دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

جستاری بر هم متناهی بودن کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده آل‌های با بعد کوچک

از:

طاهره عدیلی

استاد راهنما:

دکتر احمد عباسی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

جستاری بر هم متناهی بودن کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده آل‌های با بعد کوچک

از:

طاهره عدیلی

استاد راهنما:

دکتر احمد عباسی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به **خاطره ی مادرم**

که شوق آموختن را در وجودم زنده نگاه داشته است.

تقدیم به او

که هر آنچه از آن من است، از صبر و فداکاری بی دریغ اوست.

...و امروز، آرزوهایش تنها بهانه ی زیستنم است.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس مخصوص پروردگار یکتاست که همواره مرا مورد لطف و عنایت بی پایان خویش قرار داده است. گرچه هیچگاه، آنطور که شایسته است، شکرگزار این الطاف زیبا نبوده ام.

بعد از سپاس ایزد منان، بر خود لازم می دانم که از استاد ارجمند و گرانقدرم، جناب آقای دکتر احمد عباسی، ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی، برای تمام زحمات و کمک هایشان در مسیر آموختن علم، صمیمانه تشکر و سپاسگزاری نمایم. بدون شک، راهنمایی های ایشان، بزرگترین راهگشا در مسیر پرفراز و نشیب تدوین این رساله بوده است.

همچنین از اساتید محترم، جناب آقای دکتر حبیب اله انصاری و جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی که زحمت داوری این رساله را پذیرفتند و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر فرهاد درستکار، قدردان و سپاسگزارم. آموختن در محضر این اساتید دانا و فرهیخته همواره مایه افتخار بنده خواهد بود.

از کلیه دوستان و دانشجویان رشته جبر دانشکده علوم ریاضی، به ویژه خانم هاجر روشن، دانشجوی مقطع دکتری، که در تکمیل این رساله همراهی ام نمودند، نیز کمال تشکر و سپاس را دارم.

به علاوه بر خود واجب می دانم که بدین وسیله از پدر مهربانم که همواره بزرگترین حامی من در زندگی بوده و خواهر و برادر عزیزم که همراهان رنج ها و شادی هایم بوده اند، سپاسگزاری نمایم.

آرزوی من برای تمام عزیزانی که راهنمایی ام کرده اند، یاری ام نمودند، امیدم بخشیدند، همراهم شدند و لحظه لحظه زندگی و تحصیلم را خاطره ساختند، سلامتی، شادی و عزّت روزافزون است.

فهرست مطالب

چکیده:

عنوان: جستاری بر هم متناهی بودن کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده آل های با بعد کوچک

طاهره عدیلی

فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر نوتری، M یک R- مدول با تولید متناهی و I یک ایده آل از R باشند. فرض کنید t یک عدد صحیح و ناصفر باشد به طوریکه به ازای هر $i < t$، $dimSupp_R H_I^i(M) \leq ۱$.

در این رساله نشان داده شده است که R- مدول های $H_I^۰(M)$، $H_I^۱(M)$، $\cdots$، $H_I^{t-۱}(M)$، I- هم متناهی می باشند و R- مدول $Hom_R\left(R/I , H_I^t(M)\right)$ ، با تولید متناهی است. این مطلب بلافاصله ایجاب می کند که اگر I از بعد ۱ باشد (یعنی، $dim\, R/I = ۱$)، آنگاه به ازای هر $i \geq ۰$، $H_I^i(M)$، I- هم متناهی است. این مطلب تعمیم نتایج اصلی دلفینو و مارلی و یوشیدا برای یک حلقه نوتری دلخواه است. به علاوه، ما اثبات می کنیم که اگر R موضعی باشد و به ازای هر $i < t$، داشته باشیم، $dimSupp_R H_I^i(M) \leq ۲$ ، آنگاه به ازای هر $i < t$ و $j \geq ۰$ ، R- مدول های $Ext_R^j\left(R/I , H_I^i(M)\right)$ و $Hom_R\left(R/I , H_I^t(M)\right)$ لسکرین ضعیف اند. به عنوان یک نتیجه این مطلب بیان می شود که اگر $dim\, R/I \leq ۲$ ، آنگاه به ازای هر $i \geq ۰$ ، مجموعه ایده آل های اول وابسته به $H_I^i(M)$، متناهی است.

واژه های کلیدی: حلقه های تعویض پذیر نوتری، کوهمولوژی موضعی، هم متناهی بودن، ایده آل های با بعد کوچک

Abstract:

Title: On the cofiniteness of local cohomology modules for ideals of small dimension

Tahere Adili

Let R be a commutative Noetherian ring and let M be a non-zero finitely generated R-module. Let I be an ideal of R. Let t be a non-negative integer such that $dimSupp_R H_I^i(M) \leq 1$ for all $i < t$.

