بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳

انتگرالگیری عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

مؤسسه ریاضیات

دانشگاه تربیت معلم

محمود سعیدی کلیشمی

خرداد ۷۸

استاد راهنما

دکتر اسماعیل بابلیان

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

تاریخ ______
شماره ______
پیوست ______
واحد ______

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه خانم/آقای محمود سعیدی کلیشمی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی کاربردی شاخهٔ — در روز چهارشنبه [illegible] ریاضیات تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۱٫۲۸ ([illegible]) می‌باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما
دکتر اسماعیل بابلیان

ممتحنین خارجی
۱- دکتر سعید عباس بندی
۲-

ممتحنین داخلی
۱- دکتر غلامرضا جهانشاهلو
۲-

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و
مهندسی کامپیوتر

تقدیم به پدر و مادرم

سپاس و تشکر

از کلیه اساتیدی که افتخار شاگردیشان را داشته‌ام و از محضرشان فیض برده‌ام قدردانی می‌کنم .از آقای دکتر بابلیان که راهنمای بنده در این پایان نامه بوده‌اند متشکرم .از خانم سعیدی و آقای انصاری که مرا در تایپ پایان نامه یاری نموده‌اند ،سپاسگزارم .

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه فرمول کوادراتور صریح (همراه با وزنها) گاوس ـ ترن برای توابعی که حداقل در ناحیه ای خاص از صفحه تحلیلی هستند، مرتبط با یک دسته خاص از توابع وزن ارائه می‌شود و چند جمله ایهای s ـ متعامد نسبت به این توابع وزن ارائه می‌گردند .همچنین فرمولهای کوادراتور برای محاسبه ضرایب چبیشف ـ فوریه توابع فوق با حد اکثر دقت بیان می‌شوند .

پایان نامه فوق از مقاله [۸] منتج شده است.فصل اول پایان نامه شامل قضایا و موضوعات استفاده شده در فصول بعدی است، که سعی شده است بعضی از روابط و قضایا اثبات گردند .

در فصل دوم دسته‌ای خاص از توابع وزن معرفی می‌شود و چند جمله ایهای s ـ متعامد نسبت به این توابع وزن ارائه می‌گردد و در آخر یک مجموعه از این دسته توابع وزن معرفی می‌شود .

در فصل سوم به بیان فرمول کوادراتور صریح گاوس ـ ترن برای توابع ذکر شده می‌پردازیم و همچنین فرمولهای کوادراتور برای محاسبه ضرایب چبیشف ـ فوریه این توابع با حد اکثر درجه دقت ارائه می‌شود .

در فصل چهارم با تلفیق نتایج دو فصل دوم و سوم به ارائه فرمول کوادراتور صریح گاوس ـ

ترن برای توابع ذکر شده می‌پردازیم و سپس فرمولهای کوادراتور را با حد اکثر دقت برای محاسبه ضرایب چبیشف ـ فوریه این توابع نسبت به دسته توابع وزن معرفی شده در فصل دوم ارائه می‌دهیم .در انتهای فصل به ذکر چند مثال عددی می‌پردازیم .

فصل اول

۱ـ۱)چند جمله‌ای چبیشف نوع اول و دوم

تعریف ۱ـ۱ـ۱) چند جمله‌ای چبیشف (نوع اول) برای n ای صحیح ونامنفی چنین تعریف می‌شود :

$$T_n(x) = \cos n\Theta$$

که در آن $x = \cos\Theta$, $0 \le \Theta \le \pi$, $-1 \le x \le 1$ است .

همانگونه که می‌دانیم T_n یک چند جمله‌ای از درجه n است و بنابر این برای هر x حقیقی و مختلطی تعریف می‌شود، برای این منظور کافی است شرط $-1 \le x \le 1$ برداشته شود .

برای T_n روابط زیر برقرار می‌باشد .

