بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور مرکز مشهد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض

عنوان پایان نامه

بررسی هندسه فضاهای L^p و کاربردهایش
در فرآیندهای تصادفی با واریانس متناهی و نامتناهی

مولف:

مهدی زین الدینی

استاد راهنما :

سرکار خانم دکتر ثریا طالبی

۱۳۸۴/۹/۱۸

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

تاریخ: ....
شماره: ....
پیوست: ....

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: بررسی هندسه فضاهای LP و کاربردهای آن در فرآیندهای تصادفی بازار سهام شناسی و نادهشاهی

که توسط خدیجه بین الدین پیمبری تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۱۸/۹/۸۴ نمره: نوزده (۱۹) درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنما	استادیار	
—	استاد راهنمای همکار یا مشاور		
دکتر علی جلیلیان عطار	استاد ممتحن	استادیار	
دکتر مرتضی آقایی	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

۱۳۸۷ /۱۲/ ۳

با سپاس و تقدیر فراوان از:

-خداوند متعال که همیشه لطفش بی پایان است .

-پدر و مادرمهربانم که مشوق و یاور من بودند، و از هر گونه کمکی به من دریغ نکردند.

-استاد راهنمای ارجمند و خوبم سرکار خانم دکتر طالبی که هم راهنما،و هم مشوق من بودند، ونهایت لطف را نسبت به من داشتند.

فهرست مندرجات

چکیده

تعریف ۵.۱.۱. هر گاه Ω یک σ−جبر روی $\mathcal{X}$ باشد ، و تابع $\mu : \Omega \mapsto [0, \infty]$ دارای خاصیت جمعی شمارش پذیرباشد، یعنی به ازای هر دنبالهٔ $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ در Ω ، که اعضای آن جدا از هم باشند، $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. آنگاه به μ یک اندازه روی $\mathcal{X}$ ، وبه $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ یک فضای اندازه گوییم . برای احتراز از بدیهیات فرض می کنیم به ازای دست کم یک $A \in \mathcal{M}$ ، $\mu(A) < \infty$.

تعریف ۶.۱.۱. هر گاه $\mathcal{X}$ یک فضای اندازه پذیر،$\mathcal{Z}$ یک فضای توپولوژیک، و f نگاشتی از $\mathcal{X}$ به توی $\mathcal{Z}$ باشد، آنگاه گوییم f اندازه پذیر است ، اگر به ازای هر مجموعه باز V در $\mathcal{Z}$، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه اندازه پذیر در $\mathcal{X}$ باشد.

تعریف ۷.۱.۱.—مجموعه‌های بورل — فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای توپولوژیک باشد . میدانیم کوچکترین σ−جبر $\mathbb{B}$ در $\mathcal{X}$ موجود است ، بطوری که هر مجموعهٔ باز در $\mathcal{X}$ متعلق به $\mathbb{B}$ است . [[۱۵] صفحه ۱۲] . اعضای $\mathbb{B}$ را مجموعه‌های بورل $\mathcal{X}$ گویند .

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ فضاهای اندازه‌پذیر ، با σ−جبرهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}'$ باشند . نگاشت $\psi : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}'$ را $(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ اندازه‌پذیر گوییم ، اگر برای هر $A' \in \mathcal{M}'$ داشته باشیم $\psi^{-1}(A') \in \mathcal{M}$.

فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ ، میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد.

یک نرم روی $\mathcal{X}$ تابعی با ضابطهٔ $x \mapsto \|x\|$ از $\mathcal{X}$ به $[0, \infty)$ است بطوریکه:

۱) برای هر $x \in \mathcal{X}$ و $\lambda \in \mathbb{K}$، $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

تعریف ۲.۱.۱. هرگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ دو فضای توپولوژیک بوده و نگاشت f از $\mathcal{X}$ بتوی $\mathcal{Z}$ باشد ،آنگاه گوییم f پیوسته است ، اگر به ازای هر مجموعه باز V در $\mathcal{Z}$ ، $f^{-1}(V)$ مجموعه بازی در $\mathcal{X}$ باشد .

تعریف ۳.۱.۱. یک فضای متری مجموعه ای است مانند $\mathcal{X}$ ، که در آن یک تابع فاصله یا متر ، مانند $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto [0,\infty)$ با خواص زیر تعریف شده باشد :

۱) $\rho(x,y) = 0$ اگر وفقط اگر $x = y$.