It is shown that the R-modules $H_I^0(M), H_I^1(M), \cdots, H_I^{t-1}(M)$ are I-cofinite and the R-module $Hom_R\big(R/I\,, H_I^t(M)\big)$ is finitely generated. This immediately implies that if I has dimension one (i.e., $dim\, R/I = 1$), then $H_I^i(M)$ is I-cofinite for all $i \geq 0$. This is a gereralization of main results of Delfino and Marley and Yoshida for an arbitrary Noetherian ring R. Also, we prove that if R is local and $dimSupp_R H_I^i(M) \leq 2$ and $Hom_R\big(R/I\,, H_I^t(M)\big)$ are weakly Laskarian for all $i < t$ and all $j \geq 0$. As a consequence, it follows that the set of associated primes of $H_I^i(M)$ is finite for $i \geq 0$, whenever $dim\, R/I \leq 2$.

Keywords: commutative noetherian rings, local cohomology, cofinitness, ideals of small dimension

مقدمه

یکی از مسائل تحقیقاتی روز ریاضیدانان جبر جابجایی، جبر همولوژی و هندسه جبری مطالعه خواص کوهمولوژی موضعی است. در این رساله خاصیت هم متناهی بودن کوهمولوژی موضعی مورد بررسی قرار می گیرد.

در راستای مطالعه خواص کوهمولوژی موضعی، ابتدا گروتندیک[۱]([۱۷]) این حدس را ارائه کرد که برای هر ایده آل I از R و هر R– مدول با تولید متناهی M ، R– مدول $Hom_R(R/I, H_I^i(M))$ با تولید متناهی است. اما طولی نکشید که هارتشورن[۲]([۱۸]) مثال نقضی برای حدس گروتندیک و همچنین تعریفی برای مدول های هم متناهی ارائه نمود. به علاوه او پرسش زیر را مطرح نمود:

حلقه R و ایده آل I از R، چه ویژگی هایی داشته باشند تا به ازای هر i و هر R– مدول با تولید متناهی M، R– مدولهای $H_I^i(M)$ ، I– هم متناهی باشند؟

در رابطه با این پرسش، هارتشورن ([۱۸]) و بعد از آن کریاسسکو[۳] ([۹]) نشان دادند که اگر R یک حلقه منظم کامل باشد و I یک ایده آل اول باشد به طوری که $dim\, R/I = ۱$ ، آنگاه به ازای هر R– مدول با تولید متناهی M ، R– مدول های $H_I^i(M)$ ، I– هم متناهی اند. همچنین، هونیکه[۴] و که[۵] ([۱۹]) اثبات کردند که اگر R یک دامنه موضعی گرنشتاین کامل باشد و I یک ایده آل از R باشد به طوریکه $dim\, R/I = ۱$، آنگاه به ازای هر i و j و هر R– مدول با تولید متناهی M و N که $Supp_R M \subseteq V(I)$، $Ext_R^j(N, H_I^i(M))$ با تولید متناهی است. به علاوه، دلفینو[۶] ([۱۰]) اثبات کرد که اگر R یک دامنه موضعی کامل تحت شرایطی خاص باشد، آنگاه نتایج مشابه برقرار است.

سرانجام دلفینو و مارلی[۷] ([۱۱]) و یوشیدا[۸] ([۳۹]) فرضیه کامل بودن را حذف کردند. در حقیقت، با استفاده از استدلال دنباله های طیفی و تغییر قاعده کلّی حلقه، نشان دادند که اگر M یک مدول با تولید متناهی روی یک حلقه موضعی تعویض پذیر و نوتری R و I یک ایده آل از R باشد به طوری که $dim\, R/I = ۱$، آنگاه به ازای هر i، R– مدول های کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ ، I– هم متناهی اند.

یکی از اهداف این رساله اثبات نتایجی مربوط به هم متناهی بودن مدول های کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ است که در آن I، یک ایده آل دلخواه از یک حلقه نوتری دلخواه (نه لزوما موضعی) R و M یک مدول با تولید متناهی روی R باشد. به خصوص، این موضوع بیان می شود که اگر t عددی صحیح و نامنفی باشد به طوری که به ازای هر $i < t$،

---
[۱] Grothendieck
[۲] Hartshorn
[۳] Chiriacescu
[۴] Huneke
[۵] Koh
[۶] Delfino
[۷] Marley
[۸] Yoshida

$\dim Supp_R H_I^i(M) \leq 1$ ، آنگاه R– مدول های $H_I^0(M)$،$H_I^1(M)$،...،$H_I^{t-1}(M)$ ، I– هم متناهی اند و R– مدول $Hom_R(R/I, H_I^t(M))$ با تولید متناهی است. دراثبات این مطلب نیازی به تغییر حلقه به نمونه حلقه موضعی منظم کامل نیست.

چند نتیجه از این مطلب حاصل می شود. در میان آنها، تعمیم نتایج اصلی دلفینو و مارلی([۱۱])، یوشیدا([۳۹])، کاواساکی[۹]([۲۳])، برادمن[۱۰]و لشگری[۱۱]([۷])، نهان[۱۲]([۳۴])، مارلی و واسیلیو[۱۳]([۲۸])، خشایارمنش[۱۴] و سالاریان[۱۵]([۲۴]) بیان می شود. همچنین با پیگیری این نکته از زوایای بیشتر، نتایجی در مورد مدول های هم مینی ماکس که به عنوان یک تعمیم از مدول های هم متناهی معرفی شده اند، ارائه می شود. سرانجام، یک مثال نقض ساده برای حدس گروتندیک بیان می شود.

