بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی

عنوان:

قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی تعمیم‌یافته و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر علیرضا امینی هرندی

استاد مشاور:

دکتر محمد شفیع دهاقین

توسط:

هاجر امامی میبدی

مهر ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تقديم

تشکر و قدردانی

خدایا تو را سپاس، آنگاه که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه‌ساز زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم **پدر و مادر** عزیزم، که مرا به جان پروردن و امید رسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختن از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

برخود لازم می‌دانم از **جناب آقای دکتر امینی** به عنوان استاد راهنما که با سعه صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان‌نامه شدند نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از **جناب آقای دکتر دهاقین** به عنوان استاد مشاور که با نظرات و رهنمودهای ارزشمند خود مرا یاری نمودن بسیار سپاسگزارم.

از **جناب آقای دکتر قاسمی** و **جناب آقای دکتر منصوری** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، تشکر می‌کنم.

و در نهایت از همه‌ی دوستان خوبم، برای همه‌ی همراهی‌ها و به خاطر تمام لحظات شیرین و به یادماندنی که در کنارشان تجربه کردم، سپاسگزارم.

چکیده

فرض کنید X یک مجموعه، $Y \subseteq X$ و $f : Y \longrightarrow X$ باشد. هدف نظریه‌ی نقطه ثابت تعیین شرایطی روی X و یا تابع f است، به‌طوری‌که وجود یک نقطه ثابت برای f تضمین شود.
بررسی وجود نقطه ثابت در بسیاری از مسائل کاربردی مانند قضایای وجودی در معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، نظریه کنترل، نابرابری‌های مینی ماکس، نابرابری‌های تغییراتی و $\cdots$ دارای کاربردهای اساسی می‌باشد.
هدف اصلی ما بیان قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک جزئاً مرتب می‌باشد. سپس کاربرد این قضایا را در نظریه معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، مسأله مقدار مرزی متناوب با تأخیر و معادلات غیر خطی بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی

فضای متریک مرتب، فضای باناخ مرتب، نقطه ثابت، نقطه ثابت دوتایی، نگاشت انقباضی تعمیم یافته، معادله دیفرانسیل، معادله انتگرال، مسأله مقدار مرزی متناوب با تأخیر، روش نیوتن.

فهرست مندرجات

۱ مقدمات ۱

۱.۱ تعاریف مقدماتی ۱

۲.۱ مقدمه‌ای بر نقاط ثابت ۹

۲ قضایای نقطه ثابت و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات انتگرال ۱۲

۱.۲ قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک جزئاً مرتب ۱۲

۲.۲ کاربرد قضایای نقطه ثابت در معادلات دیفرانسیل معمولی ۳۲

۳.۲ کاربرد قضایای نقطه ثابت در معادلات انتگرال ۳۸

۳ قضایای نقطه ثابت دوتایی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل معمولی ۴۲

۱.۳ قضایای نقطه ثابت دوتایی در فضاهای متریک جزئاً مرتب ۴۲

۲.۳ کاربرد قضایای نقطه ثابت دوتایی در مسأله مقدار مرزی متناوب ۶۰

۴ قضایای نقطه ثابت و کاربرد آن در مسألهی مقدار مرزی متناوب با تأخیر و ODE ها ۶۸

۱.۴ قضایای نقطه ثابت با PPF وابسته ۶۸

۲.۴ کاربرد قضایای نقطه ثابت در مسأله مقدار مرزی متناوب با تأخیر ۷۳

۳.۴ قضایای نقطه ثابت دوتایی برای عملگرهای یکنوای آمیخته با PPF وابسته . ۷۸

۴.۴ کاربرد قضایای نقطه ثابت دوتایی در مسأله مقدار مرزی متناوب با تأخیر . . . ۸۲

۵.۴ قضایای نقطه ثابت در فضای باناخ مرتب ۸۴

۶.۴ کاربرد قضایای نقطه ثابت در مسأله مقدار اولیه ODE ۹۲

۵ تعمیمی دیگر از اصل انقباضی باناخ و کاربرد آن در حل معادلات غیر خطی ۹۷

۱.۵ مقدمه ۹۷

۲.۵ توابع پیمانه‌ای ۹۸

۳.۵ نقاط آغازین ۱۰۱

۴.۵ قضایای همگرایی ۱۰۴

۵.۵ تکرارهای نیوتن ۱۰۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۱۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۱۷

