دانشگاه علامه طباطبایی

دانشکده اقتصاد

گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی- گرایش مالی

عنوان

# برآورد ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی با روش تغییر رژیم بر اساس توزیع غیر نرمال

پژوهشگر

سولماز مهاجری

استاد راهنما

دکتر محمد جلوداری ممقانی

استاد مشاور

دکتر مصطفی دین‌محمدی

بهمن 1390

# صفحه سپاسگذاری

اگر شایسته باشد
تقدیم به
پدر و مادر عزیزم
به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه‌ی ایثار و از خودگذشتگی
به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است
به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید
به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند
و به پاس وجود نازنین‌شان.

خداوند متعال را شاکرم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا نمود و مرا از لطف بی‌نهایت خویش بهره‌مند کرد و چه دشوار است تشکر از عزیزانی که اندیشیدن و معرفت را به من آموختند.بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی، که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های پدرانه و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم.

از استاد مشاورم جناب آقای دکتر مصطفی دین محمدی که تذکراتشان باعث غنای پایان‌نامه شد، تشکر می‌نمایم.
همچنین از جناب آقای دکتر تیمور محمدی و جناب آقای دکتر عبده تبریزی که زحمت نظارت و داوری این اثر را به عهده داشتند سپاسگزارم. ازخانواده عزیزم به ویژه پدر و مادر بزرگوارم که با حمایتهای بی دریغ خود مرا در رسیدن به این هدف یاری نمودند تشکر ویژه می‌نمایم که همه داشته‌هایم را مرهون و مدیون آن دو بزرگوارم.از خواهران عزیز و مهربانم که صبورانه در این مدت همراهیم کردند کمال تشکر را دارم.
و با سپاس بی دریغ خدمت دوستان گران مایه‌ام خانم‌ها یاسمن امانی،اکرم صفرنژاد،ماریه یارعلی،سارا احمدی که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده‌اند.
و با تشکر خالصانه خدمت همه عزیزانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند.

امیدوارم بتوانم از عهده‌ی ادای حق این عزیزان برآیم.

سولماز مهاجری

بهمن1390

چـکـیـد ه

یکی از مفاهیم کلیدی در مدیریت ریسک اندازه‌گیری آن است .از جمله روش‌های اندازه‌گیری ریسک می‌توان ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی را نام برد.ارزش در معرض ریسک به عنوان یک سنجه ریسک به‌دلیل عدم تبعیت از خاصیت تحدب یا زیر جمع‌پذیری همواره مورد انتقاد محققان بوده است،اما هنوز

به عنوان سنجه ریسک قابل قبول مطرح است.در مقابل ارزش در معرض ریسک شرطی محدب است ، بنابراین اندازه ریسک بهتری نسبت به ارزش در معرض ریسک است.ارزش در معرض ریسک شرطی امروزه به طور گسترده در صنعت بیمه به کار می‌رود و در آینده نزدیک جایگزین خوبی برای ارزش در معرض ریسک می‌تواند باشد.طی سال‌های اخیر روش‌های متنوعی به منظور اندازه‌گیری روش‌های فوق ارائه گردیده است که آن‌ها را به سه دسته پارامتریک،غیرپارامتریک و شبیه‌سازی مونت کارلو تقسیم می‌کنند.

در این پایان نامه روش تغییر رژیم غیر نرمال را برای محاسبه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی یک دارایی مالی و سبد دارایی‌ها معرفی می‌کنیم. در این روش فرض می‌کنیم که بازده‌های دارایی دارای توزیع تی استودنت هستند و این ویژگی ، دم ضخیم بودن بازده‌های مالی را توجیه می‌کند،علاوه براین با استفاده از تغییر رژیم به پدیده خوشه‌بندی تلاطم دسترسی پیدا می‌کنیم.

در ادامه سبد سرمایه‌گذاری شرکت توسعه ملی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم،با توجه به این‌که بازده این سبد در دوره زمانی موردنظر دارای توزیع تی استودنت نیست، ارزش در معرض ریسک شرکت‌ها و سبد سرمایه‌گذاری را با یکی از روش‌های معرفی شده محاسبه می‌کنیم.

