دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

بررسی خواص حلقه‌های آرمندایز و ایده‌آل‌های آرمندایز ضعیف

استاد راهنما

دکتر ناهید هادیان دهکردی

استاد مشاور

دکتر صدیقه محسنی رجایی

دانشجو

مونا عالی کلوگانی

اسفند ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر، مادر و خواهر بزرگوارم

و همسر مهربانم

به پاس لحظه‌ای از زحمات و محبت‌های بی‌دریغشان.

قدردانی و تشکر

به نام آنکه جان بخشید و کتابت آموخت.

با یاد تو این مختصر را آغاز می‌کنم.

سپاس و ستایش ایزد منان را که با الطاف بیکران خود، در سایه راهگشایی خانواده‌ام، این توفیق را عنایت فرمود تا بتوانم گام کوچکی را در راه ارتقای دانش‌اندوزی بردارم. امروز که در پایان این گام از تحصیلات خویش هستم سربلندم بتوانم در آینده برای جامعه فرد مفید و متعهدی باشم و با ادامه‌ی راه، قدم‌های موثری در جهت خدمت به سرزمینم بردارم.

ضمن تشکر از خانواده‌ی گرامی و همسر مهربانم که همواره مشوق و راهنمای من بوده‌اند، وظیفه‌ی خود می‌دانم از استاد راهنمایم خانم دکتر ناهید هادیان دهکردی تشکر و سپاسگذاری نمایم که به واسطه‌ی حمایت و راهنمایی‌های بی‌دریغشان راهم را هموار نموده‌اند.

چکیده

تمام حلقه‌ها در این رساله شرکت‌پذیر یکدار در نظر گرفته شده‌اند. حلقه‌ی آرمنداریز R را به این صورت تعریف می‌کنیم که برای چندجمله‌ای‌های $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$ در حلقه‌ی $R[x]$ به طوری‌که $f(x)g(x) = 0$، نتیجه شود، برای هر i, j، $a_ib_j = 0$. (عکس مطلب همواره برقرار است.) همچنین توسیع‌های دیگری از حلقه‌ی آرمنداریز مانند حلقه‌های آرمنداریز ضعیف و آرمنداریز پوچ را معرفی کرده و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

از جمله قضایای اصلی که در این رساله بررسی شده‌اند، می‌توان اشاره کرد به این‌که هر حلقه‌ی کاهشی، آرمنداریز است. این مطلب توسط شخصی به نام آرمنداریز ثابت شد. همچنین در سال ۲۰۰۶ لیو نشان داد که حلقه‌ی R آرمنداریز ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر n، حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی ($T_n(R)$)،آرمنداریز ضعیف باشد. از دیگر قضایای مطرح شده در این رساله می‌توان به قضیه‌ی I ایده‌آل آرمنداریز ضعیف حلقه‌ی R باشد در این‌صورت $I[x]$ ایده‌آل آرمنداریز ضعیف حلقه‌ی $R[x]$ است که توسط دکتر هاشمی اثبات شده اشاره کرد.

در نهایت اصلی‌ترین قضیه‌ی حلقه‌های آرمنداریز پوچ را بیان می‌کنیم. اگر I ایده‌آل پوچ حلقه‌ی R باشد، آرمنداریز پوچ بودن حلقه‌ی R، آرمنداریز پوچ بودن حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ را به صورت دو طرفه ثابت می‌کند. مقالات مربوط به این قضایا در منبع رساله به‌طور کامل آورده شده‌اند.

کلمات کلیدی:حلقه‌ی آرمنداریز، حلقه‌ی آرمنداریز ضعیف، ایده‌آل آرمنداریز ضعیف، حلقه‌ی آرمنداریز پوچ، حلقه‌ی کاهشی، حلقه‌ی نیمه‌جابجایی.

مقدمه

رِج[1] و چاوچاریا[2] در سال ۱۹۹۷ مفهوم حلقه‌ی آرمنداریز[3] را مطرح کردند. آن‌ها تعریف کردند که حلقه‌ی R آرمنداریز است هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$ در $R[x]$ به طوری‌که $f(x)g(x) = 0$، نتیجه شود، برای هر i, j، $a_ib_j = 0$.

علت این‌که نامِ «آرمنداریز» برای این حلقه انتخاب شده، این است که در سال ۱۹۷۴ شخصی به نام آرمنداریز ثابت کرد که هر حلقه‌ی کاهشی[4] (حلقه‌ای که عنصر پوچ‌توان ناصفر ندارد) در شرایط گفته شده صدق می‌کند.