۲) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

۳) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$

یک گوی باز به مرکز x ، وشعاع r در فضای متری $\mathcal{X}$ مجموعه‌ای به شکل $B_r(x) = \{y \in \mathcal{X} : \rho(x,y) < r\}$ می باشد . گردایه تمام اجتماع های دلخواه از این گویهای باز یک توپولوژی در $\mathcal{X}$ می باشد. به این توپولوژی ، توپولوژی متری گوییم . [[۱۵] صفحهٔ ۹] .

تعریف ۴.۱.۱. گردایه $\mathcal{M}$ از زیر مجموعه های مجموعه $\mathcal{X}$ را یک σ–جبر نامیم ، اگر $\mathcal{M}$ دارای خواص زیر باشد:

آ) $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$.

ب) هرگاه $A \in \mathcal{M}$ ، آنگاه $A^c \in \mathcal{M}$. که A^c همان متمم A نسبت به $\mathcal{X}$ است.

ج) هرگاه $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، و به ازای هر n ، $A_n \in \mathcal{M}$ ، آنگاه $A \in \mathcal{M}$.

هرگاه $\mathcal{M}$ یک σ–جبر در $\mathcal{X}$ باشد ، آنگاه $\mathcal{X}$ را یک **فضای اندازه‌پذیر** ، واعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در $\mathcal{X}$ نامیم .

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ توپولوژی و σ—جبر

تعریف ۱.۱.۱. گردایه τ از زیرمجموعه مجموعه های X را یک توپولوژی در X گوییم ، اگر τ دارای سه خاصیت زیر باشد:

۱) $\phi \in \tau$ ، و $X \in \tau$.

۲) هر گاه به‌ازای $i = 1, \cdots, n$ ، $V_i \in \tau$ ، آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap, \cdots, \cap V_n \in \tau$.

۳) هرگاه $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ گر دایه دلخواهی از اعضای τ باشد ،آنگاه $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد ، آنگاه X را یک فضای توپولوژیک گوییم ، و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X گوییم .

همچنین‌تجزیه متناهی پیش بینی را برای فرآیند $\{X_t\}$ ارائه می دهیم . در بخش آخر فصل ۴ شرایطی را بررسی می کنیم که این تجزیه های متناهی ، می توانند به تجزیه نامتناهی تبدیل شوند. همچنین شرایطی بیان می کنیم که یک فرآیند p—مانا با واریانس نا متناهی ، دارای تجزیه والد وتجزیه پیش بینی می باشد.

در فصل ۵ نشان می دهیم که پیش بینی یک عنصر از فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ، براساس $\{X_{-m},\cdots,X_{-1}\}$ وقتی $m\to\infty$ ، به پیش بینی آن بر اساس $\{\cdots,X_{-1}\}$ ، میل می کند.

هدف اصلی این مقاله ارائه یک پیش بینی نسبتاً خوب برای فرآیند های p—مانا و مانا و بیان این فرآیندها برحسب این پیش بینی و گسترش دامنه زمان نظریه پیش بینی برای این فرآیندهای است .

در ابتدا فضاهای محدب یکنواخت وتابع تصویر متری را تعریف کرده ، سپس به بررسی هندسه فضاهای L^p می پر دازیم . مفهوم عمود بودن دو عنصر در فضاهای L^p را تعریف کرده ، نامساوی متوازی الاضلاع را برای این فضاها بیان می کنیم ، نشان می دهیم فضاهای L^P محدب یکنواخت می باشند.

در فصل ۴ به بررسی فضاهای احتمال و آنالیز فرآیندهای تصادفی می پردازیم . فرآیند های مانا و مانای ضعیف را تعریف کرده ، تابع اتو کواریانس را برای این فرایندها بیان ، و آن را بر حسب تابع توزیع طیفی بیان می کنیم . فرآیند های p—مانا را تعریف می کنیم و برای $1 < p < \infty$ این فرآیندها را بعنوان اعضای فضاهای L^p درنظر گرفته و بررسی می کنیم . در این فصل رابطه فرآیندهای مانای ضعیف را با فرآیندهای ۲—مانابیان ، و نشان می دهیم که فرآیندهای ۲—مانا با میانگین ثابت همان فرآیندهای مانای ضعیف هستند. همچنین فضاهای $\mathcal{H}_t = \overline{sp}\{\dots, X_{t-1}, X_t\}$ و $\mathcal{H}(X) = \overline{sp}\{X_t\}$ و $\mathcal{H}_{-\infty} = \bigcap_{t<0} \mathcal{H}_t$ را بعنوان زیر فضاهای L^p در نظر گرفته و فرآیندهای قطعی و غیر قطعی را تعریف می کنیم . یک فرآیند p—مانا را بر اساس گذشته آن پیش بینی می کنیم، که این پیش بینی براساس تصویر متری X_t روی فضاهای $\mathcal{H}_{t-1}(X) = \overline{sp}\{X_s : s \leq t\}$ انجام میشود. که در این پیش بینی ، به فرآیندهای $\{\hat{X}_{t-1,\nu}\}$ و $\{\varepsilon_t\}$ می رسیم . که به $\{\varepsilon_t\}$ فرآیند نوآوری شده از $\{X_t\}$ و به $\{\hat{X}_{t-1,\nu}\}$ برآورد یافرآیند پیش بینی $\{X_t\}$ گوییم. در بخش ۲.۴ تجزیه والد متناهی را برای فرآیندهای مانا ارائه میدهیم .در این تجزیه دنباله های $\{a_k\}$ و $\{c_k\}$ را بدست آورده وارتباط این دو دنباله با هم را بوسیله یک رابطه بازگشتی نشان میدهیم .

