بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه الزهرا (س)

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض

عنوان

متریک زیرمنظمی زیردیفرانسیل محدب در فضاهای باناخ

استاد راهنما

دکتر داریوش بهمردی

استاد مشاور

دکتر مریم ربیعی

دانشجو

فرزانه حیدری

دی۹۳

کلیه دستاوردهای این تحقیق
متعلق به دانشگاه الزهرا (س) است.

قدردانی و تشکر

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. از استاد فرهیخته و بزرگوارم، جناب آقای دکتر داریوش بهمردی که در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه با حوصله و حسن خلق همیشگی‌شان مرا راهنمایی نمودند و همواره با سعه‌ی صدر پاسخ‌گوی پرسش‌هایم بودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از سرکار خانم دکتر مریم ربیعی استاد عزیز و ارجمندم که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

در پایان سپاس و تشکر ویژه‌ی خود را به خانواده عزیزم به ویژه مادر مهربانم که در تمام دوران تحصیل بزرگ‌ترین پشتوانه‌های زندگی‌ام بودند، تقدیم می‌نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه مفهوم‌های منظمی، یعنی زیرمنظمی متری، زیرمنظمی قوی متری، منظمی متری، منظمی قوی متری را برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار بیان می‌کنیم. علاوه بر این، ویژگی‌های زیرمنظمی زیردیفرانسیل تابع‌های محدب نیم پیوسته پایینی را در فضاهای باناخ مطالعه می‌کنیم، زیرمنظمی متری و زیرمنظمی قوی متری زیردیفرانسیل را به طور دقیق مورد بررسی قرار می‌دهیم. و هرکدام از این دو ویژگی را بر حسب شرط رشد تابع مشخص می‌کنیم.

کلمات کلیدی. نگاشت مجموعه‌مقدار، زیردیفرانسیل، منظم متری، زیرمنظم متری، زیرمنظم قوی متری، شرط رشد درجه دو

فهرست مطالب

ذ

مقدمه

در سال ۲۰۰۸، فرانسیسکو آراگون آرتاچو [۱] و میچل جئوفروی [۲]، در مرجع [۱]، یک ویژگی از مفهوم‌های مختلف منظم متری را برای زیردیفرانسیل یک تابع محدب، سره و نیم‌پیوسته پایینی در فضای هیلبرت اثبات کرده‌اند. آنها دقیقا زیرمنظم متری، زیرمنظم قوی متری و منظم متری(قوی) چنین عملگری را مورد بررسی قرار داده‌اند، و نشان داده‌اند که هر کدام از این ویژگی‌ها با شرط رشد درجه دو روی تابع هم‌ارز است.
اخیرا دراسویتسکی [۳] و لویس [۴] [۱۲]، ویژگی را برای منظم قوی متری، برای زیردیفرانسیل مقید در $\bar{x}$ برای ۰، (که $\bar{x}$ مینیمم کننده موضعی است) از یک تابع نه لزوما محدب در $\mathbb{R}^n$، که در $\bar{x}$ برای ۰، زیر دیفرانسیلی پیوسته است، اثبات کرده‌اند. بعداً، مرداخوویچ [۵]، و انگیا [۶]، این نتیجه را بدون فرض پیوستگی زیر دیفرانسیل به فضاهای آسپلند تعمیم دادند. [۱۹] ما در این پایان‌نامه، ویژگی‌های داده شده در [۱] را برای زیر منظم متری و زیر منظم قوی متری زیردیفرانسیل یک تابع محدب، در فضاهای باناخ اثبات می‌کنیم.
در مجموعه‌ی حاضر در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و پیش نیازها در فضای باناخ می پردازیم.
در فصل دوم نشان می‌دهیم که اصل تغییر اکلند [۷] در سه فضای اقلیدسی، باناخ و متریک کامل برقرار است.
در فصل سوم ویژگی‌های منظمی را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار تعریف می‌کنیم و به بیان برخی خصوصیات و همچنین ارتباط بین آنها می‌پردازیم.
در فصل چهارم ویژگی زیرمنظم متری و زیرمنظم قوی متری زیردیفرانسیل یک تابع محدب نیم پیوسته پایینی، در فضای باناخ را بیان می‌کنیم.

Francisco J. Aragon Artacho[۱]
Michel H. Geoffrey[۲]
Drusvyatskiy[۳]
Lewis[۴]
Mordukhovich[۵]
Nghia[۶]
Ekeland[۷]

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف مهم مربوط به فصل‌های بعد و همچنین برخی قضایای معروف در آنالیز که در ادامه از آنها استفاده شده، آورده شده است.