بسیاری از خواص، مثال‌ها و مثال‌های نقض درباره‌ی حلقه‌های آرمنداریز در سال ۱۹۷۴ توسط آرمنداریز، رِج و چاوچاریا در سال ۱۹۹۷، کیم[5] و لی[6] در سال ۲۰۰۰ و هاه[7] در سال ۲۰۰۲ ارائه شده است. البته بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی از جمله دکتر احمد موسوی و ابراهیم هاشمی توانسته‌اند مقالات بسیار ارزشمندی را در این زمینه ارائه دهند که در این رساله از مقاله‌ی دکتر هاشمی استفاده شده است. همچنین خانم شیوا دزفولی، رساله‌ی کارشناسی ارشد خود را در زمینه‌ی بررسی و اثبات نتایجی در مورد حلقه‌های آرمنداریز و چگونگی ارتباط این حلقه با حلقه‌های کاهشی، جابجایی،

---

[1] *Rege*
[2] *Chhawchharia*
[3] *Armendariz*
[4] *Reduce*
[5] *Kim*
[6] *Lee*
[7] *Huh*

گاوسی و حسابی ارائه کرده‌اند و مثال‌های بسیار خوبی از حلقه‌های آرمنداریز و غیرآرمنداریز را مورد بررسی قرار داده‌اند که مطالعه‌ی آن‌ها خالی از لطف نمی‌باشد، لذا این مطلب ما را بر آن داشت تا در این رساله به بیان مجدد برخی مطالب پایه‌ای این حلقه، معرفی و بررسی ویژگی‌های توسیع‌های آن از جمله حلقه‌های آرمنداریز ضعیف و آرمنداریز پوچ بپردازیم تا زمینه‌ای برای آشنایی و ایجاد علاقه برای دانش‌جویان ایرانی فراهم آوریم تا بتوانند گام‌های موثری را در این زمینه بردارند.
این رساله از پنج فصل تشکیل شده است که در تمام فصول آن، حلقه‌ها شرکت‌پذیر یکدارند.
در فصل اول بیشتر به بیان تعاریف و لم‌های مقدماتی مورد نیاز این رساله پرداخته‌ایم تا با یادآوری آن‌ها به درک سریع‌تر اصطلاحات و مطالب آمده در فصول دیگر کمک کنیم.
در فصل دوم که بیشتر مطالب آن از مراجع [۱] و [۶] گرفته شده، سعی کردیم که ابتدا به معرفی چند حلقه‌ی اساسی از جمله حلقه‌های کاهشی و نیمه‌جابجایی بپردازیم و روابط آن‌ها با یکدیگر را تحت لم‌های مختلف ارائه کنیم تا به این ترتیب زمینه‌ی لازم برای معرفی حلقه‌ی آرمنداریز ایجاد شود که در بخش دوم این فصل، حلقه‌ی آرمنداریز را معرفی کرده و با استفاده از چند لم و قضیه این حلقه را مورد بررسی قرار داده‌ایم. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به لم‌های زیر اشاره کرد:

(i) هر حلقه‌ی کاهشی، آرمنداریز است.

(ii) اگر R حلقه‌ی آرمنداریز باشد آن‌گاه $R[x]$ آرمنداریز است.

در فصل سوم، توسیعی از حلقه‌های آرمنداریز، یعنی حلقه‌ی آرمنداریز ضعیف، که در سال ۲۰۰۳ توسط هانگ[۸] مورد بررسی قرار گرفت، را معرفی می‌کنیم و به بررسی چگونگی ارتباط این حلقه با حلقه‌های تعریف شده در فصل دوم می‌پردازیم و لم‌ها و قضایای جالبی را در این زمینه اثبات می‌کنیم.
از جمله‌ی این لم‌ها و قضایا می‌توان موارد زیر را بیان کرد:

(i) حلقه‌ی R آرمنداریز ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر n، حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی حلقه‌ی R ($T_n(R)$)، آرمنداریز ضعیف باشد.

(ii) اگر R نیمه‌جابجایی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $R[x]$ روی R و حلقه‌ی $\frac{R[x]}{<x^n>}$ آرمنداریز ضعیف هستند.