۲) برای هر $x, y \in \mathcal{X}$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۳) $\|x\| = \circ$ اگر و فقط اگر $x = \circ$.

در این صورت به $\mathcal{X}$ یک **فضای برداری نرمدار** گوییم. هرگاه شرط (۳) را برداریم، تابع $\|.\|$ را **شبه نرم** می‌نامیم.

وقتی $\|.\|$ یک نرم روی $\mathcal{X}$ باشد، آنگاه تابع $\rho(x,y) = \|x-y\|$ یک **متر** روی $\mathcal{X}$ است ، و توپولوژی حاصل از آن را **توپولوژی نرم** گوییم. هرگاه $\mathcal{X}$ با متر نرم کامل باشد، آنرا یک **فضای باناخ** می‌نامیم.

۱.۱.۱ توابع خطی کراندار

یک تابع خطی $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ بین فضاهای برداری نرمدار را **کراندار** خوانیم هرگاه $C > \circ$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in \mathcal{X}$، $\|Tx\| \leq C\|x\|$. بوضوح عملگر همانی که آن را با I نشان می‌دهیم کراندار است.

قضیه ۹.۱.۱. هرگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ فضاهای برداری نرمدار و $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ یک تابع خطی باشد، آنگاه موارد زیر معادلند.

۱) T پیوسته است.

۲) T در $\circ$ پیوسته است.

۳) T کراندار است.

اثبات. رجوع کنید به [۱۰] . □

اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ دو فضای برداری نرمدار باشند، آنگاه مجموعهٔ همهٔ توابع خطی کراندار از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{Z}$ را با $L(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ نشان می‌دهیم. $L(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ یک فضای برداری است و تابع $\|T\| \mapsto T$، که $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\}$، یک نرم روی $L(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ است که **نرم عملگری** خوانده می‌شود. به آسانی می‌توان دید

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq ۰\} = \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x\}$$

قضیه ۱۰.۱.۱. $\mathcal{Z}$ یک فضای باناخ است اگر و فقط اگر $L(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ یک فضای باناخ باشد.

اثبات. رجوع شود به [۱۰] □

$T \in L(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ را در $L(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ **یکریختی** یا **معکوس‌پذیر** گوییم هرگاه T همیومورفیسم باشد، و معکوس آنرا با $T^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

$T \in L(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ را **طولپایی** گوییم هرگاه برای هر $x \in \mathcal{X}$، $\|Tx\| = \|x\|$. یک طولپایی یک به یک است ولی لزوماً پوشا نیست.

هر گاه $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{K}$ باشد، هر تابع خطی از $\mathcal{X}$ به $\mathbb{K}$ را یک **تابعک خطی** روی $\mathcal{X}$ می‌نامیم. اگر $\mathcal{X}$ یک فضای برداری نرمدار باشد، فضای $L(\mathcal{X},\mathbb{K})$ را **فضای دوگان** $\mathcal{X}$ می‌نامیم و با $\mathcal{X}^*$ نشان می‌دهیم. از قضیه ۱۰.۱.۱ میدانیم $\mathcal{X}^*$ با نرم عملگری یک فضای باناخ است.

۲.۱.۱ فضاهای برداری توپولوژیکی

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری $\mathcal{X}$ باشد ، بطوری که

۱) هر نقطه از $\mathcal{X}$ یک مجموعهٔ بسته باشد .

۲) عملگرهای جمع برداری وضرب اسکالر به ترتیب از $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ ، و $. : \mathbb{K} \times \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ ، پیوسته باشند .

آنگاه به $\mathcal{X}$ یک فضای برداری توپولوژیک گوییم .