واژگان کلیدی. ارزش در معرض ریسک،تغییر رژیم،توزیع تی استودنت،دم ضخیم،خوشه‌بندی تلاطم.

# فصل اول- کلیات

## مقدمه

ریسک همواره یکی از دغدغه‌های مهم در زندگی روزمره انسان‌ها بوده است،هر روز با انواع مختلف ریسک‌ها رو به رو هستیم.ریسک به ویژه در اقتصاد ومسائل مالی از اهمیت بالایی برخوردار است.با توجه به اینکه این مفهوم قابل مشاهده نیست تعریف دقیقی ازآن امکانپذیر نیست.در حالت کلی ریسک به معنای عدم اطمینان از نتایج عمل و قرار گرفتن در معرض این عدم اطمینان است.

ریسک در واقع احتمال وقوع اتفاقات نامطلوب است و باید از آن پرهیز کرد،البته این اتفاق‌ها می توانند فرصتی برای دستیابی به سود باشند،در هر حال ریسک قابل کنترل و کمی سازی است،تلاش‌های گوناگونی برای رسیدن به روش‌های اندازه‌گیری ریسک انجام شده است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره خواهم کرد.

سوال اصلی: پرسشی که در این تحقیق به دنبال یافتن پاسخ آن هستیم این است که "روش تغییر رژیم با توزیع غیر نرمال در محاسبه ارزش در معرض ریسک چه مزایایی دارد؟"

## مفاهیم و واژه‌های اولیه

در این بخش برخی مفاهیم پایه‌ای به کار رفته در این پایان نامه را معرفی می‌کنیم.

### ارزش در معرض ریسک

بدترین زیان مورد انتظار یک سبد یا دارایی مالی در یک افق زمانی داده شده و در سطح اطمینان مشخص را ارزش در معرض ریسک شرطی می‌نامیم.

### ارزش در معرض ریسک شرطی

مقدار یا مبلغ زیانی است که در اوضاع نامطلوب تحمیل می‌شود.

$$\mathrm{CVaR}_c(X) = E(X \,|\, X \geq VaR_c(X))$$

ارزش در معرض ریسک در مورد زیان‌های فراتر از خودش اطلاعاتی نمی‌دهد،ارزش در معرض ریسک شرطی زیان را به شرط این‌که از VaR بیشتر شود نشان می‌دهد.

### دنباله ضخیم

توزیع احتمالی است که چولگی‌ها و کشیدگی‌های بزرگ را نمایش می‌دهد.توزیع متغیر تصادفی X دنباله ضخیم است اگر

$$p[\mathbf{x} \geq x] \sim x^{-\alpha} \quad x \to \infty \qquad \alpha \geq 0$$

### خوشه‌بندی تلاطم

با توجه به نمودار بازده روزانه،مشاهده می‌کنیم دامنه تلاطم بازده نسبت به زمان تغییر می‌کند،اگر امروز شاهد تلاطم بالایی باشیم به احتمال زیاد فردا نیز شاهد تلاطم بالایی خواهیم بود ، اگر امروز تلاطم پایینی داشته باشیم احتمال این‌که فردا نیز تلاطم پایین باشد زیاد است ،در نتیجه تلاطم‌های کوچک و تلاطم‌های بزرگ طی دوره‌های متوالی با احتمال بیشتری با هم مشاهده می‌شوند،این پدیده خوشه‌بندی تلاطم نامیده می‌شود.

### سری زمانی

دنباله $\{y_t\}=\{\ldots,y_{t-1},y_t,y_{t+1},\ldots\}$ از متغیرهای تصادفی که توسط زمان **t** اندیس‌گذاری شده است را یک سری زمانی گویند.

### مانایی

سری زمانی را مانا می‌گوییم اگر میانگین،واریانس و ضریب خودهمبستگی آن نسبت به زمان ثابت باشد.

### بازار مالی

بازار مالی مکانیزمی است که به مردم اجازه می‌دهد اوراق مالی مانند سهام و اوراق قرضه،کالاهای گران‌قیمت،محصولات کشاورزی .... را با هزینه‌های انتقال پایین و تحت شرایط بازار کارا معامله کنند.