منابع ۱۲۰

فهرست نمادها

مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه اعداد حقیقی مثبت	$\mathbb{R}^+$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
بینهایت	∞
تهی	$\emptyset$
به‌ازای هر	$\forall$
وجود دارد	$\exists$
متعلق است به	$\in$
اشتراک	$\bigcap$
اجتماع	$\bigcup$
مجموع	$\sum$
حاصل‌ضرب	$\prod$
انتگرال	$\int$
ماکزیمم	$\max$
مینیمم	$\min$
سوپریمم	$\sup$
حد	$\lim$
حد بالایی	$\limsup$

رابطه ترتیبی	$\leq$
رابطه شمول	$\subseteq$
نرم	$\|\cdot\|$
فاصله در X	d_X
فاصله در Y	d_Y

پیشگفتار

در این پایان‌نامه به مطالعه قضایای نقطه ثابت و کاربرد این قضایا در معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، مسأله مقدار مرزی متناوب با تأخیر و حل معادلات غیر خطی به روش نیوتن [۱] می‌پردازیم.
این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده است. فصل اول، پیش‌نیاز فصل‌های دیگر است و در آن به بیان تعاریف مقدماتی پرداخته‌ایم. در فصل دوم با بیان قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متریک جزئاً مرتب، کاربرد این قضایا را در معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی متناوب و معادلات انتگرال بیان می‌کنیم. در فصل سوم نیز به بررسی قضایای نقطه ثابت دوتایی می‌پردازیم و سپس کاربرد این قضایا را در معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی بیان می‌کنیم. در فصل چهارم به قضایای نقطه ثابت در فضاهای باناخ [۲] مرتب و قضایای نقطه ثابت با PPF وابسته پرداخته و کاربرد آن قضایا را در معادلات دیفرانسیل غیر خطی و مسأله مقدار مرزی متناوب با تأخیر مطرح خواهیم کرد. در فصل پنجم با بیان قضایای مهم همگرایی، کاربرد این قضایا را در حل معادلات غیر خطی به روش نیوتن ارائه می‌دهیم.

---

[۱] Newton
[۲] Banach

فصل ۱

مقدمات

در این فصل به یادآوری تعاریف و قضایای مقدماتی که پیش‌نیازی برای فصل‌های بعدی است، می‌پردازیم. مطالب این فصل از مراجع [۲, ۴, ۷, ۹, ۱۰, ۱۳, ۱۵, ۲۲] گردآوری شده است.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ یک مجموعه غیر تهی A همراه با یک رابطه R روی A که انعکاسی، تعدی و پادتقارنی باشد را مجموعه جزئاً مرتب گوییم.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $(X, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب و $f : X \longrightarrow X$ یک تابع باشد.

(i) f را صعودی گوییم، اگر

$$\forall x, y \in X,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

(ii) f را نزولی گوییم، اگر

$$\forall x, y \in X,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه‌ی X را یک فضای متریک گوییم، هرگاه به هر دو نقطه p و q از X عدد حقیقی $d(p, q)$، به نام فاصله از p تا q، مربوط شده باشد به‌طوری‌که

(a) $d(p, q) > 0$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p, p) = 0$.

(b) $d(p, q) = d(q, p)$.

(c) به ازای هر $r \in X$، $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

تعریف ۴.۱.۱ یک فضای متریک که در آن هر دنباله کوشی همگرا باشد را فضای متریک کامل گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهایی متریک باشند، نگاشت $f : E \subset X \longrightarrow Y$ و $p \in E$ را در نظر بگیرید. f را در p پیوسته گوییم، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای باشد به‌قسمی‌که به ازای تمام نقاط $x \in E$ که $d_X(x, p) < \delta$ داشته باشیم

$$d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$$

علامت‌های d_X و d_Y به‌ترتیب اشاره به فاصله‌ها در X و Y دارند.

تعریف ۶.۱.۱ دنباله $\{p_n\}$ در فضای متریک X را همگرا گوییم، هرگاه $p \in X$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:
به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی چون N باشد به‌طوری‌که $n \geq N$ نامساوی $d(p_n, p) < \epsilon$ را ایجاب کند.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $\mathbf{K}$ نمایانگر یکی از میدان‌های $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد و X یک فضای برداری روی $\mathbf{K}$ باشد. یک نرم روی X تابعی است مانند $\|\cdot\|: X \longrightarrow [0, \infty)$، به‌طوری‌که

(۱) $\| x \| \geq 0, \ \forall x \in X \quad , \quad \| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

(۲) $\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|, \ \forall x \in X, \alpha \in K.$

(۳) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \ \forall x, y \in X.$

دوتایی $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای برداری نرم‌دار گوییم.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد، $A \subset X$ را نرم-کراندار گوییم، هرگاه

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in A, \quad \| x \| \leq M.$$