یکی دیگر از مسائل اصلی مرتبط با کوهمولوژی موضعی یافتن این مطلب است که چه زمانی مجموعه ایده آل های اول وابسته به $H_I^i(M)$ متناهی است. این مطلب توسط هونیکه و شارپ[۱۶]([۲۰]) و لیوبزنیک[۱۷]([۲۶]) برای حلقه های موضعی منظم اثبات شده است. از طرف دیگر، از دیدگاه مثال غیر موضعی که توسط سینگ[۱۸] ([۳۷]) ارائه شد، این موضوع در حالت کلی برقرار نیست. در این رساله، متناهی بودن مجموعه ایده آل های اول وابسته مدول های کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ و خواص لسکرین ضعیف مدول های $Ext_R^j(R/I, H_I^i(M))$ (به ازای هر i و j) ، روی یک حلقه موضعی ونوتری، مورد بررسی قرار می گیرد.

---

[۱] Kawasaki
[۲] Brodmann
[۳] Lashgari
[۴] Nhan
[۵] Vassilev
[۶] Khashayarmanesh
[۷] Salarian
[۸] Sharp
[۹] Lyubeznik
[۱۰] Singh

فصل ۱

پیش نیازها

۱-۱پیش گفتار

در سراسر این رساله R همواره حلقه ای تعویض پذیر با همانی ناصفر و I ایده آلی از R است. مجموعه تمام ایده آل های اول حلقه R را با نماد $SpecR$ و مجموعه تمام ایده آل های ماکزیمال حلقه R را با نماد $MaxR$ نشان می دهیم.

تعریف۱-۱-۱: فرض کنید I ایده آلی از حلقه R باشد. پوشه(وریته) I به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(I) = \{p \in SpecR \mid I \subseteq p\}$$

تعریف۱-۱-۲: فرض کنید I ایده آلی از حلقه R باشد. دراین صورت:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \;\; s.t. \;\; x^n \in I\}$$

تعریف۱-۱-۳: فرض کنید I یک ایده آل از حلقه R باشد. ایده آل اول p از R را ایده آل اول مینیمال I نامیم هرگاه، اگر ایده آل اول دیگری مانندp' وجود داشته باشد که $I \subseteq p' \subseteq p$ ، آنگاه $p = p'$.

تعریف۱-۱-۴: فرض کنید M یک R- مدول ، $N_۱$ و $N_۲$ دو زیر مدول از M و I یک ایده آل از R باشند. دراین صورت:

۱) $(N_۱ :_R N_۲) = \{r \in R \mid \forall a \in N_۲, ra \in N_۱\}$.

۲) $Ann_R(M) = \{r \in R \mid \forall m \in M, rm = ۰\}$.

۳) $Ann_M(I) = \{m \in M \mid \forall r \in I, rm = ۰\}$.

تعریف۱-۱-۵: فرض کنید M یک R- مدول باشد. مجموعه ایده آل های اول وابسته به M و محمل M را که به ترتیب با نماد های $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$Ass_R(M) = \{p \in SpecR \mid \exists\ ۰ \neq m \in M \;\; s.t. \; Ann_R(m) = p\}$$

$$Supp_R(M) = \{p \in SpecR \mid M_p \neq ۰\}$$

لم۱-۱-۶ (ر.ک. نتیجه ۹-۳۵ از مرجع [۳۶]): فرض کنید M مدولی روی حلقه نوتری R باشد. دراین صورت، $Ass_R(M) \neq \emptyset$ اگروتنهااگر $M \neq ۰$.

نتیجه۱-۱-۷ (ر.ک. نتیجه ۳-۱ از مرجع [۲۹]): فرض کنید M مدولی روی حلقه نوتری R باشد. دراین صورت، $Ass_R(M) = \emptyset$ اگروتنهااگر $M = ۰$.

قضیه ۱-۱-۸ (ر.ک. قضیه ۳۹.۹ از مرجع [۳۶]): فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض پذیر نوتری R باشد. دراین صورت، $Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$ و هر عضو مینیمال $Supp_R(M)$ (نسبت به رابطه مشمولیت) متعلق به $Ass_R(M)$ است.

قضیه ۱-۱-۹ (ر.ک. گزاره G.۷ از مرجع [۲۹]): فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی باشد. دراین صورت، $Ass_R(M)$ مجموعه ای متناهی است.

لم ۱-۱-۱۰ (ر.ک. نتیجه ۵۴.۳ از مرجع [۳۶]): فرض کنید I یک ایده آل سره از R و $Min(I)$، نشان دهنده مجموعه ایده آل های اول مینیمال I باشد. دراین صورت، $\sqrt{I} = \bigcap_{p\in Min(I)} p$.

