند. در دههٔ ۱۹۷۰ میلادی به حالت‌های فشرده[13] که در ابتدا حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته[14] و حالت‌های همدوس دو فوتونی نامیده می‌شدند ، توجه بیشتری شد. در دههٔ ۱۹۸۰ میلادی کاربرد واژهٔ " حالت فشرده " عمومیت یافت و در اواسط این دهه بود که نور فشرده[15] [۱۱] برای نخستین بار توسط اسلاشر[16] و همکارانش از آزمایشگاه بل گزارش شد[۱۲]. در سال‌های اخیر از جنبهٔ نظری و تجربی توجه فراوانی

[12] Earle Hesse Kennard

[13] Squeezed vacuum states

[14] Generalized coherent state

[15] Squeezed light

[16] Slusher

به حالت‌های فشرده شده است. این امید وجود دارد که این حالت‌ها در ایجاد ارتباط نوری با استفاده از فیبر نوری، راه موثرتری را در انتقال اطلاعات ایجاد کنند. همچنین این حالت‌ها می‌توانند اهمیت فوق‌العاده‌ای در آشکارسازی امواج گرانشی با تداخل‌سنج‌های نوری داشته باشند.

فشردگی یک اثر غیر کلاسیکی است که در میدان‌های نوری ظاهر می‌شود. معمولا در یک محیط غیر-خطی که با میدان نوری برهمکنش دارد، فشردگی ظاهر می‌شود. برای مثال یک هامیلتونی مربعی[۱۷] می‌تواند اثر فشردگی ایجاد کند[۱۳]:

$$H\left(a,a^{\dagger},t\right)=\hbar\omega a^{\dagger}a+\hbar f\ (t)\left[\left(a^{\dagger}\right)^{2}+a^{2}\right] \qquad ۴۱-۱$$

که در آن $f\ (t)$ یک تابع حقیقی از زمان است.

دو عملگر جدید X و Y را به صورت زیر معرفی می‌کنیم [۳-۸]:

$$X=\frac{a+a^{\dagger}}{2}=\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q \quad , \quad Y=\frac{a-a^{\dagger}}{2}=\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}p \qquad ۴۲-۱$$

این دو عملگر هرمیتی هستند و رابطهٔ جابجایی آنها به صورت $[X,Y]=i/2$ می‌باشد. لذا رابطه زیر برقرار است:

$$\left\langle(\Delta X)^{2}\right\rangle\left\langle(\Delta Y)^{2}\right\rangle\geq\frac{1}{16} \qquad ۴۳-۱$$

که برای حالت‌های همدوس با توجه به روابط بخش قبل داریم

$$\left\langle(\Delta X)^{2}\right\rangle=\frac{1}{4} \quad , \quad \left\langle(\Delta Y)^{2}\right\rangle=\frac{1}{4} \qquad ۴۴-۱$$

i. عملگر فشردگی و حالت همدوس فشرده

عملگر فشردگی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$S(\xi)=\exp\left(\frac{1}{2}\left(\xi^{*}a^{2}-\xi a^{\dagger 2}\right)\right) \qquad ۴۵-۱$$

---

[17] Quadratic operator

که در آن $\xi \equiv r\exp(i\theta)$ یک عدد مختلط است و پارامتر فشردگی نامیده می‌شود. این عملگر یک عملگر یکانی است.

حال عملگرهای تعمیم یافته خلق و نابودی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} A &= S(\xi)aS^{\dagger}(\xi) = a\cosh r + a^{\dagger}\exp(i\theta)\sinh r \equiv \mu a + \nu a^{\dagger} \\ A^{\dagger} &= S(\xi)a^{\dagger}S^{\dagger}(\xi) = a\cosh r - a^{\dagger}\exp(-i\theta)\sinh r \end{aligned}\right\} \qquad ۴۶-۱$$

که در آن $\mu \equiv \cosh r$، $\nu \equiv \exp(i\theta)\sinh r$ و رابطهٔ جابجایی زیرا برای عملگر خلق و نابودی تعمیم‌یافته داریم$\left[A, A^{\dagger}\right] = 1$. می‌توان عملگرهای خلق و نابودی را برحسب عملگرهای خلق نابودی تعمیم‌یافته به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\begin{cases} a = \mu A - \nu A^{\dagger} \\ a^{\dagger} = \mu A^{\dagger} - \nu^{*} A \end{cases} \quad , \qquad |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \qquad ۴۷-۱$$

حالت فشرده همدوس از اثر عملگر جابجایی و عملگر فشردگی بر حالت خلاء بدست می آید [۳،۷،۸].