---

[۸] $Hong$

همچنین در این فصل سوالی را مطرح می‌کنیم که در فصل چهارم سعی بر آن شده تا به این سوال پاسخ دهیم. به این منظور، در فصل چهارم به معرفی خاصیت‌های IFP[۹] و IFP ضعیف می‌پردازیم و ایده‌آل‌های آرمنداریز ضعیف را تعریف می‌کنیم و با اثبات قضایای مربوط به آن به سوال مطرح شده در فصل سوم پاسخ می‌دهیم. از جمله قضایای این فصل می‌توان به قضایای زیر اشاره کرد:

(i) اگر ایده‌آل صفر I از حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد آن‌گاه حلقه‌ی R نیمه‌جابجایی است.

(ii) اگر I ایده‌آل آرمنداریز ضعیف حلقه‌ی R باشد آن‌گاه $I[x]$ ایده‌آل آرمنداریز ضعیف حلقه‌ی $R[x]$ است.

در نهایت در فصل پنجم به معرفی حلقه‌ی آرمنداریز پوچ و بررسی چگونگی ارتباط این حلقه با حلقه‌های تعریف شده در فصل‌های قبل می‌پردازیم که مهمترین قضیه‌ی این فصل به این شرح است:
اگر R یک حلقه و $I \trianglelefteq R$ ایده‌آل پوچ باشد، حلقه‌ی R آرمنداریز پوچ است اگر و تنها اگر حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ آرمنداریز پوچ باشد.
در این فصل با دو سوال مواجه می‌شویم که تلاش در جهت پاسخ‌گویی به آن‌ها می‌تواند بستر مناسبی را برای تحقیق دانش‌جویان علاقه‌مند فراهم آورد تا مانند همیشه در زمینه‌های علمی بدرخشند.

مقالات اصلی که این پایان‌نامه با کمک آن‌ها تدوین شده است، مقالات [۱]،[۲]، [۴]، [٦] و [۷] می‌باشند.

---

[۹] *Insertion of factors property*

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیاز

در این فصل مفاهیمی را که در طول این رساله با آن‌ها سروکار داریم، به اختصار بیان می‌کنیم. اکثر لم ها و قضایای این فصل با این فرض که خواننده احتمالاً با آن‌ها آشناست بدون اثبات آورده شده‌اند.

۱.۱ تعریف و لم

تعریف ۱.۱ عضو a را در حلقه‌ی R **خودتوان** گویند هرگاه $a^{۲} = a$. به طور کلی‌تر می‌توان گفت که عضو a خودتوان است هرگاه برای هر عدد طبیعی n، $a^n = a$.

تعریف ۲.۱ عضو a را در حلقه‌ی R **پوچ‌توان** گویند هرگاه عدد طبیعی n چنان باشد که $a^n = ۰$. مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R را با نماد $Nil(R)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$Nil(R) = \{a \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ s.t\ \ a^n = ۰\}$$

لم ۳.۱ اگر R یک حلقه و S زیرحلقه‌ی آن باشد در این‌صورت $Nil(S) \subseteq Nil(R)$.

نکته‌ای که در اینجا قابل توجه می‌باشد این است که، اگر R یک حلقه باشد آن‌گاه $Nil(R)$ لزوماً ایده‌آل آن نمی‌باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که $Nil(R)$ حتی شرط زیرحلقه بودن را نیز برآورده نمی‌کند.

مثال. فرض کنید R یک حلقه باشد، حلقه‌ی ناجابجایی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in R,\ 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

نشان می‌دهیم $Nil(S)$ زیرحلقه‌ی S نمی‌باشد. فرض کنید

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,\ \ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in S$$

به طوری‌که $\alpha^2 = \beta^2 = 0$، لذا $\alpha,\ \beta \in Nil(S)$. حال نشان می‌دهیم که $\alpha - \beta \notin Nil(S)$. با توجه به تعاریف $\alpha,\ \beta$، می‌توان نوشت،

$$\alpha - \beta = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

با به توان رساندن این ماتریس خواهیم دید که برای هر n، $(\alpha - \beta)^n \neq 0$. این مطلب نشان می‌دهد که $Nil(S)$ خاصیت بسته بودن را ندارد و لذا زیرحلقه‌ی S نیست.

در فصل‌های بعد، شرطی را روی حلقه‌ی R قرار می‌دهیم که با استفاده از آن $Nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد.

لم ۴.۱ فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل آن باشد به طوری‌که $I \subseteq Nil(R)$. در این‌صورت $Nil(\frac{R}{I}) \subseteq Nil(R)$.