قضیه ۱-۱-۱۱ (ر.ک. قضیه ۲۴.۴ از مرجع [۳۶]): فرض کنید I ایده آل تجزیه پذیری از حلقه تعویض پذیر R باشد و $p \in Spec(R)$. دراین صورت، p ایده آل اول مینیمال I است اگروتنهااگر p عضو مینیمالی از مجموعه $ass_R I$ باشد.

لم ۱-۱-۱۲ (ر.ک. تذکر ۳۳.۹ از مرجع [۳۶]): فرض کنید M مدولی روی حلقه ی تعویض پذیر R باشد. فرض کنید I یک ایده آل سره از R باشد. دراین صورت $p \in ass_R I$ اگروتنهااگر $p \in Ass_R(R/I)$.

لم ۱-۱-۱۳ (ر.ک. تمرین ۴۳.۹ از مرجع [۳۶]): فرض کنید M یک مدول آرتینی روی حلقه تعویض پذیر R باشد. دراین صورت، هر عضو $Ass_R(M)$، یک ایده آل ماکزیمال R است.

قضیه ۱-۱-۱۴: فرض کنید M، R- مدولی با تولید متناهی باشد. در این صورت:

$$Supp_R(M) = \{p \in SpecR|\ p \supseteq Ann_R(M)\}$$

اثبات: فرض کنیم $p \in Supp_R(M)$. بنابراین طبق تعریف خواهیم داشت: $M_p \neq ۰$. اگر $p \not\supseteq Ann_R(M)$ ،آنگاه داریم، $Ann_R(M) \cap (R-p) \neq \emptyset$. دراین صورت، $s \in Ann_R(M) \cap (R-p)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $m \in M$، $sm = ۰$. در نتیجه، در M_p، خواهیم داشت، $(m/۱) = ۰$. دراین صورت $M_p = ۰$ ، که یک تناقض است. لذا:

$$Supp_R(M) \subseteq \{p \in SpecR|\ p \supseteq Ann_R(M)\}$$

اکنون، فرض کنیم $M = \left(m_۱, m_۲, \cdots, m_n\right)$. فرض کنیم $p \in SpecR$ و $p \supseteq Ann_R(M)$ باشد. دراین صورت خواهیم داشت، $M_p = \left(m_۱/۱, m_۲/۱, \cdots, m_n/۱\right)$. اگر $M_p = ۰$ ، آنگاه به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $m_i/۱ = ۰$. داین صورت به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $s_i \in R-p$ وجود خواهد داشت به طوریکه $s_i m_i = ۰$. فرض کنیم $s = s_۱ s_۲ \cdots s_n$. دراین صورت $s \in R-p$ و $sM = ۰$. بنابراین $s \in Ann_R(M)$ ،که این مطلب با

$p \supseteq Ann_R(M)$ در تناقض است. بنابراین خواهیم داشت، $Supp_R(M) \supseteq \{p \in SpecR|\ p \supseteq Ann_R(M)\}$.
درنتیجه حکم برقرار است. □

لم۱-۱-۱۵ (ر.ک. تمرین ۹-۱۱ از مرجع [۳۶]): فرض کنید $L_۱$ و $L_۲$ زیر مدول هایی از مدول M روی حلقه تعویض پذیر R، S زیر مجموعه بسته ضربی از R، I ایده آلی از R و $r \in R$ باشند. در این صورت:

۱) $S^{-۱}(IM) = S^{-۱}I\, S^{-۱}M$.

۲) $S^{-۱}(rM) = (r/۱)S^{-۱}M$.

۳) $S^{-۱}\big(L_۱ + L_۲\big) = S^{-۱}L_۱ + S^{-۱}L_۲$.

۴) $S^{-۱}\big(L_۱ \cap L_۲\big) = S^{-۱}L_۱ \cap S^{-۱}L_۲$.

۵) اگر M، R- مدولی نوتری باشد، آنگاه $S^{-۱}M$ ، $S^{-۱}R$- مدولی نوتری است.

۶) اگر M، R- مدولی آرتینی باشد، آنگاه $S^{-۱}M$ ، $S^{-۱}R$- مدولی آرتینی است.

لم۱-۱-۱۶ (ر.ک. لم ۹-۱۲ از مرجع [۳۶]): فرض کنید L و N زیرمدول هایی از مدول M روی حلقه تعویض پذیرR و S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. دراین صورت:

۱) $S^{-۱}(M/N) \cong S^{-۱}M/S^{-۱}N$.

۲) اگر N، باتولید متناهی باشد آنگاه $S^{-۱}(L :_R N) = (S^{-۱}L :_R S^{-۱}N)$.

۳) اگر M، با تولید متناهی باشد آنگاه $S^{-۱}\ Ann_R(M) = Ann_{S^{-۱}R}(S^{-۱}M)$.