۱.۱ مفاهیم اولیه

فرض کنیم $X = (X, \|.\|)$ فضایی باناخ با میدان حقیقی است.
$\mathbb{B}_{\|.\|}(X) = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ را گوی واحد فضا و $S_{\|.\|}(X) = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ را کره واحد فضا در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم X فضایی باناخ و C زیرمجموعه‌ای از X است. C را یک مجموعه محدب گوییم هر گاه به ازای هر x و y در C و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم*

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C.$$

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^n$ است. K را یک مخروط گوییم هر گاه برای هر x متعلق به K و هر λ بزرگتر مساوی صفر، داشته باشیم $\lambda x \in K$.*

تعریف ۳.۱.۱. *مخروط K را یک مخروط محدب گوییم هرگاه برای u و v متعلق به K داشته باشیم $u+v \in K$.*

تعریف ۴.۱.۱. *به ازای $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$ و $\beta \in \mathbb{R}$ دلخواه مجموعه نقاط به شکل*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \langle x, b\rangle = \beta\}$$

را یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. نیم فضا (نیم فضای بسته) در فضای $\mathbb{R}^n$ به شکل زیر تعریف می‌شود.
به ازای یک $b \in \mathbb{R}^n \neq ۰$ و $\beta \in \mathbb{R}$ مجموعه $\{x \ ; \ \langle x, b\rangle \leq \beta\}$ و یا $\{x \ ; \ \langle x, b\rangle \geq \beta\}$.

تعریف ۶.۱.۱. زیرمجموعه C از $\mathbb{R}^n$ را یک مجموعه چند وجهی محدب گوییم هر گاه به صورت اشتراک تعداد متناهی نیم فضاهای بسته یا ابرصفحه‌ها باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای غیرتهی از فضای باناخ X است. هسته F را که با $Core\, F$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
نقطه x متعلق به $Core\, F$ است اگر برای هر h عضو S_X، وجود داشته باشد $\delta > ۰$ به طوری‌که برای هر $۰ \leq t \leq \delta$ داشته باشیم $x + th \in F$.
همچنین نقاط درونی F را با $int\, F$ نشان می‌دهیم. واضح است که $int\, F \subset Core\, F$.

تعریف ۸.۱.۱. یک مجموعه را G_δ می‌نامیم اگر بتوان آن را به صورت اشتراک شمارش پذیر از مجموعه‌های باز نوشت، و F_σ می‌نامیم اگر بتوان آن را به صورت اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های بسته نوشت.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از فضای متریک X و S مجموعه تمام اعداد حقیقی $d(p, q)$ است که p و q متعلق به E هستند، در این صورت سوپریمم S قطر E نامیده می‌شود و آن را با $diam\, E$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم f یک تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی فضای باناخ X است. گوییم تابع f در نقطه x متعلق به X دیفرانسیل پذیر گاتو است، اگر برای هر $h \in X$

$$f'(x)(h) = \lim_{t \to ۰} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

وجود داشته و یک تابع خطی پیوسته نسبت به h باشد.
تابع $f'(x)$ مشتق گاتو یا دیفرانسیل گاتو f در X، نامیده می‌شود. $f'(x)$ را گرادیان تابع f در x نیز می‌نامیم و با ∇f نشان می‌دهیم.
و اگر این حد نسبت به h روی S_X یکنواخت باشد، f را دیفرانسیل پذیر فرشه در X می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. [۳] فرض کنیم X، Y و Z فضاهایی باناخ باشند و f نگاشتی از $X \times Y$ به Z و $\nabla_x f(\bar{x}, \bar{y})$ مشتق جزیی f نسبت به x است. گوییم f در $(\bar{x}, \bar{y})$ نسبت به x به طور یکنواخت در y به طور اکید دیفرانسیل پذیر جزیی است هر گاه برای هر $y \in Y$ که به $\bar{y}$ نزدیک است داشته باشیم

$$\lim_{\substack{x, x' \to \bar{x} \\ x \neq x'}} \frac{f(x, y) - f(x', y) - \langle \nabla_x f(\bar{x}, \bar{y}), x - x'\rangle}{\|x - x'\|} = ۰.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی E و f تابعی از C به $\mathbb{R}$ است. گوییم نقطه $\bar{x}$ عضو C، مینیمم کننده موضعی f روی C است اگر برای هر x واقع در همسایگی از $\bar{x}$، $f(x) \geq f(\bar{x})$.

