بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

ساختار ۳– جداسازی‌های مترویدهای ۳– همبند

محمد نبی‌زاده

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

شهریور ۱۳۸۷

پایان‌نامه جهت دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر قدرت‌اله آزادی

پایان‌نامه محمد نبی زاده به تاریخ ۱۳۸۷/۶/۳۱ شماره ۸۸۸-۲ مورد پذیرش هیأت محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ قرار گرفت.

۱ — استاد راهنما و رئیس هیأت داوران : دکتر قدرت اله آزادی

۲ — استاد مشاور :

۳ — داور خارجی : دکتر حبیب اذانچیلر

۴ — داور داخلی : دکتر علی سرباز جانفدا

۵ — نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سعید استادباشی

تقدیم به :

تمامی اعضای خانواده‌ام که موفقیت‌هایم را
مدیون زحمات آنها می‌دانم.

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ علم و دانش را نصیب و روزی‌ام گردانید.

با لطف و عنایت خداوند منان توانستیم این پایان‌نامه را تدوین کنیم. در طول تحصیل خودم در دانشگاه ارومیه از تجربیات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر آزادی به کثرت استفاده کردیم که جا دارد کمال تشکر و قدردانی را در این موضع از محضر ایشان داشته باشم.

هم‌چنین از محضر اساتید محترم آقایان دکتر اذانچیلر، دکتر سزیده، دکتر جانفدا، دکتر بهروش، دکتر استادباشی، دکتر آقالاری و دیگر اساتید محترم کمال تشکر و قدردانی دارم.

در پایان جا دارد از تمامی اعضای خانواده‌ام به خاطر همیاری و تقویت روحیه‌ی من در طول تدوین این پایان‌نامه، تشکر و قدردانی کنم. هم‌چنین از تمامی دوستانی که در طول این پایان‌نامه با همکاری و هم‌فکری‌های خودشان مرا مدیون خویش ساختند، کمال تشکر و قدردانی را به عمل می‌آورم.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

پیشگفتار

هدف این پایان‌نامه، بررسی ساختار ۳− جداسازی‌های ماترویدهای ۳− همبند می‌باشد.

تات[۱]، k− جداسازی یک ماترویید را چنین تعریف می‌کند:

افراز (A,B) یک k− جداسازی ماترویید M است هرگاه

$$min\{|A|,|B|\} \geq k$$

و

$$r(A)+r(B)-r(M) \leq k-1$$

ویتنی[۲] قبلاً نشان داده است که افراز (A,B)، ۱− جداسازی ماترویید M است اگر و فقط اگر A اجتماعی از مؤلفه‌های ۲− همبند ماترویید M باشد.

برای ماترویید ۲− همبند M، کانینگهام[۳] و ادموندس[۴] یک تجزیه درختی از ماترویید را به دست آورده‌اند به طوری که نمایش دهنده همه ۲− جداسازی‌های ماترویید M می‌باشد.

در این پایان‌نامه، ما برای ماترویید ۳− همبند M، یک تجزیه درختی از آن را که نمایش دهنده همه ۳− جداسازی‌های غیر بدیهی ماترویید M می‌باشد، ارائه می‌کنیم.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله

J.oxley , C.Semple , G.Whittle , The structure of the 3 - separations of 3 - connected matroids , J.combin . Theory Ser .B 92(2004) 257 - 293.

تنظیم شده است.

---

[۱] Tutte
[۲] Whitney
[۳] Cunningham
[۴] Edmonds

مقدمه

فصل ۱ را با ارائه مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و ماترویید آغاز می‌کنیم.

همبندی، همبندی مراتب بالاتر و همبندی موضعی مترویدها را در فصل ۲ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش مربوط به همبندی موضعی، ثابت می‌کنیم هرگاه ماترویید M ۳− همبند و X و Y دو زیر مجموعه ۳− جداساز از $E(M)$ باشند،

(آ) اگر $|X \cap Y| \geq ۲$، آنگاه $X \cup Y$ یک ۳− جداساز است.

(ب) اگر $|E - (X \cup Y)| \geq ۲$، آنگاه $X \cap Y$ یک ۳− جداساز است.

فصل ۳ را به ۳− جداسازی‌های دنباله‌ای و هم‌ارز اختصاص دادیم.

فصل ۴ شامل ۳ بخش اشت. در بخش اول، گل‌ها و انواع آنها را بررسی می‌کنیم و در این بخش ثابت می‌کنیم اگر $\Phi = (P_۱, P_۲, \ldots, P_n)$ یک گل باشد، آنگاه Φ یک شقایق یا یک مروارید است.