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (۱-۱-۱)$$

با استفاده از این رابطه بازگشتی وبا توجه به اینکه $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$ می‌توان به استقرا

نشان داد که ضریب جمله پیشرو در $T_n(x)$، 2^{n-1} است .

$$T_m(x)T_n(x)=\frac{1}{2}(T_{m+n}(x)+T_{|m-n|}(x)) \qquad (۱-۱-۲)$$

زیرا :

$$\cos m\Theta \cos n\Theta=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)\Theta+\cos(m-n)\Theta\right]$$

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)=-n^2T_n(x) \qquad (۱-۱-۳)$$

با تبدیل $x=\cos\Theta$ و با دو بار مشتق گیری از T_n خواهیم داشت ،

$$T_n''(x)=-n\frac{n\cos n\Theta\sin\Theta-\cos\Theta\sin n\Theta}{\sin^3\Theta}$$

که با تبدیل دوباره $x=\cos\Theta$ رابطه فوق به دست می‌آید .

صفرهای چند جمله‌ای چبیشف چنین تعیین می‌شوند :

$$T_n(x)=\cos n\Theta=0 \qquad (۱-۱-۴)$$

$$\xi_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k=1,\cdots,n.$$

و برای ξ_iها صفرهای چبیشف ، رابطه زیر را داریم :

$$T_n'(\xi_i)=\frac{(-1)^{i-1}n}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \qquad (۱-۱-۵)$$

با توجه به $T_n'(x)=\frac{n\sin n\Theta}{\sin\Theta}$ و با جایگذاری ξ_i در آن رابطه فوق به دست می‌آید .

تابع مولد چند جمله‌ای چبیشف :

برای $x\in[-1,1]$ و t مختلطی که $|t|<1$، سری $\sum_{j=0}^{\infty}{}' t^j T_j(x)$ را در نظر می‌گیریم (علامت پریم بالای سیگما نشان این است که اولین جمله نصف می‌شود). این سری در واقع قسمت حقیقی سری $\sum_{j=0}^{\infty}{}' t^j e^{ij\Theta}$ است که درآن $x=\cos\Theta$ و $i^2=-1$. ولی برای سری $\sum_{j=0}^{\infty}{}' t^j e^{ij\Theta}$ می‌توان نوشت

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}' t^j e^{ij\Theta}=\sum_{j=0}^{\infty}{}' (te^{i\Theta})^j=-\frac{1}{2}+1+te^{i\Theta}+(te^{i\Theta})^2+\dots$$

چون $|te^{i\Theta}|=|t|<1$ می‌توان نوشت :

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-te^{i\Theta}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-t(\cos\Theta+i\sin\Theta)}$$

قرار می‌دهیم $x=\cos\Theta$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-xt+it(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}+\frac{1-xt-it(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-xt)^2+t^2(1-x^2)}$$

که قسمت حقیقی آن خواهد شد ،

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\frac{1-t^2}{2(1-2xt+t^2)}$$

پس داریم :

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}' t^j T_j(x)=\frac{1-t^2}{2(1-2xt+t^2)}$$

لذا، برای $x\in[-1,1]$ و tای مختلط که $|t|<1$ تابع مولد چبیشف را چنین تعریف می‌کنیم :

$$G_t(x)=\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} \quad =2\sum_{j=0}^{\infty}{}' t^j T_j(x) \qquad (۱-۱-۶)$$

همانگونه که می‌دانیم چند جمله‌ایهای چبیشف نسبت به تابع وزن $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ روی

[1,1 -] بر هم عمودند. یعنی ،

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & n=m\neq 0\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

چند جمله‌ای چبیشف نوع دوم

تعریف ۲-۱-۱) به $U_n(x)$ چند جمله‌ای چبیشف نوع دوم می‌گوئیم وتعریف می‌کنیم

$$U_n(x)=\frac{sin(n+1)\Theta}{sin\Theta}$$

که در آن $x=cos\Theta$, $0\leq\Theta\leq\pi$.