نقطه $\bar{x}$ را مینیمم کننده قوی موضعی f گوییم هرگاه ثابت مثبت α و همسایگی U از $\bar{x}$ وجود داشته باشند به طوری‌که برای هر x در U داشته باشیم

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \alpha \|x - \bar{x}\|^{2}.$$

و اگر برای هر x در C، $f(x) \geq f(\bar{x})$ ، نقطه $\bar{x}$ مینیمم کننده سراسری تابع f نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۳. *فرض کنید f تابعی از فضای باناخ X به $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ است، دامنه f برابر است با*

$$dom\, f = \{z \in X \mid f(z) < \infty\}.$$

تابع f سره نامیده می‌شود هر گاه دامنه آن غیرتهی باشد.

تعریف ۱.۱.۱۴. *فرض کنیم f تابعی از فضای باناخ X به $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ است. مجموعه*

$$\{(x, \alpha)\, ;\, x \in X, \alpha \in \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha\}$$

را اپیگراف f گوییم و با $epi\, f$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه

$$\{x \in X; f(x) \leq \lambda\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

را مجموعه های تراز پایین f می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. *فرض کنیم f تابعی از فضای باناخ X به $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ است. تابع f را بسته گوییم هرگاه اپیگراف آن زیرمجموعه‌ای بسته از $X \times \mathbb{R}$ باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۶. *تابع f از فضای باناخ X به $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ مفروض است. فرض کنیم S مجموعه‌ای ناتهی از نقاط مینیمم تابع f باشد. گوییم تابع f در شرط رشد درجه دو روی S صدق می‌کند هرگاه ثابت مثبت c وجود داشته باشد به قسمی که برای هر x در یک همسایگی از S داشته باشیم*

$$f(x) \geq \inf f + c\, d^{2}(x, S).$$

تعریف ۱.۱.۱۷. *فرض کنیم E و F فضاهای اقلیدسی هستند. نگاشت α از E به F را نگاشت آفین گوییم اگر به ازای هر x و y متعلق به E و λ حقیقی، داشته باشیم*

$$\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda\alpha(x) + (1 - \lambda)\alpha(y).$$

و اگر F برابر $\mathbb{R}$ باشد، α را تابع آفین گوییم.

لم ۱.۱.۱۸. [۸] *فرض کنید E و F فضاهای اقلیدسی باشند. نگاشت α از E به F، آفین است اگر و فقط اگر $\alpha = y_\circ + T$، که $y_\circ$ متعلق به F و T نگاشتی خطی از E به F است.*

حال مفاهیم و قضایای مربوط به توابع محدب را می‌آوریم که اکثر آنها از مرجع [۸] آورده شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم X یک فضای باناخ و f تابعی از X به $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ است، گوییم تابع f روی X محدب است اگر به ازای هر x و y متعلق به X و $\circ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم*

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y).$$

به وضوح هر تابع آفین، تابعی محدب است. اگر f و g دو تابع محدب روی فضای باناخ X باشند آنگاه $f + g$ نیز محدب خواهد بود.

گزاره ۱.۱.۲۰. *سوپریمم هر دسته از توابع محدب، تابعی محدب است.*

اثبات. فرض کنیم تابع f به صورت زیر تعریف شود

$$f(x) := \sup_\alpha f_\alpha(x),$$

به طوری‌که برای هر α تابع $f_\alpha : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ محدب است. فرض کنیم x و y عضو X و $t \in (\circ, ۱)$ داده شده باشند در این صورت

$$\begin{aligned} f((۱ - t)x + ty) &= \sup_\alpha f_\alpha((۱ - t)x + ty) \\ &\leq \sup_\alpha \{(۱ - t) f_\alpha(x) + t f_\alpha(y)\} \\ &\leq (۱ - t) \sup_\alpha f_\alpha(x) + t \sup_\alpha f_\alpha(y) \\ &= (۱ - t) f(x) + t f(y). \end{aligned}$$

□

تعریف ۱.۱.۲۱. *گوییم فضای باناخ X یک فضای آسپلند [۱] است اگر برای هر تابع محدب و پیوسته f روی X، مجموعه‌ی همه‌ی نقاط دیفرانسیل پذیر فرشه‌ی f، مجموعه‌ای G_δ چگال در X باشد.*

تعریف ۱.۱.۲۲. *فرض کنیم X یک فضای باناخ و S زیرمجموعه‌ای از X است، تابع حقیقی مقدار f را روی S، لیپ شیتز گوییم هرگاه $\alpha > \circ$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر x و y عضو S داشته باشیم $|f(y) - f(x)| \leq \alpha |y - x|$.*

تابع حقیقی مقدار f را در x عضو X، لیپ شیتز موضعی گوییم هرگاه $\alpha > \circ$ و همسایگی U حول x موجود باشند به قسمی که به ازای هر z و y عضو S، داشته باشیم $|f(y) - f(z)| \leq \alpha |y - z|$.