تعریف ۹.۱.۱ یک فضای نرم‌دار که نسبت به متر $d(x, y) = \| x - y \|$ کامل باشد را یک فضای باناخ گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. فضای همه نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y را با $L(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه سری هندسی) [۲] فرض کنید X یک فضای باناخ و $L \in L(X)$. اگر $\| L \| \leq ۱$ باشد، آنگاه $(I-L)^{-۱}$ یک عملگر خطی کراندار است به‌طوری‌که

$$(I-L)^{-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} L^n,$$
$$\| (I-L)^{-۱} \| \leq \frac{۱}{۱-\| L \|}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید $(X, \| \cdot \|)$ یک فضای باناخ، $J=[a,b]$ و $a<b$ باشد. نگاشت $u: J \longrightarrow X$ را مطلقاً پیوسته گوییم، هرگاه برای $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ چنان موجود باشد که برای هر دنباله‌ی متناهی $[a_j, b_j]$، $j = ۱, \cdots, n$ از زیر بازه‌های مجزای J با $\sum_{j=۱}^{n}(b_j - a_j) < \delta$ داشته باشیم

$$\sum_{j=۱}^{n} \| u(b_j) - u(a_j) \| < \epsilon.$$

لم ۱.۱.۱ [۹] اگر $u: J \longrightarrow \mathbb{R}$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه آن تقریباً همه جا مشتق‌پذیر است، u' لبگ انتگرال‌پذیر است و

$$u(t) = u(t_۰) + \int_{t_۰}^{t} u'(s)ds \quad \forall t_۰, t \in J.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید X و Y فضای نرم دار باشند. عملگر خطی $F: X \longrightarrow Y$ را فشرده گوییم، هرگاه برای هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\} \subset X$، دنباله $\{Fx_n\}$ دارای یک زیر دنباله‌ی همگرا باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید (Ω, Σ, μ) یک فضای اندازه متناهی و X یک فضای باناخ باشد. یک تابع $f: \Omega \longrightarrow X$ را ساده گوییم، هرگاه $x_۱, x_۲, \cdots, x_n \in X$ و $E_۱, E_۲, \cdots, E_n \in \Sigma$ موجود باشند به‌طوری‌که $f = \sum_{i=۱}^{n} x_i \chi_{E_i}$ که در آن

$$\chi_{E_i}(w) = \begin{cases} ۱ & w \in E_i \\ ۰ & w \notin E_i. \end{cases}$$

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید (Ω, Σ, μ) یک فضای اندازه متناهی و X یک فضای باناخ باشد. یک تابع $f : \Omega \longrightarrow X$ را μ−اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه یک دنباله از توابع ساده (f_n) موجود باشد به‌طوری‌که $\lim_{n \longrightarrow \infty} \| f_n - f \| = 0$ μ− تقریباً همه جا.

تعریف ۱۵.۱.۱ یک تابع μ−اندازه‌پذیر $f : \Omega \longrightarrow X$ را انتگرال‌پذیر بُخنر[1] گوییم، هرگاه یک دنباله از توابع ساده (f_n) موجود باشد به‌طوری‌که

$$\lim_n \int_\Omega \| f_n - f \| d\mu = 0$$

در این صورت برای هر $E \in \sum$، $\int_E f d\mu$ چنین تعریف می‌شود

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

نتیجه ۱.۱.۱ [۹] فرض کنید X یک فضای باناخ مرتب و $x, y : \Omega \longrightarrow X$، μ−انتگرال‌پذیر باشند و برای $t \in \Omega$، $x(t) \leq y(t)$، آنگاه برای $E \in \Sigma$

$$\int_E x d\mu \leq \int_E y d\mu.$$

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید X فضای متریک باشد. $E \subset X$ را بسته گوییم، هرگاه $x_n \in E$ و $x_n \longrightarrow x$ ایجاب کند که $x \in E$.

تعریف ۱۷.۱.۱ منظور از یک پوشش باز مجموعه E در فضای متری X یعنی گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.
زیر مجموعه‌ی K از فضای متری X را فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوشش متناهی باشد. یعنی هرگاه $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی از K باشد، چند اندیس مانند $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ وجود دارد، به‌طوری‌که

[1] Bochner

$$K \subset G_{\alpha_1} \bigcup \cdots \bigcup G_{\alpha_n}.$$

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه اشتراک کانتور[۲]) [۲۲] هرگاه X_n دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته و ناتهی در فضای متریک کامل X باشد، به‌طوری‌که $X_{n+1} \subset X_n$ و $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} diam X_n = 0$ آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ ناتهی و تک نقطه‌ای است.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. عملگر $F : X \longrightarrow Y$ در نقطه x_0 مشتق‌پذیر فرشه[۳]است اگر و تنها اگر $A \in L(X, Y)$ باشد، به‌طوری‌که

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|F(x_0+h)-F(x_0)-Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

که در این صورت نگاشت A را مشتق فرشه F در نقطه x_0 گوییم.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. عملگر $F : X \longrightarrow Y$ در نقطه x_0 مشتق‌پذیر گتو[۴] است اگر و تنها اگر $A \in L(X, Y)$ باشد، به‌طوری‌که

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} = Ah, \quad \forall h \in X.$$

که در این صورت نگاشت A را مشتق گتو F در نقطه x_0 گوییم.