بعلاوه اگر $n \geq ۳$، آنگاه Φ یک پادل، یا یک کوپادل، یا یک شبه سنبل، یا یک شبه سویرل، یا یک شبه واموس و یا یک گل تجزیه ناپذیر است.

در بخش دوم هم‌ارزی گل‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این بخش ثابت می‌کنیم دو گل با مرتبه حداقل ۳ هم‌ارز یکدیگر هستند اگر و فقط اگر یکی از دیگری به وسیله دنباله‌ای از انتقال های مقدماتی به دست آید.

بخش سوم همین فصل، به نوعی ارتباط بین بخش اول و دوم می‌باشد. در این بخش ثابت می‌کنیم اگر دو گل با مرتبه حداقل ۳ هم‌ارز یکدیگر باشند، آنگاه نوع آنها یکسان است.

فصل ۵ شامل ۲ بخش است. دربخش اول ساختار دیگری از گل‌ها و در بخش دوم گل‌های ماکسیمال را مورد بررسی قرار داده و در همین بخش ثابت می‌کنیم اگر M یک ماترویید با حداقل ۹ عضو و Φ یک گل ماکسیمال باشد، آنگاه هر ۳− جداسازی غیردنباله‌ای M

هماهنگ با Φ می‌باشد.

در فصل ٦، ابتدا یک ٣− درخت جزئی را توصیف کرده سپس تحت یک گزاره به ارتباط بین ٣− جداسازی‌های غیردنباله‌ای M و ٣− جداسازی‌های نمایش داده شده توسط آن ٣− درخت جزئی می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل برخی مفاهیم مقدماتی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ یک گراف[۱] سه تایی[۲] متشکل از یک مجموعه متناهی و غیر خالی $V(G)$ که اعضای آن رأس[۳]های گراف و مجموعه $E(G)$ که اعضای آن یال[۴]های گراف G نامیده می‌شود و رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می‌کند، می‌باشد.
اگر $e = uv$ یک یال از G باشد، آنگاه u و v را **نقاط انتهایی**[۵] یا رأس‌های انتهایی e و هم‌چنین e را یال واقع بر u و v گویند.
اگر نقاط انتهایی یالی بر هم منطبق باشند، آنگاه آن یال را یک طوقه[۶] گویند.

---

[۱] graph
[۲] triple
[۳] vertex
[۴] edge
[۵] endpoints
[۶] loop

اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آنگاه آن دو یال را **یال‌هایی موازی**[۷] گویند.

تعداد یال‌های واقع بر یک رأس را **درجه**[۸] آن رأس را می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱ گراف فاقد طوقه و یال‌های موازی را **گراف ساده**[۹] می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱ گراف بدون یال و با رأس‌های تنها را **گراف بدیهی**[۱۰] می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱ گراف H **زیر گراف**[۱۱] G است هرگاه:

(۱) $V(H) \subseteq V(G)$.

(۲) $E(H) \subseteq E(G)$.

در این صورت آن را به صورت $H \subseteq G$ نشان داده و می‌گویند G شامل H است.

اگر $V(H) = V(G)$، آنگاه H را **زیر گراف فراگیر**[۱۲] G می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱ یک **گشت**[۱۳] در گراف G دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G به صورت

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

است که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی e_i هستند.

تعریف ۶.۱.۱ اگر هیچ یالی در گشت تکرار نشده باشد، در این صورت آن گشت را **گذر**[۱۴] گویند.

تعریف ۷.۱.۱ یک **مسیر**[۱۵] گذری است که در آن هیچ رأسی تکرار نشده باشد.

تعریف ۸.۱.۱ اگر در مسیر $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$ رابطه $v_0 = v_n$ برقرار باشد، آنگاه آن مسیر را **دور**[۱۶] گویند.

---

[۷] parallel edges
[۸] deggre
[۹] simple graph
[۱۰] trivial graph
[۱۱] subgraph
[۱۲] spanning subgraph
[۱۳] walk
[۱۴] trail
[۱۵] path
[۱۶] circuit

تعریف ۹.۱.۱ گراف فاقد دور را **جنگل**[۱۷] گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱ **گراف همبند**[۱۸]، گرافی است که برای هر دو رأس دلخواه آن مانند u و v یک $u-v$ مسیر موجود باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ هر زیرگراف همبند ماکسیمال گراف G را یک **مؤلفه**[۱۹] گراف G گویند.