---
[۱] Asplund

۲.۱ نگاشت‌های نیم پیوسته پایینی

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنیم f تابعی از فضای باناخ X به $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ است.*
اگر $f(y) \leq \liminf_{x \to y} f(x)$ گوییم تابع f در نقطه y نیم پیوسته پایین است.
اگر $f(y) \geq \limsup_{x \to y} f(x)$ گوییم تابع f در نقطه y نیم پیوسته بالا است.

یک تابع حقیقی مقدار پیوسته است اگر و تنها اگر هم نیم پیوسته بالا و هم نیم پیوسته پایین باشد.

گزاره ۲.۲.۱. *اگر تابع های f و g نیم پیوسته پایین باشند آنگاه $f+g$ نیز نیم پیوسته پایین است.*

اثبات. فرض کنیم x و y نقاطی از اشتراک دامنه های f و g هستند. چون f و g در x نیم پیوسته پایین هستند لذا

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y)$$

$$g(x) \leq \liminf_{y \to x} g(y)$$

با توجه به این‌که برای دو مجموعه A و B داریم $\inf A + \inf B \leq \inf(A+B)$. لذا

$$(f+g)(x) \leq \liminf_{y \to x}(f)(y) + \liminf_{y \to x} g(y) \leq \liminf_{y \to x}(f+g)(y).$$

$\square$

گزاره ۳.۲.۱. [۲۰] *اگر تابع f روی فضای باناخ X، سره، محدب و نیم پیوسته پایین باشد و*

$$\emptyset \neq D = int\, dom(f),$$

آنگاه f روی D پیوسته است.

گزاره ۴.۲.۱. [۸] *فرض کنید X یک فضای باناخ و f تابعی از X به $[-\infty, +\infty]$ است. در این صورت عبارات زیر معادلند:*

۱ *تابع f روی X نیم پیوسته پایین است.*

۲ *مجموعه‌های تراز پایین تابع f بسته است.*

۳ *تابع f بسته است.*

سوپریمم هر دسته از توابع نیم پیوسته پایین، نیم پیوسته پایین است.
و اینفیموم هر دسته از توابع نیم پیوسته بالا، نیم پیوسته بالا است.

اثبات. فرض کنیم f_i برای هر i، نیم پیوسته پایین است، داریم

$$\{x \in X \mid \sup_i f_i(x) \leq \lambda\} = \cap_{i\in I}\{x \in X \mid f_i(x) \leq \lambda\}$$

طرف راست تساوی بالا بنا به گزاره ۴.۲.۱ بسته است، پس طرف چپ تساوی نیز بسته است، پس بنابه گزاره ۴.۲.۱ حکم برقرار است.

به همین شکل ثابت می‌شود اینفیموم توابع نیم پیوسته بالا، نیم پیوسته بالاست. $\square$

تعریف‌ها و گزاره‌های زیر که در ارتباط با نگاشت‌های مجموعه مقدار است از مرجع [۱۶] آورده شده‌اند.

تعریف ۵.۲.۱. *فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک هستند. اگر برای هر x متعلق به X، $F(x)$ یک مجموعه در Y باشد آنگاه $F(.)$ را یک نگاشت مجموعه مقدار از X به Y گوییم و با $F: X \rightrightarrows Y$ نشان می‌دهیم.*

در حالت خاص، هر تابع یک نگاشت مجموعه مقدار است.

مثال ۶.۲.۱. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$، $f(x) = x^{۲}$
برای هر $y \in \mathbb{R}_+$، $f^{-۱}(y) = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$، بنابراین $f^{-۱}$ نگاشتی مجموعه مقدار است.