### سبد سرمایه گذاری

سبد مجموعه‌ای از سرمایه‌گذاری‌های انجام شده توسط شرکت سرمایه گذاری،موسسات مالی یا اشخاص است.

### اوراق مشتقه

اوراق بهاداری که قیمت آن‌ها به قیمت دارایی پایه‌شان وابسته است،یعنی قیمت آن‌ها از قیمت دارایی پایه‌شان مشتق می‌شود به همین دلیل مشتقات نیز نامیده می‌شوند.

### دارایی پایه

دارایی مورد معامله در بورس که می‌تواند اوراق بهاداری مانند سهام،اوراق قرضه یا کالای خاصی باشد.

## تعریف‌های احتمال

### سیگما میدان

فضای نمونه‌ی$\Omega$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\mathcal{F}$ گردآیه‌ای غیرتهی از زیر مجموعه‌های $\Omega$ باشد، $\mathcal{F}$ را یک سیگما میدان روی $\Omega$ می‌گوییم اگر

$$1-\varnothing \in \mathcal{F}$$
$$2-A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$
$$3-A_i \in \mathcal{F}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

که در آن $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ است.

### فضای احتمال

سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک فضای احتمال می‌نامند، که در آن $\Omega$ فضای نمونه ، $\mathcal{F}$ سیگما میدانی از زیر مجموعه‌های فضای نمونه و $P$ اندازه احتمال تعریف شده روی سیگما میدان $\mathcal{F}$ است.

### توزیع نرمال

می‌گوییم متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ است اگر تابع چگالی آن به صورت $f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ باشد.

### چولگی[1] $Skew = \frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3}$

چولگی سنجه‌ای از تقارن توزیع احتمال یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار است. چولگی می‌تواند مثبت یا منفی یا صفر باشد.اگر چولگی منفی باشد آن‌گاه دم سمت چپ تابع توزیع احتمال بلندتر از

[1] Skewness

دم سمت راست است و میانه در سمت راست میانگین قرار دارد.چولگی مثبت مبین این سمت چپ است و میانه در سمت چپ میانگین قرار می‌گیرد.چولگی صفر به این معناست که توزیع حول میانگین متقارن است.

**کشیدگی**[1] $Kurtosis = \frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4}$

کشیدگی یا کورتزیس نشان‌دهنده‌ی همواری یک توزیع است، کشیدگی برابر گشتاور چهارم نرمال است به عبارت دیگر معیار مقدار کشیدگی برای توزیع نرمال برابر 3 است:

اگر کشیدگی بیشتر از 3 باشد دم ضخیم‌تری نسبت به نرمال داریم که در بازده‌های مالی محتمل است و با نام دم ضخیم شناخته می‌شود.

اگر کشیدگی کمتر از 3 داشته باشیم،دم باریک‌تری نسبت به نرمال داریم.

## توزیع تی استودنت

توزیع متقارن و زنگوله شکل مانند توزیع نرمال است اما دارای دم‌های پهن‌تری است،تابع چگالی احتمال این توزیع عبارت است از:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}.\Gamma(\frac{\nu}{2})} * (1+\frac{t^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \nu \gneqq 0 t \in (-\infty, +\infty)$$

$$E(t) = 0, \nu > 1$$

$$var(t) = \frac{\nu}{\nu-2}, \nu > 2$$

## توزیع گاما

[1] Kurtosis

اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $X$ به صورت $f(x;k,\theta)=x^{k-1}\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^{k}\Gamma(k)}\ x\geq 0,\ k,\theta \gneqq$

باشد می‌گوییم این متغیر از توزیع گاما تابعیت می‌کند. $E(X)=k\theta\ var(X)=k\theta^2$

برای هر $x\geq 0$ مقدار تابع گاما ($\Gamma$) از رابطه ی $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$

محاسبه می شود.