تعریف ۱۲.۱.۱ یک **برش رأسی**[۲۰] گراف G، مجموعه‌ای از رأس‌ها است که با حذف آنها، تعداد مؤلفه‌های گراف G افزایش می‌یابند.

تعریف ۱۳.۱.۱ گراف G، $k-$ همبند است هرگاه هر برش رأسی G دارای حداقل $k-$ رأس باشد. همبندی گراف G با $k(G)$ نمایش داده می‌شود و آن را چنین تعریف می‌کنند:

$$k(G) \quad = min\{k : \text{است همبند } -k \text{ ،} G\}$$

تعریف ۱۴.۱.۱ **گراف جدانشدنی**[۲۱] گرافی همبند و غیربدیهی است که هیچ برش رأسی ندارد.

تعریف ۱۵.۱.۱ یک **بلوک**[۲۲]، زیرگراف جدانشدنی ماکسیمال است.

تعریف ۱۶.۱.۱ گراف همبند و بی‌دور را یک **درخت**[۲۳] می‌نامند.

تعریف ۱۷.۱.۱ هر زیرگراف فراگیر گراف G که یک درخت باشد یک **درخت فراگیر**[۲۴] گراف G می‌نامند.

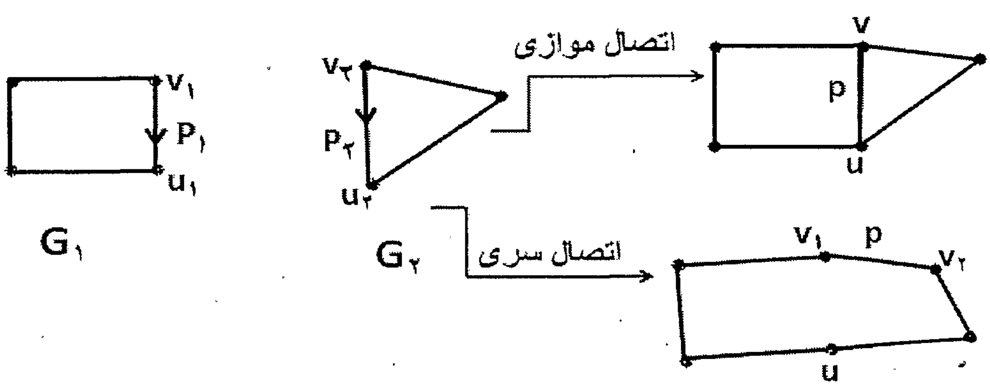
---
[۱۷] forest
[۱۸] connected
[۱۹] component
[۲۰] vertexe cut
[۲۱] nonseparable graph
[۲۲] block
[۲۳] tree
[۲۴] spanning tree

تعریف ۱۸.۱.۱ دو گراف ساده G و H را یکریخت[۲۵] گویند اگر دوسویی

$$f : V(G) \longrightarrow V(H)$$

باشد به طوری که $uv \in E(G)$ است اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$ باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ **اتصال سری و موازی گراف‌ها** [۲۶]: فرض کنیم به ازای هر $i = ۱, ۲$، p_i یک یال در گراف G_i باشد. یال p_i را به طور دلخواه از رأس U_i به رأس V_i در نظر می‌گیریم. اتصال سری و موازی گراف $G_۱$ و $G_۲$ نسبت به یال‌های جهت‌دار $p_۱$ و $p_۲$ به این ترتیب است که $p_۱$ و $p_۲$ را به ترتیب از $G_۱$ و $G_۲$ حذف کرده و رئوس $U_۱$ و $U_۲$ را با رأس جدید U متحد می‌کنیم. در اتصال سری یک یال جدید p که $V_۱$ را به $V_۲$ وصل می‌کند، اضافه می‌کنیم. در اتصال موازی رئوس $V_۱$ و $V_۲$ را با رأس V متحد می‌کنیم. اتصال سری و موازی دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ نسبت به یال‌های جهت‌دار $p_۱$ و $p_۲$ را به ترتیب با نماد $S((G_۱;p_۱),(G_۲;p_۲))$ و $P((G_۱;p_۱),(G_۲;p_۲))$ یا به اختصار با $S(G_۱,G_۲)$ و $P(G_۱,G_۲)$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۱.۱: اتصال سری و موازی گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$

[۲۵] isomorphism
[۲۶] series and parallel connection of graphs

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ **متروید** [۲۷] M یک زوج مرتب $M = (E,\mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعه متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

(I1) $\phi \in \mathcal{I}$.