تعریف ۷.۲.۱. *فرض کنیم F نگاشتی مجموعه مقدار بین فضاهای باناخ X و Y است. دامنه، برد و نمودار نگاشت F به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.*

$$dom\, F := \{x \in X \,|\, F(x) \neq \emptyset\}$$

$$img\, F := \bigcup_{x\in dom(F)} F(x)$$

$$gph\, F = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, y \in F(x)\}.$$

همچنین نقش معکوس نگاشت F، نگاشت $F^{-۱}$ است به طوری که

$$x \in F^{-۱}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x).$$

تعریف ۸.۲.۱. *فضاهای توپولوژیک X و Y مفروض هستند،*

۱. *گوییم نگاشت مجموعه مقدا ر F از X به Y بسته مقدار، باز مقدار، یا فشرده مقدار است اگر برای هر x عضو X، $F(x)$ به ترتیب مجموعه‌ای بسته، باز یا فشرده در Y باشد. علاوه بر این اگر Y یک فضای توپولوژیک خطی باشد، و $F(x)$ برای هر x متعلق به X، مجموعه‌ای محدب در Y باشد، $F(.)$ محدب مقدار نامیده می‌شود.*

۲. نگاشت مجموعه مقدار F از X به Y را یک نگاشت مجموعه مقدار بسته، باز یا فشرده گوییم هرگاه نمودار F $(gph\, F)$ زیرمجموعه‌ای بسته، باز یا فشرده از $X \times Y$ باشد. همچنین اگر X و Y فضاهای توپولوژیک خطی باشند، $F(.)$ یک نگاشت مجموعه مقدار محدب نامیده می‌شود اگر $gph\, F$ زیرمجموعه‌ای محدب از $X \times Y$ باشد.

تعریف ۹.۲.۱. نگاشت مجموعه مقدار F از فضای باناخ X به فضای باناخ Y و $\bar{y}$ عضو $F(\bar{x})$ را در نظر می‌گیریم. گوییم نگاشت F در $\bar{x}$ برای $\bar{y}$ باز است اگر $\bar{x}$ نقطه درونی دامنه F، و برای هر همسایگی U از $\bar{x}$، مجموعه $F(U) = \cup_{x\in U} F(x)$ یک همسایگی از $\bar{y}$ باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک هاسدورف هستند، و F نگاشتی مجموعه مقدار از X به Y است. در این صورت برای هر $V \subset Y$، نقش معکوس بالای V تحت $F(.)$ با $F^+(V)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F^+(V) := \{x \in X \mid F(x) \subset V\}.$$

همچنین نقش معکوس پایین V تحت $F(.)$، با $F^-(V)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F^-(V) := \{x \in X \mid F(x) \cap V \neq \emptyset\} = \cup_{y\in V} F^-(y).$$

اگر $V = \emptyset$ آنگاه $F^+(V) = F^-(V) = \emptyset$.

نکته ۱۱.۲.۱. برای تابع $f : X \to Y$ و $V \subset Y$ داریم $f^+(V) = f^-(V) = f^{-1}(V)$.

گزاره ۱۲.۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک هاسدورف هستند. اگر F نگاشتی مجموعه مقدار از X به Y باشد و $dom(F) = X$، آنگاه عبارت‌های زیر هم ارزند:

۱. $F(.)$ نیم پیوسته بالا است.

۲. برای هر مجموعه باز $V \subset Y$، $F^+(V)$ یک مجموعه باز در X است.

۳. برای هر مجموعه بسته $W \subset Y$، $F^-(W)$ یک مجموعه بسته در X است.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک هاسدورف باشند و F نگاشتی مجموعه مقدار از X به Y و دامنه آن ناتهی باشد. در این صورت $F(.)$ در x_0 عضو X نیم پیوسته بالا گفته می‌شود اگر و تنها اگر برای هر مجموعه باز V در Y که شامل $F(x_0)$ است، همسایگی U از x_0، در X وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر x عضو U، داشته باشیم $F(x) \subset V$.

اگر F در هر x متعلق به X نیم پیوسته بالا باشد آنگاه روی X، نیم پیوسته بالا نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۴. نگاشت F در تعریف بالا در نقطه $x_\circ$ متعلق به X نیم پیوسته پایین گفته می‌شود اگر برای هر مجموعه باز V در Y، که $F(x_\circ) \cap V$ تهی نیست، همسایگی باز U از $x_\circ$، در X وجود داشته باشد به طوری‌که

$$\forall x \in U \;:\; F(x) \cap V \neq \emptyset.$$

و اگر F در هر x متعلق به X نیم پیوسته پایین باشد، روی X نیم پیوسته پایین نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲.۱۵.