قضیه ۳.۱.۱ [۲] اگر F در x_0 مشتق‌پذیر فرشه باشد، آنگاه مشتق‌پذیر گتو نیز می‌باشد. برعکس اگر F در x_0 مشتق‌پذیر گتو باشد، همچنین مشتق گتو در x_0 پیوسته باشد، آنگاه مشتق‌پذیر فرشه نیز می‌باشد.

[۲] Cantor
[۳] Férchet
[۴] Gâteaux

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و P مجموعه بسته، محدب و ناتهی از X باشد. P را مخروط گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(i) اگر $x \in P$ و $\lambda \geq 0$، آنگاه $\lambda x \in P$.

(ii) اگر $x \in P$ و $-x \in P$، آنگاه $x = \theta$ که در آن θ عضو صفر در X است.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنید P یک مخروط و $v_0, w_0 \in P$ باشد. بازه $[v_0, w_0]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[v_0, w_0] = \{x \in P \mid v_0 \leq x \leq w_0\}.$$

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنید P مخروطی در فضای باناخ X باشد. نگاشت $A : P \longrightarrow P$ را ترتیب-کراندار گوییم، هرگاه به ازای هر $u \in P$، $v_0, w_0 \in P$ ای موجود باشند به‌طوری‌که

$$v_0 \leq A(u) \leq w_0.$$

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید P مخروطی در فضای باناخ X باشد. اگر هر دنباله صعودی که دارای یک کران بالا در ترتیب باشد، یعنی اگر دنباله $\{x_n\} \subset X$ و $y \in X$ در شرط زیر صدق کند:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y.$$

آنگاه وجود دارد $x \in X$ به‌طوری‌که $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow \infty$. در این صورت P را منظم گوییم.

گزاره ۱.۱.۱ [۹] اگر X فضای نرم‌دار مرتب با ترتیب مخروط منظم باشد، آنگاه هر زنجیر کراندار مرتب C از X که شامل دنباله صعودی (یا نزولی) است، همگرا به $\sup C$ (یا $\inf C$) می‌باشد.

لم ۲.۱.۱ [۹] فرض کنید X فضای نرم‌دار مرتب باشد.

(a) $x \leq y$ اگر و تنها اگر $-y \leq -x$.

(b) اگر $x \leq y$، آنگاه برای هر $z \in X$، $x + z \leq y + z$.

(c) اگر $x \leq y$ و $c \geq 0$، آنگاه $cx \leq cy$ و $-cy \leq -cx$.

(d) اگر $A \subseteq X$ و $\sup A$ موجود باشد، آنگاه برای $c \geq 0$، $\sup(cA) = c\sup(A)$.

(e) اگر $A \subseteq X$ و $\sup A$ موجود باشد، آنگاه برای هر $z \in X$، $\sup(z + A) = z + \sup A$.

(f) اگر $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ در X و برای n به اندازه کافی بزرگ $x_n \leq y_n$ باشد، آنگاه $x \leq y$.

تعریف ۲۴.۱.۱ یک مخروط $P \subset X$ را نرمال گوییم، هرگاه $N > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$0 \leq x \leq y \Longrightarrow \| x \| \leq N \| y \|, \quad \forall x, y \in P.$$

قضیه ۴.۱.۱ [۷] فرض کنید P مخروطی در فضای باناخ X باشد. اگر P منظم باشد، آنگاه P نرمال نیز است.

قضیه ۵.۱.۱ [۷] اگر P یک مخروط در فضای باناخ X باشد، آنگاه شرایط زیر هم‌ارز هستند:

(۱) P نرمال است.

(۲) یک نرم $\| \cdot \|_1$ روی X وجود دارد به‌طوری‌که

$$\theta \leq x \leq y \Longrightarrow \| x \|_1 \leq \| y \|_1$$

یعنی نرم $\| \cdot \|_1$ یکنوا است.

(۳) $x_n \leq z_n \leq y_n$ و برای $n = 1, 2, \cdots$، $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ و $\| y_n - y \| \longrightarrow 0$، آنگاه $\| z_n - z \| \longrightarrow 0$.

(۴) هر بازه ترتیبی $\{x, y\} = \{z \in X, x \leq z \leq y\}$ کراندار است.