قضیه۱-۱-۱۷ (ر.ک. قضیه ۹-۲۲ از مرجع [۳۶]): فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. دراین صورت:

$$Supp_{S^{-۱}R}\Big(S^{-۱}M\Big) = \Big\{S^{-۱}p \mid p \cap S = \emptyset\ , p \in Supp_R(M)\Big\}$$

قضیه۱-۱-۱۸: فرض کنید M ، R- مدولی با تولید متناهی و I ایده آلی از R باشد، در این صورت:

$$Supp_R(M/IM) = Supp_R(M) \cap Supp_R(R/I)$$

اثبات: طبق لم های ۱-۱-۱۶ و ۱-۱-۱۵، به ازای هر $p \in Spec(R)$ خواهیم داشت:

$$(M/IM)_p \cong M_p/(IR_p)M_p$$

واضح است که $(M/IM)_p =۰$ اگروتنهااگر $M_p = (IR_p)M_p$ و $IR_p = R_p$ اگروتنهااگر $I \cap (R-p) \neq \emptyset$.
همچنین $I \cap (R-p) \neq \emptyset$ اگروتنهااگر $I \not\subseteq p$. لذا طبق تساوی $M_p = (IR_p)M_p$ و لم ناکایاما، $IR_p = R_p$ یا

$M_p = \circ$. لذا $p \in Supp_R(M/IM)$ اگروتنهااگر $I \subseteq p$ و $M_p \neq \circ$ ، که با توجه به با تولید متناهی بودن M خواهیم داشت:

$$Supp_R(M/IM) = Supp_R(M) \cap \{p \in SpecR | I \subseteq p\}$$
$$= Supp_R(M) \cap \{p \in SpecR | Ann_R(R/I) \subseteq p\}$$
$$= Supp_R(M) \cap Supp_R(R/I)$$

بنابراین حکم برقرار است. □

لم ۱-۱-۱۹: فرض کنید M یک R- مدول و N یک زیر مدول از M باشد. دراین صورت:

$$Supp_R(N) \subseteq Supp_R(M).$$

اثبات: طبق فرض N زیر مدولی از M است، لذا دنباله $\circ \to N \xrightarrow{i} M$ (i رابطه شمول است) دقیق است. فرض کنیم $p \in Supp_R(N)$، دراین صورت $N_p \neq \circ$. باتوجه به دقیق بودن تابع گون S^{-1} ، دنباله ی $\circ \to N_p \xrightarrow{i_p} M_p$ دقیق است. دراین صورت $M_p \neq \circ$. □

قضیه ۱-۱-۲۰ (ر.ک. تمرین های ۹-۴۲ و ۹-۱۹ از مرجع [۳۶]): فرض کنید دنباله $\circ \to M' \to M \to M'' \to \circ$ یک دنباله دقیق از R- مدولها و R- همریختی ها باشد. دراین صورت:

۱) $Ass_R(M') \subseteq Ass_R(M) \subseteq Ass_R(M') \cup Ass_R(M'')$.

۲) $Supp_R(M) = Supp_R(M') \cup Supp_R(M'')$.

لم ۱-۱-۲۱ (ر.ک. قضیه ۲-۴-۱۶ از مرجع [۶]): فرض کنید M یک R- مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیر مدولهای M باشد. دراین صورت:

$$Supp_R(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} Supp_R(M_i)$$

قضیه ۱-۱-۲۲ (ر.ک. قضیه ۴-۱-۱۰ از مرجع [۶]): فرض کنید R یک حلقه نوتری و M و N دو R- مدول باشند به طوری که M با تولید متناهی است. دراین صورت، $Ass_R\big(Hom_R(M,N)\big) = Supp_R(M) \cap Ass_R(N)$.

گزاره ۱-۱-۲۳ (ر.ک. گزاره ۶-۵ از مرجع [۲]): اگر R حلقه ای نوتری و M، R- مدولی با تولید متناهی باشد، آنگاه M نیز نوتری است.

تعریف ۱-۱-۲۴: R- مدول M را هموار نامیم هرگاه برای هر دنباله ی دقیق از R- مدول ها و R- همریختی ها مانند:

$$\varphi:\ 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

دنباله

$$\varphi \otimes_R M:\ \cdots \to N' \otimes_R M \to N \otimes_R M \to N'' \otimes_R M \to \cdots$$

نیز دقیق باشد.

همچنین M را هموار وفادار نامیم هرگاه داشته باشیم: دنباله φ دقیق است اگروتنهااگر $\varphi \otimes_R M$ دقیق باشد.

تعریف ۱-۱-۲۵: اگر R و S دو حلقه و $f: R \to S$ یک R- همریختی باشد به طوری که S یک R- مدول هموار باشد، آنگاه f را یک همریختی هموار و S را یک R- جبر هموار نامیم.

گزاره ۱-۱-۲۶ (ر.ک. قضیه ۲-۷ از مرجع [۳۰]): فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱) M یک R- مدول هموار وفادار است.
۲) M هموار است و برای هر R- مدول N، $N \otimes_R M = 0$ نتیجه می دهد $N = 0$.
۳) M هموار است و برای هر ایده آل ماکزیمال $\mathfrak{m}$ از R، $\mathfrak{m}M \neq M$.