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle \qquad ۴۸-۱$$

ii. حالت فشرده به عنوان ویژه حالت عملگر نابودی تعمیم یافته

حال نشان می‌دهیم که حالت‌های فشرده ویژه حالت‌های عملگر نابودی تعمیم‌یافتـه مـی‌باشـند[۳]. بـرای این کار:

$$A|\alpha, \xi\rangle = AD(\alpha)S(\xi)|0\rangle = S(\xi)aS^{\dagger}(\xi)D(\alpha)S(\xi)|0\rangle \qquad ۴۹-۱$$

می‌توان اثبات کرد که

$$D(\alpha)S(\xi) = S(\xi)D(\beta) \qquad ۵۰-۱$$

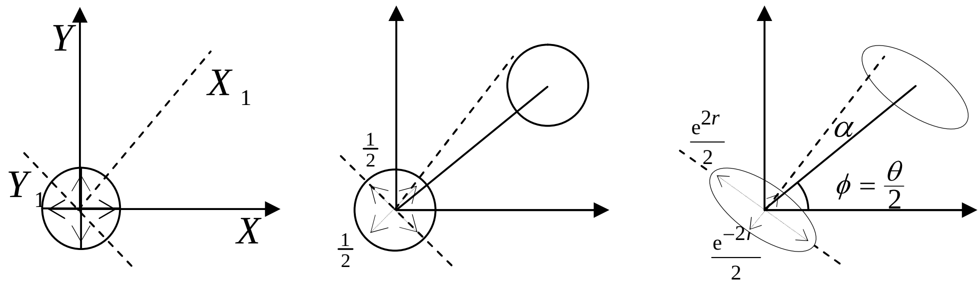
که در آن β به صورت زیر تعریف شده است.

$$\beta \equiv \alpha\cosh r + \alpha^{*}\exp(i\theta)\sinh r \qquad ۵۱-۱$$

با قرار دادن رابطهٔ (۱-۵۰) در رابطهٔ (۱-۴۹)، داریم

$$\begin{aligned} A|\alpha, \xi\rangle &= S(\xi)aD(\beta)|0\rangle = S(\xi)a|\beta\rangle \\ &= \beta S(\xi)|\beta\rangle = \beta S(\xi)D(\beta)|0\rangle = \beta D(\alpha)S(\xi)|0\rangle = \beta|\alpha, \xi\rangle \end{aligned} \qquad ۵۲-۱$$

یک حالت فشرده در فضای فاز با فشرده شدن حالت خلاء که به صورت یک حلقه نمایش داده می‌شـود و تبدیل آن به یک بیضی و همچنین دوران به اندازه $\frac{\theta}{2}$ که در نهایت به اندازه α جابجا می‌شود نمـایش داده مـی-شود[۳-۸].



حالت خلاء　　حالت همدوس　　حالت فشردهٔ همدوس

شکل ۴

iii. نوسان‌های عملگر تربیع[18]

مقدار چشمداشتی عملگر تربیع ΔX و ΔY نسبت به حالت‌های فشرده عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Delta X_1^2 \right\rangle_{Sq} &= \langle \circ | S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha) \Delta X_1 D(\alpha) D^\dagger(\alpha) \Delta X_1 D(\alpha) S(\xi) | \circ \rangle \\
&= \langle \circ | S^\dagger(\xi) \frac{1}{4} [\exp(-i\phi)(a + \alpha - \langle a \rangle) + \exp(-i\phi)(a^\dagger + \alpha^* - \langle a^\dagger \rangle)]^2 S(\xi) | \circ \rangle \\
&= \frac{1}{4} \langle \circ | S^\dagger(\xi) [\exp(-i\phi) a + \exp(-i\phi) a^\dagger]^2 S(\xi) | \circ \rangle \\
&= \frac{1}{4} [\exp(-i2\phi) \langle \alpha, \circ | a^2 | \circ, \xi \rangle + \exp(i2\phi) \langle \alpha, \circ | a^{\dagger 2} | \circ, \xi \rangle + 1 + 2 \langle \alpha, \circ | a^\dagger a | \circ, \xi \rangle
\end{aligned}
\qquad ۵۶\text{-}۱
$$

به ازای $\theta = 2\phi$ داریم

18 Quadrature

$$\left\langle \Delta X_1^2 \right\rangle_{Sq} = \frac{1}{4}[1 + 2\sinh^2 r - 2\cosh r \sinh r] = \frac{\exp(-2r)}{4} \qquad ۵۸-۱$$

بطور مشابه:

$$\left\langle \Delta Y_1^2 \right\rangle_{Sq} = \frac{\exp(2r)}{4} \qquad ۵۹-۱$$

با قرار دادن روابط (۱-۵۸) و (۱-۵۹) در معادلات $\left(\Delta X^2\right)$ و $\left(\Delta Y^2\right)$ ، عبارات زیر بدست می‌آید.

$$\left\langle \Delta X^2 \right\rangle_{Sq} = \frac{1}{4}[\exp(-2r)\cos^2\frac{\theta}{2} + \exp(2r)\sin^2\frac{\theta}{2}] \qquad ۶۰-۱$$

$$\left\langle \Delta Y^2 \right\rangle_{Sq} = \frac{1}{4}[\exp(-2r)\sin^2\frac{\theta}{2} + \exp(2r)\cos^2\frac{\theta}{2}] \qquad ۶۱-۱$$

که نشان می‌دهد واریانس مستقل از دامنه همدوس α می‌باشد.