۳.۱.۱ توپـــولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره

اگر $\mathcal{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی ، با توپولوژی τ باشد ، به توپولوژی τ_w که توسط $\mathcal{X}^*$ روی $\mathcal{X}$ القا می شود ، توپولوژی ضعیف می گوییم . توپولوژی ضعیف τ_w توسط تابعک های خطی $\mathcal{X}$ بدست می آید . یعنی هر عضو آن بصورت اجتماع دلخواهی از اشتراک های متناهی $\{f_i^{-1}(v_i)\}$ ، که f_i ها تابعک های خطی روی $\mathcal{X}$ ، و v_i مجموعه های باز در $\mathbb{C}$ می باشند . به τ توپولوژی اصلی گوییم .

اگر $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد ، $\mathcal{X}^*$ نیز یک فضای باناخ است . و نگاشت φ_x که

$$\varphi_x : \mathcal{X}^* \mapsto \mathbb{C}$$
$$x^* \mapsto x^*(x)$$

یک تابعک خطی روی $\mathcal{X}^*$ می باشد . و توپولوژی القا شده توسط $\{\varphi_x : x \in \mathcal{X}\}$ روی $\mathcal{X}^*$ را توپولوژی ضعیف ستاره گوییم .

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای باناخ $\mathcal{X}$ را انعکاسی [1] گوییم ، اگر همریختی $\Phi : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^*$ که $x \mapsto \varphi_x$ ، پوشا باشد .

تعریف ۱۳.۱.۱. زیر مجموعه E از فضای برداری $\mathcal{X}$ را محدب گوییم ، اگر برای هر $0 \leq t \leq 1$ ، داشته باشیم؛

---
[1] reflexive

$.\ tE + (1-t)E = E$

قضیه ۱۴.۱.۱. فرض کنیم E یک زیر مجموعه محدب از فضای موضعاً محدب $\mathcal{X}$ باشد. در این صورت بستار E نسبت به توپولوژی ضعیف برابر با بستار E نسبت به توپولوژی اصلی می باشد.

[[۱۴]؛ قضیه 3.12]

گزاره ۱۵.۱.۱. اگر $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ و f یک تابعک خطی روی $\mathcal{X}$ باشد، آنگاه $f_r(x) = Ref(x)$ یک تابعک خطی حقیقی روی $\mathcal{X}$ است و $f(x) = f_r(x) - if_r(ix)$. بعلاوه هر تابعک خطی حقیقی روی $\mathcal{X}$ به همین طریق از یک تابعک خطی روی $\mathcal{X}$ بدست می آید. [۱۰]

۲.۱ فضاهای L^p

هرگاه $0 < p < \infty$ و $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، تابع $\|.\|_p$ را از مجموعهٔ همهٔ توابع اندازه‌پذیر $f : X \to \mathbb{C}$ بتوی $\mathbb{R}$، بصورت $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $L^p(X) = L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_p < \infty\}$. از این به بعد منظور از $L^p(X)$ همان $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ است، مگر آنکه تصریح کنیم.

۳.۱ فضاهای هیلبرت و فضاهای l^p

هرگاه I یک مجموعهٔ اندیس‌گذار و $p \geq ۱$ و $\mathbb{K}$ میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد، تعریف می‌کنیم $l^p(I) = \{\{c_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{K} : \sum_{i\in I} |c_i|^p < \infty\}$. به عبارت دیگر هرگاه μ یک اندازهٔ شمارشی روی $(I, \mathcal{P}(I))$ باشد، آنگاه $l^p(I) = L^p(I, \mathcal{P}(I), \mu)$. توجه کنید هنگامیکه می‌گوییم $c \in l^p(I)$ بدان معنی است که $c = \{c_i\}_{i\in I} \in l^p(I)$.

۱.۳.۱ فضاهای هیلبرت

فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. یک حاصلضرب داخلی روی $\mathcal{H}$ تابعی چون $\langle .,. \rangle$ از $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ بتوی $\mathbb{K}$ است بطوری که:

۱) برای هر $a, b \in \mathbb{K}$ و $x, y, z \in \mathcal{H}$، $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$.

۲) برای هر $x, y \in \mathcal{H}$، $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

۳) برای هر $۰ \neq x \in \mathcal{H}$، $\langle x, x \rangle \in (۰, \infty)$.

حال تعریف می‌کنیم $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. در این صورت **نامساوی شوارتز** بصورت $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ را خواهیم داشت و تابع $x \mapsto \|x\|$ یک نرم روی $\mathcal{H}$ خواهد بود. چنانچه $\mathcal{H}$ با نرم حاصل از حاصل ضرب داخلی کامل باشد به آن **فضای هیلبرت** گویند. از این به بعد منظور از $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت است، مگر آنکه تصریح کنیم موجود دیگری است. دو عنصر x, y در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را متعامد گوییم، اگر $\langle x, y \rangle = ۰$. ومی نویسیم $x \perp y$.