اثبات. تعریف می‌کنیم $\bar{a} = a + I$ که در آن $a \in R$. به این ترتیب

$$Nil(\frac{R}{I}) = \{\bar{a} \mid a \in R\ ,\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ s.t\ \ (\bar{a})^n = 0_{\frac{R}{I}}\}$$

طبق تعریف داریم،

$$\bar{x} \in Nil(\frac{R}{I}) \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ s.t\ \ (\bar{x})^n = \bar{0} \Rightarrow x^n + I = I \Rightarrow x^n \in I$$

از طرفی طبق فرض قضیه، $I \subseteq Nil(R)$. بنابراین $x^n \in Nil(R)$، یعنی عدد طبیعی مانند m وجود دارد به طوری‌که $x^{mn} = 0$. لذا $x \in Nil(R)$. ■

لم ۵.۱ فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل پوچ آن باشد، تعریف کنید $\bar{R} = \frac{R}{I}$، در این‌صورت $Nil(\bar{R}) = \overline{Nil(R)}$.

اثبات. بنا به تعریف می‌دانیم،

$$Nil(\bar{R}) = \{\bar{a} \mid a \in R\ ,\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ s.t\ \ (\bar{a})^n = \bar{0}\}$$

فرض کنید $\bar{x} \in Nil(\bar{R})$، لذا

$$\exists\ n \in \mathbb{N}\ \ s.t\ \ \bar{x}^n = \bar{0} \Rightarrow x^n \in I \Rightarrow \bar{x} \in \overline{Nil(R)}$$

زیرا I ایده‌آل پوچ حلقه‌ی R است، لذا عدد طبیعی مانند m وجود دارد به طوری‌که $x^{mn} = 0$. پس $x \in Nil(R)$.

برعکس، فرض کنید $\bar{x} \in \overline{Nil(R)}$، در این‌صورت $x \in Nil(R)$ موجود است به طوری‌که $\bar{x} = x + I$. چون $x \in Nil(R)$، پس عدد طبیعی مانند n هست به قسمی‌که $x^n = 0$، در نتیجه $x^n \in I$. بنابراین

$$\bar{x}^n = (x + I)^n = x^n + I = I \Rightarrow \bar{x} \in Nil(\bar{R})$$

■

لم ۶.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $a, b \in R$ آن‌گاه Rab ایده‌آل یک‌طرفه‌ی حلقه‌ی R است.

اثبات. بنا به تعریف $Rab = \{rab \mid r \in R\}$. ادعا می‌کنیم که این مجموعه نسبت به جمع بسته است، زیرا برای هر $r_1, r_2 \in R$ که $r_1ab, r_2ab \in Rab$، داریم،

$$r_1ab + r_2ab = (r_1 + r_2)ab$$

از طرفی چون R یک حلقه است، پس $r_1 + r_2 \in R$، بنابراین $r_1ab + r_2ab \in Rab$.
حال فرض کنید s عضو دلخواه حلقه‌ی R باشد و $rab \in Rab$، در این‌صورت، $s(rab) = sr(ab)$ و چون R یک حلقه است، لذا $sr \in R$، پس $s(rab) \in Rab$. به این ترتیب ثابت کردیم که Rab یک ایده‌آل چپ حلقه‌ی R است. به وضوح می‌بینیم که Rab ایده‌آل راست حلقه‌ی R نیست. ■

در اینجا حلقه‌ای را بیان و ایده‌آل‌هایی از آن را معرفی می‌کنیم که این ایده‌آل‌ها، ایده‌آل‌های یک‌طرفه و یا دوطرفه هستند.

مثال. حلقه‌ی $M_2(\mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید. قرار دهید،

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$I_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\} \qquad I_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

ماتریس صفر متعلق به I_1 می‌باشد، لذا این مجموعه ناتهی است. از طرفی برای $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \in I_1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{pmatrix} \in I_1$$

زیرا $a-c,\ b-d \in \mathbb{Z}$. حال اگر $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید، داریم،

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yb & 0 \\ za+wb & 0 \end{pmatrix} \in I_1$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix} \notin I_1$$

پس I_1 ایده‌آل چپ حلقه‌ی $M_2(\mathbb{Z})$ است ولی ایده‌آل راست آن نمی‌باشد.
به همین ترتیب می‌توان نشان داد که I_2 ایده‌آل دوطرفه است، I_3 ایده‌آل حلقه نیست و I_4 ایده‌آل یک‌طرفه‌ی راست است.