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = \begin{cases} [۱,۴] & x = ۰ \\ [۲,۳] & x \neq ۰ \end{cases}$$

نشان می‌دهیم این نگاشت در نقطه $x = ۰$ نیم پیوسته بالا است. فرض کنیم مجموعه باز V به گونه ای باشد که $F(۰) \subset V$، در نتیجه $[۱,۴] \subset V$. حال فرض کنیم U یک همسایگی از ۰ است، در این صورت برای هر x متعلق به U، $F(x)$ برابر $[۱،۴]$ یا $[۲،۳]$ است، در نتیجه برای هر x متعلق به U ، $F(x) \subset [۱,۴] \subset V$. اما F در $x = ۰$ نیم پیوسته پایینی نیست، زیرا اگر $r \in F(۰) = [۱,۴]$ به طوری‌که $۳ < r < ۴$، و برای $\epsilon > ۰$ به اندازه کافی کوچک $V = (r-\epsilon, r+\epsilon) \subset (۳,۴)$. آنگاه برای x های عضو U که مخالف صفر هستند $F(x) \cap V = \emptyset$.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنیم F نگاشتی مجموعه مقدار از X به Y است، نگاشت F را به طور مثبت همگن گوییم هرگاه $۰ \in F(۰)$، و برای $\lambda > ۰$ داشته باشیم $F(\lambda x) \supset \lambda F(x)$. یا به طور معادل $gph\, F$ یک مخروط در $X \times Y$ باشد.

و اگر علاوه بر شرایط بالا داشته باشیم $F(x + x') \supset F(x) + F(x')$، نگاشت F را زیرخطی گوییم. به طور معادل F زیرخطی است هرگاه گراف آن یک مخروط محدب در $X \times Y$ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنیم X و Y فضاهایی باناخ هستند، و F نگاشتی مجموعه مقدار به طور مثبت همگن از X به Y است، نرم بیرونی و نرم درونی F، به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\|F\|^+ = \sup_{\|x\| \leq ۱} \sup_{y \in F(x)} \|y\| \quad \text{و} \quad \|F\|^- = \sup_{\|x\| \leq ۱} \inf_{y \in F(x)} \|y\|.$$

با این قرارداد که $\sup_{y \in \emptyset} \|y\| = -\infty$ و $\inf_{y \in \emptyset} \|y\| = \infty$.

مثال ۱.۲.۱۸.

$$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$$
$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x \geq ۰ \\ \emptyset & x < ۰ \end{cases}$$
$$|F|^+ = ۰ \quad , \quad |F|^- = \infty$$

هرگاه $dom\,F = X$، و F تک مقدار باشد، این دو نرم بر هم منطبق‌اند. برای عملگر خطی کراندار A داریم

$$\|A\|^+ = \|A\|^- = \|A\|.$$

گزاره ۱.۲.۱۹. [۹] *اگر F نگاشتی به طور مثبت همگن از فضای باناخ X به فضای باناخ Y باشد، آنگاه*

$$\|F^{-1}\|^+ = \inf\{k \in (0, \infty) \mid x \in F^{-1}(y) \Rightarrow \|x\| \leq k\|y\|\}.$$

نکته ۱.۲.۲۰. *هرگاه $\|F^{-1}\|^+ < \infty$، با توجه به گزاره بالا خواهیم داشت $F^{-1}(0) = \{0\}$.*

تعریف ۱.۲.۲۱. *یک محلی سازی نموداری برای نگاشت $F : X \rightrightarrows Y$ در نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ متعلق به $gph\,F$، نگاشت $\tilde{F} : X \rightrightarrows Y$ است به طوری‌که برای همسایگی $U \times V$ از $(\bar{x}, \bar{y})$*

$$gph\,\tilde{F} = (U \times V) \cap gph\,F.$$

به عبارت دیگر

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) \cap V & x \in U \\ \emptyset & x \notin U \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۲۲. *فرض کنید (X, ρ) یک فضای متریک و A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند. فراوانی A بر B به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$e(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B),$$

که طبق قرارداد اگر $B \neq \emptyset$، $e(\emptyset, B) = 0$ و $e(\emptyset, \emptyset) = \infty$.

در تعریف قبل $d(a, B) = \inf_{b \in B}\{\rho(a, b)\}$، و برای $B = \emptyset$ تعریف می‌کنیم $d(a, \emptyset) = \infty$.