قضیه ۱.۳.۱. اگر $\mathcal{M}$ یک زیرمجموعه محدب $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه برای هر $x_\circ \in \mathcal{H}$ عنصر یکتای $y_\circ \in \mathcal{M}$ است، که برای هر $y \in \mathcal{M}$، $\|x_\circ - y_\circ\| \leq \|x_\circ - y\|$. و $x_\circ - y_\circ \perp \mathcal{M}$.

اثبات. رجوع شود به [[۱۰] صفحه ۱٦٦] □

۲.۳.۱ پایهٔ متعامد یکه

زیر مجموعهٔ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ از $\mathcal{H}$ را **متعامد یکه** خوانیم هرگاه؛ اولاً برای هر $\alpha \in A$، $\|e_\alpha\| = 1$؛ ثانیاً برای هر $\alpha, \beta \in A$ که $\alpha \neq \beta$، $e_\alpha \perp e_\beta$.

قضیه ۲.۳.۱ .نامساوی بسل. فرض کنیم $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه در $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\sum_{\alpha\in A} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. به خصوص مجموعهٔ $\{\alpha : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\}$ شمارا است.

اثبات. رجوع کنید به [[۱۰] صفحه ۱٦۳] □

قضیه ۳.۳.۱ . اگر $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه در $\mathcal{H}$ باشد، موارد زیر معادلند.

۱) اگر برای هر $\alpha \in A$، $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$، آنگاه $x = 0$.

۲) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$.

۳) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$.

اثبات. رجوع کنید به [۱۰] □

مجموعهٔ متعامد یکه‌ای که در شرایط (۱—۳) قضیهٔ قبل صدق کند را یک **پایهٔ متعامد یکه** برای $\mathcal{H}$ گویند. بعنوان مثال اگر $\mathcal{H} = l^2(A)$، آنگاه مجموعهٔ $\{e^\beta : \beta \in A\}$، که $e^\beta(\alpha) = \delta_{\beta,\alpha}$، را در نظر می‌گیریم که $\delta_{\beta,\alpha}$ تابع دلتای کرونکر است. واضح است که $\{e^\beta : \beta \in A\}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه است ، و برای هر $\{c_\alpha\}_{\alpha\in A} \in l^2(A)$ داریم،

و لذا $\langle\{c_\alpha\}, e^\beta\rangle = \langle\{c_\alpha\}, \{e^\beta(\alpha)\}\rangle = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha e^\beta(\alpha) = c_\beta$

$$\sum_{\beta\in A}\langle\{c_\alpha\}, e^\beta\rangle e^\beta = \sum_{\beta\in A} c_\beta\{e^\beta(\alpha)\} = \{c_\alpha\}$$

بنابراین $\{e^\beta : \beta\in A\}$ یک پایهٔ متعامد یکه است.

گزاره ۴.۳.۱. هر فضای هیلبرت یک پایه متعامد یکه دارد.[۱۰]

۳.۳.۱ رابطه فضاهای هیلبرت با فضاهای l^2

گزاره ۵.۳.۱. فرض کنیم $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه در $\mathcal{H}$ باشد و $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ دنباله‌ای از عناصر $\mathbb{K}$ باشد. سری $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ در $\mathcal{H}$ همگرا است اگر و فقط اگر $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$.
در این صورت $\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

[۱۰]

لذا اگر $x\in\mathcal{H}$ بصورت $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ باشد — که $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه است — آنگاه $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ در $l^2(\mathbb{Z})$ خواهد بود.

فصل ۲

فضاهای محدب یکنواخت

۱.۲

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم x,y اعضای فضای باناخ $\mathcal{X}$ باشند . گوییم x بر y عمود است و می نویسیم $x \perp_{\mathcal{X}} y$ ، اگر برای هر اسکالر α داشته باشیم ، $\|x\| \leq \|x+\alpha y\|$

اگر $\mathcal{X} = L^p(\mu)$ ، آنگاه به جای $x \perp_{\mathcal{X}} y$ می نویسیم $x \perp_p y$. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد ، تعریف بالا با تعریف عمود بودن در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یکی است. زیرا اگر $x,y \in \mathcal{H}$ ، و $\langle x,y\rangle = ۰$ ، و α یک اسکالر باشد، آنگاه داریم ،

$$\|x+\alpha y\|^۲ = \|x\|^۲ + |\alpha|^۲\|y\|^۲ \geq \|x\|^۲$$