لم ۷.۱ فرض کنید R یک حلقه و $T_n(R)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ با درایه‌هایی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت

$$Nil(T_n(R)) = \begin{pmatrix} Nil(R) & R & \dots & R \\ 0 & Nil(R) & \dots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Nil(R) \end{pmatrix}$$

اثبات. ماتریس $A \in Nil(T_n(R))$ را در نظر بگیرید. چون $Nil(T_n(R)) \subseteq T_n(R)$، پس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

لذا عدد طبیعی مانند l وجود دارد به طوری‌که $A^l = 0$. با به توان رساندن ماتریس فوق خواهیم داشت،

$$A^l = \begin{pmatrix} a_{11}^l & * & \dots & * \\ 0 & a_{22}^l & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^l \end{pmatrix} = O$$

پس برای هر $1 \leq s \leq n$، $a_{ss}^l = 0$. بنابراین $a_{ss} \in Nil(R)$.

برعکس، فرض کنید برای هر $1 \leq s \leq n$، $a_{ss} \in Nil(R)$، لذا برای هر s، عدد طبیعی n_s موجود است به طوری‌که $a_{ss}^{n_s} = 0$. بنابراین با تعریف

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

و قرار دادن $m = Max\{n_s\}_{s=۱}^{n}$ داریم،

$$A^m = \begin{pmatrix} a_{۱۱}^m & * & \dots & * \\ ∘ & a_{۲۲}^m & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ∘ & ∘ & \dots & a_{nn}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ∘ & * & \dots & * \\ ∘ & ∘ & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ∘ & ∘ & \dots & ∘ \end{pmatrix}$$

به وضوح A^m پوچ‌توان است، پس $A \in Nil(T_n(R))$. ■

قضیه ۱.۸ (باقی‌مانده‌ی چینی)
فرض کنید R یک حلقه و $A, A_۱, ..., A_k$ ایده آل‌های R باشند. اگر

۱) $A_۱ \cap A_۲ \cap ... \cap A_k = A$

۲) برای هر $۱ \le i < j \le k$، $A_i + A_j = R$

آن‌گاه $\frac{R}{A} \cong \frac{R}{A_۱} \times ... \times \frac{R}{A_k}$.

اثبات. تابع $\varphi : R \longrightarrow \frac{R}{A_۱} \times ... \times \frac{R}{A_k}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(r) = (r + A_۱, ..., r + A_k)$$

به وضوح φ یک همریختی است. نشان می‌دهیم $Ker\varphi = A$. برای اثبات این مطلب، فرض کنید $x \in Ker\varphi$، لذا $\varphi(x) = ∘$. با توجه به تعریف تابع، $(x + A_۱, ..., x + A_k) = \bar{∘}$، پس برای هر $۱ \le i \le k$، $x + A_i = \bar{∘}$، بنابراین برای هر $۱ \le i \le k$، $x \in \bigcap\limits_{i=۱}^{k} A_i = A$، در نتیجه $Ker\varphi \subseteq A$.
عکس مطالب گفته شده همواره برقرار است، لذا ثابت می‌شود که $Ker\varphi = A$.
اکنون کافی است ثابت کنیم که همریختی φ، پوشا است، سپس با توجه به قضیه‌ی اول همریختی حکم بدست می‌آید. فرض کنید $b_۱, ..., b_k$ عناصر دلخواه در حلقه‌ی R باشند. عنصر $r \in R$ را باید پیدا کنیم به طوری‌که $\varphi(r) = (b_۱ + A_۱, ..., b_k + A_k)$، یا به عبارتی برای $۱ \le i \le k$، $r - b_i \in A_i$.
با توجه به فرضیات قضیه، می‌توان نوشت:

$$R = RR = (A_۱+A_۲)(A_۱+A_۳) = A_۱A_۱+A_۱A_۳+A_۲A_۱+A_۲A_۳ \subseteq A_۱+A_۱+A_۱+(A_۲\cap A_۳)$$

زیرا $A_۲$ و $A_۳$ ایده‌آل‌های حلقه‌ی R هستند، لذا $A_۲A_۳ \subseteq A_۲ \cap A_۳$. از طرفی $A_۱ + A_۱ + A_۱ = A_۱$، پس با توجه به قسمت دوم فرض قضیه، $R \subseteq A_۱ + (A_۲ \cap A_۳) = R$.
این مطلب برای تمام ایده‌آل‌های حلقه‌ی R برقرار است، لذا برای هر $۱ \leq i, j \leq k$ و $i \neq j$،

$$(A_i + A_۱)...(A_i + A_{i-۱})(A_i + A_{i+۱})...(A_i + A_k) = A_i + (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k) = R$$