(I2) اگر $X \in \mathcal{I}$ و $Y \subseteq X$، آنگاه $Y \in \mathcal{I}$.

(I3) اگر $X \in \mathcal{I}$ و $Y \in \mathcal{I}$ و $|X| > |Y|$، آنگاه عضو $x \in X - Y$ وجود دارد که $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد، آنگاه M را یک متروید روی E و E را **مجموعه‌ی زمینه‌ی** [۲۸] آن گویند.

هر عضو $\mathcal{I}$ **یک مجموعه مستقل** [۲۹] M نامیده می‌شود.

زیر مجموعه‌های E را که در $\mathcal{I}$ نیستند، **مجموعه‌های وابسته** [۳۰] M گویند.

تعریف ۲.۲.۱ زیر مجموعه‌های وابسته مینیمال M را یک دور می‌نامند.

گردایه‌ی همه دورهای M را با $\mathcal{C}(M)$ و یا با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهند.

دوری از M که شامل n عضو باشد، یک $n-$ دور M گویند.

مجموعه $\mathcal{C}$ از دورهای متروید M دارای خواص زیر است:

(C1) $\phi \notin \mathcal{C}$.

(C2) اگر $C_1 \in \mathcal{C}$ و C_2، $C_1 \subseteq C_2$، آنگاه $C_1 = C_2$.

(C3) اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آنگاه عضوی مثل C_3 از

[۲۷] matroid
[۲۸] ground set
[۲۹] independent set
[۳۰] dependent set

C وجود دارد به طوری که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنید E مجموعه‌ای از بردارها و $\mathcal{I}$ گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌های بردارهای مستقل خطی E باشد. در این صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است. این متروید را **متروید برداری**[۳۱] گویند.

شرط **(I1)** : مجموعه تهی یک مجموعه مستقل خطی است.

شرط **(I2)** : هر زیر مجموعه یک مجموعه مستقل خطی یک مجموعه مستقل خطی است.

شرط **(I3)** : فرض کنیم $X,Y \in \mathcal{I}$ و $|Y| < |X|$. فرض کنید W زیر فضای تولید شده توسط $X \cup Y$ باشد. پس $dim(W) \geq |X| > |Y|$. حال فرض کنید به ازای $x \in X - Y$، $Y \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ یعنی $Y \cup \{x\}$ یک مجموعه‌ی وابسته خطی می‌باشد. (فرض خلف) چون W زیر فضای تولید شده توسط $X \cup Y$ است، پس $dim(W) \leq |Y|$. در نتیجه $|X| \leq dim(W) \leq |Y| < |X|$ و این یک تناقض است. بنابراین عضو $x \in X - Y$ وجود دارد به طوری که $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. پس $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید است.

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه $\mathcal{I}$ را گردایه مجموعه‌های یال‌های تمامی زیر گراف‌های بی‌دور G در نظربگیرید (یعنی $\mathcal{I}$ شامل زیر مجموعه‌هایی از E است که زیر گراف تولید شده توسط آنها بی‌دور می‌باشد). در این صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است. این متروید را **متروید دوری**[۳۲] گراف G گویند.

تعریف ۵.۲.۱ دومتروید M و N را یکریخت گویند اگر دوسویی

$$\psi : E(M) \longrightarrow E(N)$$

موجود باشد به طوری که $X \subseteq E(M)$ مستقل است اگر و تنها اگر $\psi(X)$ یک مجموعه مستقل در N باشد.

---
[۳۱] vector matroid
[۳۲] cycle matroid

تعریف ۶.۲.۱ متروید M را گرافیک[۳۳] گویند، هرگاه گرافی وجود داشته باشد که مترویدِ دوری تولید شده توسط آن گراف، یکریخت با M باشد.

تعریف ۷.۲.۱ هر مجموعه مستقل ماکسیمال مترویدِ M را یک پایه[۳۴] M می‌نامند. پایه‌های مترویدِ M را با نماد $\mathcal{B}(M)$ یا $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهند.

لم ۸.۲.۱ اگر $B_۱$ و $B_۲$ دو پایه مترویدِ M باشند، آنگاه $|B_۱| = |B_۲|$.

برهان : [[۸] ۱.۲.۱]. ■

لم ۹.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد. آنگاه $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک مترویدِ روی E است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

(B1) $\mathcal{B} \neq \phi$.