## توزیع بتا

توزیع بتا یک خانواده از توزیع‌های احتمال پیوسته است که روی بازه $(0,1)$ تعریف می‌شود.چگالی

این متغیر عبارت است از:

$$f(x;a,b)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du}=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

$$=\frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ a>0,b>0,x\in(0,1)$$

## تابع بتای غیر کامل

برای $a>0$ و $b>0$ تابع بتا $\beta(a,b)$ به صورت زیر تعریف می شود: $\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

رابطه ی $\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ بین توابع $\beta$ و $\Gamma$ برقرار است تابع بتای غیر کامل، تعمیم یافته تابع

بتا است و به صورت زیر تعریف می‌شود: $\beta(x,a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt\quad x\in(0,1)$

## رگرسیون

تابع رگرسیون یا تابع برگشت تابعی است که با استفاده از آن و مقادیر یک یا چند متغیر تصادفی،مقدار یک متغیر تصادفی دیگری را پیش‌بینی می‌کنیم.

**مـدل خـودرگـرسیـونـی**

یک مدل خودرگرسیونی فرآیندی تصادفی است که برای مدل‌سازی و پیشگویی انواع مختلف پدیده‌های طبیعی به کار می‌رود،این مدل از خانواده فرمول‌های پیش‌بینی خطی است که خروجی یک سیستم را بر اساس خروجی‌های دیگر پیشگویی می‌کند. نماد $AR(p)$ به این معنی است که یک مدل خودرگرسیون مرتبه $p$ به شکل زیر است: $X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \xi_t$ که در آن $\varphi_1,....,\varphi_p$ پارامترهای مدل، $c$ ثابت، $\xi_t$ نوفه سفید است.

**مـدل** $ARCH$ مدل خودرگرسیونی مشروط بر ناهمسانی واریانس[1]،در سال1982 توسط انگل[2] پیشنهاد شد،درحالت کلی مدل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$v_t \sim N(0,1) \qquad \varepsilon_t = \sigma_t v_t$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ...... + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

و در آن $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ به ازای $\forall i > 0$.

**مـدل** $GARCH$

[1] autoregressive conditional heteroskedasticity
[2] Engel

مدل خودرگرسیونی مشروط بر ناهمسانی واریانس در سال 1986 توسط بولرسلف[1] به مدل خودرگرسیونی مشروط بر ناهمسانی واریانس تعمیم یافته[2]،تعمیم یافت.مدل $GARCH(p,q)$ به صورت زیر است.

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i \sigma_{t-i}^2$$

که در آن، $\sum_{i=1}^{max(p,q)}(\alpha_i+\beta_i)<1$ ، $\beta_i > 0$ ، $\alpha_i \geq 0$ ، $\alpha_0 > 0$ ، $v_t \sim N(0,1)$ .

## ریسک متریکس

در سال1994 گروه ریسک متریکس مدلی تحت عنوان ریسک سنجی(ریسک متریکس)،ارائه کرد که در عین سادگی نتایج قابل قبولی دارد و هم اکنون نیز به عنوان شاخصی برای ارزیابی ریسک بازار پذیرفته شده است.در این مدل واریانس بازدهی نسبت به شوک‌های بازار پاسخ سریع‌تری نشان می‌دهد،زیرا به شوک‌های جدید وزن بیشتری داده می‌شود.در این مدل واریانس به شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i \varepsilon_{t-i}^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}^2 0 \leq \lambda \leq 1$$

هر چه $\lambda$ کوچکتر باشد، $1-\lambda$ بزرگ‌تر است و شوک‌های جدید اثر بیشتری بر واریانس خواهند داشت. معادله واریانس ریسک سنجی به شکل زیر است:

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t v_t \sim iidN(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \lambda\varepsilon_{t-1}^2 + (1-\lambda)\sigma_{t-1}^2$$

[1] Bollerselv

[2] generalized autoregressive conditional heteroskedasticity

در این مدل پیشنهاد می‌شود که برای داده‌های روزانه $\lambda = 0.94$ در نظر گرفته شود.