تعریف ۱.۲.۲۳. *فاصله هاسدورف بین A و B به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$h^*(A, B) := \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

واضح است که $d(A, B) \leq h^*(A, B)$.

لم ۱.۲.۲۴. [۱۶] *فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار و A و B زیرمجموعه‌هایی از X هستند، در این صورت*

۱. $e(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset B + \epsilon\mathbb{B}\}$.

۲. $e(B, A) = \inf\{\epsilon > 0 \mid B \subset A + \epsilon\mathbb{B}\}$.

نتیجه ۲۵.۲.۱. در یک فضای خطی نرم دار فاصله هاسدورف به صورت زیر در می‌آید.

$$h^*(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset B + \epsilon\mathbb{B}, B \subset A + \epsilon\mathbb{B}\}.$$

تعریف ۲۶.۲.۱. فاصله پومپئو-هاسدورف [۲] با $h(A,B)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h(A,B) = \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)|$$

گزاره ۲۷.۲.۱. [۱۶] اگر (X,ρ) یک فضای متریک باشد، و A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند که تهی نیستند، آنگاه $h(A,B) = h^*(A,B)$.

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنیم S نگاشتی مجموعه مقدار از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ است. گوییم نگاشت S نسبت به مجموعه ناتهی D در $\mathbb{R}^m$، لیپ شیتز پیوسته است هر گاه $D \subset dom\, S$، نگاشت S روی D بسته مقدار باشد، و $k \geq 0$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $y, y' \in D$

$$h(S(y'), S(y)) \leq k\,|y' - y|.$$

به طور معادل، S روی D لیپ شیتز پیوسته است هر گاه $k \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $y, y' \in D$

$$S(y') \subset S(y) + k\,|y' - y|\mathbb{B}.$$

هر گاه نگاشت S روی D تک مقدار باشد، تعریف لیپ شیتز پیوستگی برای توابع، از تعریف بالا به دست می‌آید.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم S نگاشتی مجموعه مقدار از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ است. گوییم نگاشت S در $\bar{y}$، نسبت به مجموعه D لیپ شیتز پیوسته بیرونی است هر گاه $\bar{y} \in D \subset dom\, S$، نگاشت S در $\bar{y}$ بسته مقدار باشد، و ثابت $k \geq 0$، و همسایگی V از $\bar{y}$ وجود داشته باشند به قسمی که

$$e(S(y), S(\bar{y})) \leq k\,|y - \bar{y}| \quad \forall y \in V \cap D.$$

بنابراین هر نگاشت لیپ شیتز پیوسته، لیپ شیتز پیوسته بیرونی است.

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنیم S نگاشتی مجموعه مقدار از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ است. S را یک نگاشت چند وجهی محدب گوییم هر گاه نمودار آن $(gph\, S)$ مجموعه‌ای چند وجهی محدب باشد.

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنیم S نگاشتی مجموعه مقدار از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ است. نگاشت S را نگاشتی چند وجهی نامیم هر گاه نمودار آن اجتماعی از تعداد متناهی مجموعه‌های چند وجهی محدب در $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ باشد.

---

[۲] Pompeiu-Hausdorff

واضح است که هر نگاشت چندوجهی، نمودار بسته دارد، چون مجموعه‌های چند وجهی محدب، بسته هستند. همچنین هر نگاشت چند وجهی محدب، نگاشتی چند وجهی است که گراف آن فقط شامل یک قطعه است.

قضیه ۳۲.۲.۱. ([۱۱] قضیه$۳C.۳$) *هر نگاشت چند وجهی محدب $S:\mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$، روی دامنه‌اش لیپ شیتز پیوسته است.*

قضیه ۳۳.۲.۱. [۱۱] *هر نگاشت چند وجهی $S:\mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$، روی دامنه‌اش لیپ شیتز پیوسته بیرونی است.*

۳.۱ زیر دیفرانسیل

تعریف‌ها و قضیه‌های زیر از مرجع [۲۰] آورده شده‌اند.