قضیه ۱-۱-۲۷ (ر.ک. قضیه ۳-۷ از مرجع [۳۶]): فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض پذیر R باشد. فرض کنید M توسط حاصل ضرب تعدادی متناهی از ایده آل های ماکزیمال (نه لزوماً متمایز) R پوچ شود، یعنی عددی چون $n \in \mathbb{N}$ و ایده آل های ماکزیمالی چون $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ از R وجود داشته باشند که

$$\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n M = 0$$

دراین صورت M، R- مدولی نوتری است اگروتنهااگر M، R- مدولی آرتینی باشد.

تعریف ۱-۱-۲۸: هر زنجیر اکید از زیر مدول های M چون

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

را یک سری ترکیبی M از طول n نامیم هرگاه، به ازای هر $i = 1, \cdots, n$، M_i/M_{i-1} یک R- مدول ساده باشد.

تعریف ۱-۱-۲۹: فرض کنید M مدولی روی حلقه ی R باشد. گوییم M از طول متناهی است اگر سری ترکیبی داشته باشد. در این حالت طول M را برابر طول هر سری ترکیبی M تعریف می کنیم و آن را با نماد $\ell(M)$ نشان می دهیم.

لم ۱-۱-۳۰ (ر.ک. قضیه ۷-۳۶ از مرجع [۳۶]): فرض کنید M یک R- مدول باشد. دراین صورت، M دارای طول متناهی است اگروتنهااگر M هم نوتری و هم آرتینی باشد.

قضیه ۱-۱-۳۱ (ر.ک. قضیه ۴-۲-۷ از مرجع [۶]): فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی روی حلقه نوتری R باشد. دراین صورت گزاره های زیر با یکدیگر معادلند:

۱) M ارای طول متناهی است.
۲) هر ایده آل $p \in Ass_R(M)$ یک ایده آل ماکزیمال از R است.
۳) هر ایده آل $p \in Supp_R(M)$ یک ایده آل ماکزیمال از R است.

قضیه ۱-۱-۳۲: فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر، M یک R- مدول و I ایده آلی از حلقه R باشند. دراین صورت:

$$Hom_R(R/I\,, M) \cong Ann_M(I)$$

اثبات: تعریف می کنیم

$$\varphi: Hom_R(R/I\,, M) \to \ Ann_M(I)$$

که به ازای هر $f \in Hom_R(R/I\,, M)$ ، $\varphi(f) = f(۱ + I)$. به سادگی قابل بررسی است که φ یک R- همریختی یک به یک و پوشا است. لذا، $Hom_R(R/I\,, M) \cong Ann_M(I)$. □

قضیه ۱-۱-۳۳ (ر.ک. قضیه ۵-۱۰ از مرجع [۲۱]): فرض کنید R و S دو حلقه باشند. اگر M یک R- مدول راست، N یک $(R\text{-}S)$- دو مدول و L یک S- مدول راست باشند آنگاه

$$Hom_S(M \otimes_R N, L) \cong Hom_R(M, Hom_S(N, L))\ .$$

نکته ۱-۱-۳۴: فرض کنید I و J دو ایده آل از حلقه R باشند به طوری که $I \subseteq J$ و M یک R- مدول باشد به طوری که R- مدول $Hom_R(R/I\,, M)$ باتولید متناهی باشد. در این صورت با توجه به این که نگاشت $\varphi: R/I \to R/J$ یک نگاشت برو است به سادگی نتیجه می شود که $Hom_R(R/J\,, M)$ نیز با تولید متناهی است.

تعریف ۱-۱-۳۵: مجموعه ی مرتب جزئی $(D, \leq)$ را جهت دار یا مستقیم نامیم هرگاه برای هر $i, j \in D$، $k \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $k \geq i$ و $k \geq j$.

تعریف ۱-۱-۳۶: فرض کنید $(D, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. گردایه $\{M_i\}_{i \in D}$ از R- مدول ها به همراه خانواده R- همریختی های $\left\{\varphi_j^i: M_i \to M_j\right\}_{j \geq i}$ یک دستگاه مستقیم نامیده می شود هرگاه:

۱) به ازای هر $i \in D$ ، φ_i^i نگاشت همانی روی M_i باشد.
۲) به ازای هر $i, j, k \in D$ با شرط $i \leq j \leq k$ داشته باشیم: $\varphi_k^j o\ \varphi_j^i = \varphi_k^i$.

این دستگاه با نماد $\left\{M_i, \varphi_j^i\right\}_{\substack{i,j \in D \\ i \leq j}}$ نشان داده می شود.

تعریف ۱-۱-۳۷: فرض کنید $\{M_i,\varphi_j^i\}_{\substack{i,j\in D\\ i\le j}}$ یک دستگاه مستقیم باشد. حد مستقیم این دستگاه که با نماد $\lim_{\overrightarrow{i\in D}} M_i$ نشان داده می شود عبارتست از R- مدول M به همراه خانواده R- همریختی های $\{\alpha_i : M_i \to M\}_{i\in D}$ به طوری که به ازای هر $i,j\in D$ که $i\le j$ ،داشته باشیم: $\alpha_i=\alpha_j\varphi_j^i$ و به ازای هر خانواده ی دیگری چون $\{N,\{\beta_i\}_{i\in D}\}$ که دارای خاصیت فوق باشد، R- همریختی یکتایی چون $\theta : M\to N$ موجود است به طوری که برای هر $i\in\mathbb{N}$ ، $\theta\alpha_i=\beta_i$.