برای چند جمله‌ای چبیشف نوع دوم داریم :

$$U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)$$

زیرا،

$$\frac{d}{dx}T_{n+1}(x)=\frac{d}{d\Theta}cos(n+1)\Theta.\frac{d\Theta}{dx}$$

که درآن $cos\Theta=x$, $-sin\Theta d\Theta=dx$ ،

$$=(n+1)\frac{sin(n+1)\Theta}{sin\ \Theta}$$

$U_n(x)$ چند جمله‌ای از درجه n است زیرا مضربی از مشتق $T_{n+1}(x)$،که چندجمله‌ای از

درجه $n+1$ است ، می‌باشد.

برای $U_{n+1}(x)$ نیز رابطه بازگشتی همانند چند جمله‌ایهای چبیشف نوع اول برقراراست:

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x) \qquad (۱-۱-۷)$$

زیرا داریم :

$$U_{n+1}(x)+U_{n-1}(x)=\frac{\sin(n+2)\Theta+\sin n\Theta}{\sin\Theta}=\frac{2\sin(n+1)\Theta\cos\Theta}{\sin\Theta}=2xU_n(x)$$

حال با استفاده از این رابطه بازگشتی وبا توجه به اینکه $U_0(x)=1$, $U_1(x)=2x$ می‌توان

نشان دادکه در چند جمله‌ای $U_n(x)$ ضریب جمله x^n ، 2^n است .

صفرهای چند جمله‌ای چبیشف نوع دوم عبارت‌اند از :

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin\Theta}=0$$

$$x_k=\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \qquad , \quad k=1,2,\dots,n \qquad (۱-۱-۸)$$

برای چند جمله‌ایهای چبیشف نوع دوم داریم:

$$\int_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1+x^2}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

زیرا با تغییر متغیر $x=\cos\Theta$ داریم $dx=-\sin\Theta d\Theta$ و با جایگذاری برای $n\neq m$ خواهیم

داشت :

$$\int_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1)\Theta\sin(m+1)\Theta}{\sin^2\Theta}\sin^2\Theta d\Theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin(n+1)\Theta\sin(m+1)\Theta d\Theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos[(n+1)-(m+1)]\Theta-\cos[(n+1)+(m+1)]\Theta)d\Theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)}\sin(n-m)\Theta\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+m+2)}\sin(n+m+2)\Theta\right]_0^{\pi}=0$$

و برای $n=m$ داریم

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi}\sin^2(n+1)\Theta d\Theta=[\frac{1}{2}\Theta-\frac{1}{4(n+1)}\cos 2(n+1)\Theta]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین ، چند جمله‌ایهای چبیشف نوع دوم نسبت بـه تـابع وزن $\sqrt{1-x^2}$ روی [1,1-]

متعامدند.

۲ـ۱) نظریه تقریب

تعرف ۱ـ۲ـ۱) V رایک فضای نرمدار با نرم $\|.\|$ و W را زیرفضایی از V درنظر می‌گیریم.

همانگونه که می‌دانیم مسأله تقریب عبارت است از اینکه برای v مفروض متعلق به V، $w^*\in W$ را بگونه‌ای بیابیم که

$$\|v-w^*\| \le \|v-w\| \qquad \forall w\in W$$

و به w^* بهترین تقریب (best approximation) v خارج W گوئیم.

قضیه ۱ـ۲ـ۱) اگر V یک فضای نرمدار و W زیر فضایی از V بابعد متناهی باشد آنگاه برای $v\in V$ مفروض، $w^*\in W$ وجود دارد که

$$\|v-w^*\| \le \|v-w\| \qquad \forall w\in W$$

اثبات: در [۵].

برای توابع $C[a,b]$ (توابع پیوسته روی $[a,b]$) که خود تشکیل یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی می‌دهد، نرم $\|.\|$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f\in C[a,b] \qquad \|f\| =\left(\int_a^b |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

که در آن $p\ge 1$ و حقیقی و $w(x)$ یک تابع وزن روی $[a,b]$ است (w روی $[a,b]$ مثبت و پیوسته است).

به وضوح $\|f\|\ge 0$ و اگر $f=0$ آنگاه $\|f\|=0$ ولی اگر $\|f\|=0$ آنگاه