## قضیه بیز شرطی

$(\Omega, \mathcal{F}, \bar{P})$ یک فضای احتمال و $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ،یک زیر - $\sigma$ میدان را در نظر بگیریم. فرض کنید P اندازه احتمال دیگری باشد که نسبت به $\bar{P}$ پیوسته با مشتق رادون نیکودیم $\frac{dP}{d\bar{P}} = \Lambda$ ،در این‌صورت اگر $\phi$ ،متغیر تصادفی انتگرال پذیری نسبت به $p$ باشد:

$$E[\phi | \mathcal{G}] = \Psi$$

$$\Psi = \frac{\bar{E}[\Lambda\phi | \mathcal{G}]}{\bar{E}[\Lambda | \mathcal{G}]} \quad if \bar{E}[\Lambda | \phi] > 0, \quad \Psi = 0 otherwhere$$

## چگالی شرطی غیر نرمال

در تعریف توزیع احتمال شرطی یک متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته،تابع چگالی احتمال شرطی آن دارای این دو ویژگی است:نامنفی بودن و نرمال بودن که نرمال بودن به این معناست که مجموع آن در همه نقاط دامنه یا انتگرال آن روی دامنه برابر یک باشد.در حالتی که این مجموع برابر یک نباشد آن را غیرنرمال می‌نامیم.

## برآورد ماکزیمم درستنمایی

در آمار برآورد ماکزیمم درستنمایی *maximumlikelihoodestimation* روشی برای برآورد پارامترهای یک مدل آماری است.فرض کنید در یک نمونه $n$ تایی $x_1, ..., x_n$ ,مشاهده مستقل و همتوزیع باشد،با داشتن توزیع ناشناخته $f_n(.)$ ،تابع $f_n$ متعلق به یک خانواده معین از توزیع‌های

$\{f(.|\theta),\theta\in\Theta\}$ است،بنابراین، $f_n=f(.|\theta_0)$ که $\theta_0$ مقدار حقیقی نام دارد.حال می‌خواهیم برآورد کننده $\hat{\theta}$ را پیدا کنیم که بسیار نزدیک به $\theta_0$ باشد،برای استفاده از این مدل تابع چگالی:

$$f(x_1,x_2,...,x_n|\theta)=f(x_1|\theta_1).f(x_2|\theta_2)......f(x_n|\theta_n)$$

تابع ماکزیمم درستنمایی برابر:

$$L(\theta|x_1,x_2,...,x_n)=f(x_1,x_2,...,x_n|\theta)=\Pi_{i=1}^{n}f(x_i|\theta)$$

برای آسانی از تابع $log$ تابع فوق استفاده می‌کنیم

$$lnL(\theta|x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}lnf(x_i|\theta)$$

و

$$\hat{\mathcal{L}}=\frac{1}{n}lnL$$

این روش $\theta_0$ را با استفاده از پیدا کردن مقدار $\theta$ به‌طوریکه $\mathcal{L}(\theta|x)$ ماکزیمم شود،برآورد می‌کند. این روش برآورد یک روش ماکزیمم درستنمایی $MLE$ برای $\theta_0$ است.

$$\hat{\theta}_{mle}=argmax_{\theta\in\hat{\theta}}\hat{\mathcal{L}}(\theta|x_1,...,x_n)$$

## تعریف‌های فرایند تصادفی

### متغیر تصادفی

اگر $(\Omega,\mathcal{F},P)$ یک فضای احتمال باشد تابع $X:\Omega\to R$ را یک متغیر تصادفی گویند.

### فرایند تصادفی

اگر برای هر $X(t), t\geq 0$ یک متغیر تصادفی $R^d$ –مقدار روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشد، آنگاه $X$ را یک فرایند تصادفی – $R^d$ مقدار گویند.

### پالایه

فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F})$ یك فضای اندازه پذیر باشد. مجموعه ی افزایشی

$$\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\ldots\subset\mathcal{F}_n\subset\ldots\subset\mathcal{F}$$

از زیر – $\sigma$ میدان های $\mathcal{F}$ را یك پالایه روی $(\Omega,\mathcal{F})$ می نامند.

### مارتینگل

فرایند تصادفی حقیقی مقدار $X$ روی فضای احتمال پالایه شده ی $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ را یک – $\mathcal{F}_t$ مارتینگل گویند اگر :

الف: $E[|X_t|]<\infty$ ، برای هر $t\geq 0$ .

ب: $X$ متغیری – $\mathcal{F}_t$ سازوار باشد.