تعریف ۱-۱-۳۸: فرض کنید $(D,\le)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد.گردایه $\{M_i\}_{i\in D}$ از R- مدول ها به همراه خانواده R- همریختی های $\{\Psi_i^j : M_j\to M_i\}_{j\ge i}$ یک دستگاه معکوس نامیده می شود هرگاه:

۱) به ازای هر $i\in D$، Ψ_i^i نگاشت همانی روی M_i باشد.

۲) به ازای هر $i,j,k\in D$ با شرط $i\le j\le k$ داشته باشیم: $\Psi_i^j o\Psi_j^k=\Psi_i^k$.

این دستگاه با نماد $\{M_i,\Psi_i^j\}_{\substack{i,j\in D\\ i\le j}}$ نشان داده می شود.

تعریف ۱-۱-۳۹: فرض کنید $\{M_i,\Psi_i^j\}_{\substack{i,j\in D\\ i\le j}}$ یک دستگاه معکوس روی مجموعه مرتب جزئی D باشد. حد معکوس این دستگاه که با $\lim_{\overleftarrow{i\in D}} M_i$ نمایش داده می شود عبارتست از R- مدول M به همراه خانواده ی R- همریختی های $\{\alpha_i : M\to M_i\}_{i\in D}$ به طوریکه به ازای هر $i,j\in D$ که $j\ge i$ ، داشته باشیم: $\Psi_i^j o\alpha_j=\alpha_i$ و برای هر خانواده دیگری چون $\{N,\{\beta_i\}_{i\in D}\}$ که دارای خاصیت فوق باشد، R- همریختی یکتایی چون $\theta : N\to M$ موجود است به طوری که به ازای هر $i\in\mathbb{N}$، $\alpha_i o\theta=\beta_i$.

۱-۲ بعد

تعریف ۱-۲-۱: فرض کنید p ایده آل اولی از حلقه R باشد. ارتفاع p که با نماد $ht(p)$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می گردد:

$$ht(p) := sup\{n\ge ۰ \mid \exists p_۰ \subsetneq p_۱ \subsetneq \cdots \subsetneq p_n = p \quad s.t.\ p_i\in SpecR\}$$

همچنین بعد کرول حلقه R به صورت زیر تعریف می شود:

$$dimR := sup\{htp \mid p\in SpecR\}$$

بنابراین اگر (R,m) موضعی باشد $dimR=ht(\mathrm{m})$.

تعریف ۱-۲-۲: فرض کنید I یک ایده آل دلخواه از حلقه R باشد. ارتفاع I به صورت زیر تعریف می گردد:

$$ht(I) := min\{ht(p) \mid I\subseteq p\in SpecR\}$$

تبصره۱-۲-۳ (ر.ک. تذکر ۱۸.۱۴ از مرجع [۳۶]):

۱) فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد و $p \in SpecR$ به طوریکه $p \cap S = \emptyset$. دراین صورت، $ht_{S^{-1}R}(S^{-1}p) = ht(p)$. لذا، $dimR_p = ht_{R_p}(pR_p) = ht(p)$.

۲) هر زنجیر از ایده آل های اول R/I به صورت

$$p_0/I \subset p_1/I \subset \cdots \subset p_n/I$$

است که p_i ها زنجیره ای از ایده آل های اول R به صورت زیر می دهند:

$$p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n$$

که در آن، $I \subseteq p_0$. لذا

$$dim\, R/I = sup\{n \geq 0 \mid \exists p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n \;\; s.t. \;\; I \subseteq p_0\}$$

۳) فرض کنید $p \in SpecR$، در این صورت

$$ht(p) + dim\, R/p \leq dimR$$

تعریف۱-۲-۴: فرض کنید R یک حلقه و I ایده آلی از آن باشد. دراین صورت، بعد ایده آل I که با نماد $dim\, I$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$dim\, I = dim\, R/I.$$

قضیه۱-۲-۵ (ر.ک. نتیجه ۵.۱۵ از مرجع [۳۶]): فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر و نوتری باشد. در این صورت:

۱) ارتفاع هر ایده آل اول R متناهی است. بنابراین بعد هر حلقه موضعی و نوتری متناهی است.

۲) فرض کنید $P، Q \in SpecR$ به طوریکه $P \subseteq Q$. دراین صورت، $ht(P) \leq ht(Q)$. همچنین، $ht(P) = ht(Q)$ اگروتنهااگر $P = Q$.

تذکر۱-۲-۶ (ر.ک. تذکر ۱۶.۱۵ از مرجع [۳۶]): اگر I و J ایده آل های سره از حلقه ی تعویض پذیر R باشند به طوری که $I \subseteq J$، آنگاه، $ht(I) \leq ht(J)$.