به این ترتیب برای هر $۱ \leq i \leq k$، خواهیم داشت، $b_i = a_i + r_i$ که $a_i \in A_i$ و $r_i \in (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k)$. قرار دهید $r = r_۱ + ... + r_k$، در این‌صورت چون $a_i \in A_i$، $r_i \in (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k)$ و $R - (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k) = A_i$، لذا خواهیم داشت:

$$r - b_i = r_۱ + ... + r_k - (a_i + r_i) = r_۱ + ... + r_{i-۱} + r_{i+۱} + ... + r_k - a_i \in A_i$$

■

تعریف ۹.۱ فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. رادیکال I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \ \exists\, n \in \mathbb{N} \ \ s.t \ \ a^n \in I\}$$

تعریف ۱۰.۱ عضو a را در حلقه‌ی R در نظر بگیرید. $Ann_R(a)$ راست ($Ann_R(a)$ چپ) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ann_R(a) = \{b \in R \mid ab = ۰\} \quad (Ann_R(a) = \{b \in R \mid ba = ۰\})$$

تعریف ۱.۱۱ عنصر a را **مقسوم‌علیه صفر چپ** (راست) حلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه عنصر غیرصفر $b \in R$ موجود باشد به طوری‌که $ab = 0$ ($ba = 0$).
عنصر a را **مقسوم‌علیه صفر** حلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه مقسوم‌علیه راست و چپ باشد.

تعریف ۱.۱۲ عنصر a از حلقه‌ی R را **عنصر منظم** می‌نامیم هرگاه مقسوم‌علیه صفر چپ و راست نباشد.
حلقه‌ی R را یک **حلقه‌ی منظم** نامند هرگاه هر عضو آن منظم باشد.

تعریف ۱.۱۳ فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار و S زیرمجموعه‌ی ناتهی آن باشد. S را **زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی** از حلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه

i) $1_R \in S$.

ii) به ازای هر $x, y \in S$، $xy \in S$.

تعریف ۱.۱۴ حلقه‌ی شرکت‌پذیر A را یک **جبر** روی میدان F می‌خوانند هرگاه A یک فضای برداری روی F باشد به طوری‌که، به ازای هر $a, b \in A$ و هر $\alpha \in F$،

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

همسانی‌ها، یکسانی‌ها، ایده‌آل‌ها و مانند این‌ها، برای جبرها مثل حلقه‌ها تعریف می‌شوند، با این شرط اضافی که این‌ها باید تحت نهاد فضای برداری محفوظ یا نامتغیر باقی بمانند.

تعریف ۱.۱۵ ایده‌آل I از حلقه‌ی R را **ایده‌آل اول** گوییم هرگاه برای $ab \in I$، نتیجه شود که $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۱.۱۶ ایده‌آل سره‌ی I از حلقه‌ی R را **ایده‌آل نیمه‌اول** می‌نامیم هرگاه برای ایده‌آل J از حلقه‌ی R و عدد صحیح و مثبت n، اگر $J^n \subseteq I$، نتیجه شود که $J \subseteq I$.

فصل ۲

حلقه‌های کاهشی و آرمنداریز

۱.۲ مقدمه

در این فصل به معرفی حلقه‌های کاهشی، نیمه‌جابجایی و آرمنداریز می‌پردازیم و برخی خواص این حلقه‌ها و چگونگی ارتباط آن‌ها با یکدیگر را بیان می‌کنیم. همچنین در فصل‌های آتی بیشتر به بررسی حلقه‌های آرمنداریز و توسیع‌های متفاوتی از آن‌ها مانند حلقه‌های آرمنداریز ضعیف و آرمنداریز پوچ خواهیم پرداخت.
مطالب این فصل بیشتر از مقالات [۱] و [٦] جمع‌آوری شده که حلقه‌ها در این مراجع شرکت‌پذیرِ یکدار در نظر گرفته شده‌اند.

۲.۲ حلقه‌های کاهشی

تعریف ۱.۲ حلقه‌ای را که هیچ عنصر پوچ‌توان غیرصفر نداشته باشد، حلقه‌ی **کاهشی** می‌نامند.

لم ۲.۲ حلقه‌ی R کاهشی است اگر و تنها اگر $R[x]$ کاهشی باشد.