(B2) اگر $B_۱, B_۲ \in \mathcal{B}$ و $x \in (B_۱ - B_۲)$، آنگاه $y \in (B_۲ - B_۱)$ وجود دارد به طوری که $(B_۱ - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان : [[۸] ۱.۲.۲]. ■

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک مترویدِ و $X \subseteq E$ باشد. رتبه X را چنین تعریف می‌کنیم:

$$r(X) = max\{|A| : \quad A \subseteq X, A \in \mathcal{I}\}$$

لم ۱۱.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه باشد. تابع $r : ۲^E \longrightarrow N \cup \{۰\}$ تابع رتبه یک مترویدِ روی E است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

(R1) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $۰ \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $r(X) \leq r(Y)$.

(R3) (لم) اگر X و Y دو زیر مجموعه E باشند، آنگاه

---
[۳۳] graphic
[۳۴] base

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$$

برهان : [[۸] ۱.۳.۱].

خاصیت (R_3) را خاصیت زیر مدولار[۳۵] تابع رتبه متروید گویند. ■

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید M یک متروید روی E با تابع رتبه r باشد. تابع

$$cl : 2^E \longrightarrow 2^E$$

با ضابطه

$$cl(X) = \{x \in E : \quad r(X \cup x) = r(X)\}$$

را عملگر بستار[۳۶] متروید M گویند.

لم ۱۳.۲.۱ عملگر بستار متروید M روی E دارای خواص زیر است:

(CL1) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $X \subseteq cl(X)$.

(CL2) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آنگاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

(CL3) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

(CL4) اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$، آنگاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان : [[۸] ۱.۴.۲]. ■

لم ۱۴.۲.۱ اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$، آنگاه $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$.

برهان : [[۸] ۱.۴.۳]. ■

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنیم $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های این متروید باشد. تعریف می‌کنیم $\mathcal{B}^* = \{X : \ E - X \in \mathcal{B}\}$. آنگاه $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ یک متروید با مجموعه پایه‌های $\mathcal{B}^*$ است. این متروید را دوگان [۳۷] متروید M گویند.

---
[۳۵] submodular
[۳۶] clouser
[۳۷] dual

پایه‌ها و دورهای ماتروید M^* را به ترتیب **هم‌پایه‌ها**[۳۸] و **هم‌دورهای** M [۳۹] گوییم.

گزاره ۱۶.۲.۱ اگر $S \subseteq E(M)$، آنگاه $r^*(S) = |S| - r(M) + r(E - S)$.

برهان : [[۸] ۲.۱.۹]. ■

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید M یک ماتروید روی E و $X \subseteq E$ باشد. اگر $cl(X) = X$، آنگاه X را یک مجموعه **بسته**[۴۰] یا **فلت**[۴۱] گویند.

تعریف ۱۸.۲.۱ فرض کنید f و g دو عضو ماتروید M باشند. هرگاه $\{f, g\}$ یک دور M باشد، آنگاه f و g را موازی گویند.

تعریف ۱۹.۲.۱ یک کلاس موازی از M زیر مجموعه‌ی ماکسیمال X از $E(M)$ است که هر دو عضو آن موازی باشند و هیچ عضو آن یک طوقه نباشد.

تعریف ۲۰.۲.۱ یک کلاس موازی را بدیهی گویند اگر شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱ اگر ماتروید M فاقد طوقه و هر کلاس موازی آن بدیهی باشد، آنگاه M را یک **ماتروید ساده** [۴۲] گویند.

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنید $|E| = n$ و $\mathcal{I}$ مجموعه تمامی زیر مجموعه‌های E باشد که حداکثر r عضو دارند ($0 \leq r \leq n$). در این صورت زوج $(E, \mathcal{I})$ یک ماتروید است. این ماتروید را **ماتروید یکنواخت**[۴۳] گویند و آن را به صورت $U_{r,n}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۳.۲.۱ **حذف یک مجموعه از ماتروید** [۴۴]: اگر $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماتروید دلخواه و $X \subseteq E$ و $\mathcal{I}' = \{Y \in \mathcal{I} : Y \subseteq E - X\}$ باشد، آنگاه $\mathcal{I}'$ گردایه زیر مجموعه‌های مستقل

[۳۸] cobase
[۳۹] cocircuit
[۴۰] closed
[۴۱] flat
[۴۲] simple matroid
[۴۳] uniform matroid
[۴۴] deletion of a set from a matroid