قضیه۱-۲-۷(ایده آل اصلی کرول)(ر.ک. قضیه ۲.۱۵ از مرجع [۳۶]): فرض کنید R حلقه ای نوتری باشد و $x \in R$ یکال نباشد. فرض کنید p ایده آل اول مینیمال $(x) = Rx$ باشد. دراین صورت: $ht_R(p) \leq 1$.

نتیجه۱-۲-۸: فرض کنید R یک حلقه ی نوتری و p و q دو ایده آل اول متمایز از R باشند به طوری که $p \subset q$. اگر ایده آل اولی مانند p' از R چنان موجود باشد که به طور اکید ما بین p و q قرار گیرد، آنگاه بی نهایت ایده آل اول بین p و q به طور اکید قرار می گیرند.

اثبات: اگر $p \subset p' \subset q$ آنگاه $p/p \subset p'/p \subset q/p$ ، که در آن $p/p = 0$ و p'/p و q/p ایده آلهای اول از دامنه صحیح R/p می باشند. بنابراین می توان فرض کرد $p = 0$. فرض کنیم تعداد متناهی ایده آل اول مانند

به طور اکید بین $p=0$ و q قرار بگیرند. اگر $q \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ آنگاه $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ای وجود دارد به طوری که $q \subseteq p_i$ ، در حالیکه $p \subset p_i \subset q$. بنابراین $p_i = q$ که این تساوی با انتخاب $p_1,\cdots,p_n$ در تناقض است. پس $q \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i$، بنابر این عنصری ناصفر مانند x از $q \setminus \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ وجود دارد. اگر q ایده آل اول مینیمال (x) باشد،آنگاه طبق قضیه ۱-۲-۷ (قضیه ایده آل اصلی کرول)، باید $ht_R(q) \leq 1$. در حالیکه بنابر زنجیر اکید $p \subset p' \subset q$ ، $ht_R(q) > 1$، که یک تناقض است. اما اگر q ایده آل اول مینیمال (x) نباشد، آنگاه q شامل یک ایده آل اول مینیمال از (x) مانند p'' است. از آنجایی که $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ ، با هیچ یک از $p_1,\cdots,p_n$ که تنها ایده آل های اولی بودند که به طور اکید بین p و q قرار داشتند، برابر نیست و به طور اکید بین آن دو واقع شده است. این تناقض نشان می دهد که با برقراری شرایط فرض بی نهایت ایده آل اول بین p و q به طور اکید قرار می گیرند. □

تعریف۱-۲-۹: فرض کنیم$M \neq 0$ یک R- مدول باشد. بعد کرول M که با $dim_R M$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می گردد:

$$dim_R M := sup\{n \geq 0 \mid \exists p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n \ s.t.\ p_i \in Supp_R(M)\}$$

گزاره۱-۲-۱۰(ر.ک. تمرین ۲۰-۳ از مرجع [۳۰]): فرض کنید R یک UFD و $q_1,\cdots,q_r$ ایده آلهای اولیه با ارتفاع ۱ از حلقه R باشند. دراین صورت، $q_1 \cap \cdots \cap q_r$ یک ایده آل اصلی از حلقه R است.

تعریف۱-۲-۱۱: زنجیر افزایشی $p_0 \subset p_1 \subset \cdots$ از ایده آل های اول حلقه R را یک زنجیر اشباع شده گوییم هرگاه نتوان ایده آل اول دیگری را به طور سره، بین هر دو عضو دلخواه از این زنجیر قرار داد.

تعریف۱-۲-۱۲: حلقه ی R را زنجیری گوییم هرگاه برای هر دو ایده آل اول p و p' از R که$p \subset p'$ ، زنجیر اشباع شده ای وجود داشته باشد که عضو ابتدایش p و عضو انتهایش p' باشد و طول چنین زنجیرهایی یکسان باشد.

لم۱-۲-۱۳: اگر I ایده آلی از حلقه R باشد به طوری که $dim\, R/I = n$ ، آنگاه $p \in MinAss_R(R/I)$ وجود دارد به طوری که $dim\, R/I = dim\, R/p$.

اثبات: طبق فرض $dim\, R/I = n$ است، لذا زنجیری اشباع شده به صورت $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n$ از ایده آل های اول R وجود دارد به طوری که $I \subseteq p_0$. واضح است که $p_0 \in Min(I)$. لذا طبق قضایای ۱-۱-۱۲ و ۱-۱-۱۱، نتیجه می شود که $p_0 \in MinAss_R(R/I)$ و $dim\, R/p_0 = n$. بنابراین با در نظر گرفتن $p = p_0$ حکم نتیجه می شود. □

لم۱-۲-۱۴: فرض کنید $p_1,\cdots,p_n$ ایده آل های اول از حلقه R باشند به طوری که به ازای هر i، $htp_i \geq n$. دراین صورت، $ht\left(\bigcap_{i=1}^{n} p_i\right) \geq n$.