برای اینکه شرط فشردگی برای عملگر تربیع X برقرار باشد، یعنی داشته باشیم.

$$\left\langle (\Delta X)^2 \right\rangle_{Sq} < \frac{1}{4} \qquad ۶۲-۱$$

باید $\tanh r \rangle \cos\theta$ باشد. مقدار کمینهٔ آن برای $\theta = ۰$ عبارت است از

$$\left\langle (\Delta X)^2 \right\rangle_{Sq} = \frac{\exp(-2r)}{4} \qquad ۶۳-۱$$

بطور

مشابه شرط فشردگی برای Y عبارت است از $\cos\theta < -\tanh r$. به آسانی عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$\left\langle (\Delta X)^2 \right\rangle_{Sq} \left\langle (\Delta Y)^2 \right\rangle_{Sq} = \frac{1}{16}\left[\cosh^2(2r)\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] \qquad ۶۴-۱$$

که رابطهٔ فوق به ازای مقادیر $\theta = ۰$ یا $\theta = \pi$ کمینه می‌شود[۳،۶].

$$\left\langle (\Delta X)^2 \right\rangle_{sq} \left\langle (\Delta Y)^2 \right\rangle_{sq} = \frac{1}{4} \qquad ۶۵-۱$$

iv. آمار فوتونی

توزیع فوتون در یک حالت فشرده همدوس به صورت زیر می‌باشد.

$$P_n = \left|\langle n | \alpha, \xi \rangle\right|^2 \qquad ۶۶-۱$$

که پس از محاسبه داریم:

$$\langle n|\alpha,\xi\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!\cosh r}}\left[\frac{1}{2}\exp(i\theta)\tanh r\right]^{\frac{n}{2}}\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha^2|+\alpha^{*2}\exp(i\theta)\tanh r\right)\right]H_n\left[\frac{\alpha+\alpha^*\exp(i\theta)\tanh r}{\sqrt{2\exp(i\theta)\tanh r}}\right] \qquad ۶۷-۱$$

که در آن H_n تابع هنکل از مرتبهٔ n می‌باشد [۳،۷].

v. حالت‌های فشردهٔ چند مُدی

یک حالت فشرده را می‌توان به صورت زیر از حالت خلاء بدست آورد[۳].

$$|\alpha_+,\alpha_-,\xi\rangle=D_+(\alpha_+)D_-(\alpha_-)S(\xi)|0\rangle \qquad ۷۰-۱$$

که در آن

$$D_\pm(\alpha_\pm)=\exp\left[\alpha_\pm a^\dagger{}_\pm-\alpha^*_\pm a_\pm\right] \qquad ۷۱-۱$$

و

$$S_{+-}(\xi)a_\pm S^\dagger{}_{+-}(\xi)=a_\pm\cosh r+a^\dagger{}_\mp\exp(i\theta)\sinh r \qquad ۷۲-۱$$

است و با استفاده از آنها می‌توان مقادیر چشمداشتی زیر را بدست آورد:

$$\langle a_\pm\rangle=\alpha_\pm \quad , \quad \langle a_+a_-\rangle=\alpha_+\alpha_--\exp(i\theta)\sinh r\cosh r=\langle a_-a_+\rangle$$
$$\langle a_+a_+\rangle=\alpha^2 \ , \quad \langle a^\dagger{}_+a_+\rangle=|\alpha_+|^2+\sinh^2 r \qquad ۷۱-۱$$

vi. شکل صریح حالت‌های فشرده در پایه‌های عددی (فوک)

همانطور که می‌دانیم حالت‌های فشردهٔ عددی از اعمال عملگر فشردگی $S(\zeta)$ بر روی حالت‌های پایهٔ عددی نوسانگر هماهنگ بدست می‌آیند.

$$|\zeta\rangle=S(\zeta)|0\rangle=\exp\left(\frac{1}{2}\zeta^*a^2-\frac{1}{2}\zeta a^{\dagger 2}\right)|0\rangle \qquad ۷۲-۱$$