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید f تابعی از فضای باناخ X به $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ و نقطه $\bar{x}$ عضو دامنه f باشد. زیردیفرانسیل f در نقطه $\bar{x}$، نگاشت مجموعه مقدار ∂f از X به X^* است که به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$\partial f(\bar{x}) := \{y^* \in X^* \mid \langle y^*, x-\bar{x}\rangle \leq f(x)-f(\bar{x}) \quad \forall x \in X\} \qquad (۱.۱)$$

یا به طور معادل

$$f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}) \geq y^*(h) \quad \forall h \in X$$

مثال ۲.۳.۱. *تابع $f(x)=\|x\|$ در تمام نقاط زیردیفرانسیل پذیر است، و زیر دیفرانسیل آن برابر خواهد بود با*

$$\partial f(x)=\{x^*: x^*(z-x)\leq \|z\|-\|x\|\}=\{x^*: x^*(z-x)\leq \|z-x\|\}=\{x^*: \|x^*\|\leq ۱\}=\mathbb{B}\subset X^*$$

مثال ۳.۳.۱.

$$f(x)=\begin{cases} ۱-\sqrt{۱-x^{۲}} & -۱\leq x\leq ۱\\ +\infty & x>۱ \text{ یا } x<-۱\end{cases}$$

این تابع در نقطه $x=۱$ زیر دیفرانسیل ندارد. زیرا این نقطه به دامنه ∂f تعلق ندارد.

نتیجه ۴.۳.۱. *بنا به تعریف ۱.۳.۱، نقطه y^* عضو $\partial f(\bar{x})$ است اگر وتنها اگر نقطه $\bar{x}$ مینیمم کننده سراسری تابع مورب (یک بر) $f(.)-\langle y^*,.\rangle$ باشد.*

گزاره ۵.۳.۱. *فرض کنید f تابعی محدب از فضای باناخ X به $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$، و D زیرمجموعه‌ای غیر تهی، باز و محدب از X باشد، به طوری‌که f در نقطه $x_۰$ متعلق به D پیوسته است. در این صورت $\partial f(x_۰)$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی، محدب، ω^*- بسته و ω^* - فشرده از X^* است. همچنین نگاشت $x\to\partial f(x)$ در $x_۰$ موضعاً کراندار است.*

گزاره ۶.۳.۱. *فرض کنید X یک فضای باناخ، D زیرمجموعه‌ای باز و غیرتهی از X، و f تابعی پیوسته و محدب روی D باشد. در این صورت نقطه $x \in D$، مینیمم کننده سراسری تابع f است اگر و تنها اگر $0 \in \partial f(x)$.*

اثبات. ابتدا فرض کنیم $0 \in \partial f(x)$ در نتیجه

$$\langle 0, z - x\rangle \leq f(z) - f(x) \quad \forall z \in D \quad \Rightarrow f(x) \leq f(z) \quad \forall z \in D.$$

برعکس فرض کنیم x عضو D، مینیمم کننده سراسری تابع f باشد، یعنی برای هر z عضو D،

$$f(x) \leq f(z) \Rightarrow 0 \leq f(z) - f(x) \Rightarrow \langle 0, z - x\rangle \leq f(z) - f(x).$$

لذا ۰ به $\partial f(x)$ تعلق دارد. □

گزاره ۷.۳.۱. *فرض کنید تابع f روی زیر مجموعه باز و محدب D از فضای باناخ X، پیوسته و محدب باشد، در این صورت نگاشت زیردیفرانسیل $x \to \partial f(x)$ روی D، نرم به ω^*- نیم پیوسته بالایی است.*

قضیه ۸.۳.۱. ([۸]قضیه ۴.۱.۱۹) *فرض کنید X و Y فضاهای باناخ حقیقی و f از X به $(-\infty, +\infty]$ و g از Y به $(-\infty, +\infty]$ تابع‌هایی محدب باشند. و فرض کنید T نگاشتی خطی و کراندار از X به Y باشد، در این صورت در هر نقطه x عضو X داریم*

$$\partial(f + g\, o T)(x) \supset \partial f(x) + T^*(\partial\, g(Tx)).$$

و برابری برقرار است اگر یکی از شرایط زیر صادق باشد.

$$0 \in Core(dom\, g - T\, dom\, f)$$

یا

$$T\, dom\, f \cap Cont\, g \neq \emptyset.$$

که $Cont\, g$ مجموعه نقاط پیوستگی g است.

گزاره ۹.۳.۱. [۸] *فرض کنیم f تابعی محدب از X به $(-\infty, +\infty]$ است، در این صورت*

۱. *اگر f در x_0 دیفرانسیل پذیر گاتو باشد آنگاه $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$*

۲. *فرض کنیم f در x_0 پیوسته است، در این صورت f در x_0 دیفرانسیل پذیر گاتو است اگر و فقط اگر $\partial f(x_0)$ تک مقدار باشد.*