پ: تقریبا به طور حتم به ازای هر $E[X_t|\mathcal{F}_s]=X_s, t\geq s$

### جزء مارتینگل

فرض کنید $X$ فرایند تصادفی حقیقی مقدار باشد به صورت $X=(X_t)_{t\in R}$ برای $s\in R$ قرار دهید:

$$X_t = X_t - X_{t\wedge s} = \{ {}^{0\, t \le s}_{X_t - X_s\, t \ge s}$$

دراین‌صورت ${}^s X_t$ یک فرایند جزء مارتینگل است اگر سازوار باشد و برای هر $st$ داشته باشیم

$E[{}^s X_t | \mathcal{F}_s]=0$ و ${}^s X_t$ یک فرایند سازوار باشد.

## دنباله سازوار

دنباله ی $(X_n)_{n\in N}$ را سازوار با پالایه ی $(\mathcal{F}_n)_{n\in N}$ ، یا $\mathcal{F}_n$ -سازوار می نامند اگر برای هر

$n\ge 0$ ،متغیر $X_n$ ، - $\mathcal{F}_n$ اندازه پذیر باشد.

## مشتق رادون نیکودیم

اگر $\mu,\nu$ اندازه‌های $\sigma$ متناهی روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega,\mathcal{F})$ باشند،به قسمی‌که $\nu\le\mu$ آنگاه تابع

اندازه‌پذیر $h=\dfrac{d\nu}{d\mu}:(\Omega,\mathcal{F})\to([0,\infty],B([0,\infty]))$

موسوم به مشتق رادون نیکودیم $\nu$ نسبت به $\mu$ وجود داردکه در آن رابطه زیر یعنی:

$\nu(A)=\int_A h d\mu, A\in\mathcal{F}$ برقرار است.

## قضیه گیرسانوف

قضیه گیرسانوف را می‌توان برای تعریف یک اندازه جدید $Q$ به کار برد به‌طوریکه نسبت به اندازه اصلی $P$ مطلقا پیوسته است. فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0},P)$ یک فضای احتمال پالایش شده و $B$ یک حرکت براونی روی این فضا است.به‌علاوه فرض کنید $X$ یک فرایند انتشار $R^d$ -مقدار باشد

که به صورت

$$X(t) = x + \int_t^0 a(X(s),s)ds + \int_t^0 b(X(s),s)B(s) \qquad (1)$$

تعریف شده است که در آن $X(0) = x$ شرط اولیه را نشان می‌دهد و ضرایب معادله طوری هستند که جواب معادله موجود و یکتا است. برای بیان قضیه گیرسانوف به چند تعریف نیاز داریم:فرض کنید

$$g(x,t) = a(x,t) + b(x,t)\gamma(x,t)$$

که در آن $\gamma(X(t),t) \in R^{d'}$ تابعی اندازه پذیر و کراندار است.فرایند تصادفی $R^d$ مقدار $Z$ را به صورت

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t g(Z(s),s)ds + \int_0^t b(Z(s),s)d\bar{B}(s), \quad t \in [0,\tau] \qquad (2)$$

تعریف می‌کنیم که مانند $X$ از نقطه $Z(0) = X(0) = x$ شروع می‌شود که در آن $\tau > 0$ و

$$\bar{B}(t) = B(t) - \int_0^t \gamma(X(s),s)ds$$

هم‌چنین اندازه احتمال جدید $Q$ را به صورت

$$(\frac{dQ}{dP})(t) = exp[\int_0^t \gamma(X(s),s)^T dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{r=1}^{d'} \gamma_r(X(s),s)^2 ds]$$

تعریف می‌کنیم که در آن. $t \in [0,\tau]$ قضیه گیرسانوف ویژگی‌های زیر را به دست می‌دهد.

1- فرآیند $\bar{B}$ یک حرکت براونی تحت $Q$ است.

2- جواب $X$ برای معادله (1) تحت $P$ در رابطه (2) تحت $Q$ نیز صدق می‌کند.

## حالت فضا

مدل‌های حالت-فضا در اقتصادسنجی برای مدل‌سازی متغیرهای مشاهده نشده مورد استفاده قرارمی‌گیرند،متغیرهایی مانند خطاهای اندازه‌گیری،مشاهدات گم شده،اجزای غیرقابل مشاهده مانند سیکل‌ها و دورها.دو مزیت عمده برای نشان دادن مدل‌های دینامیک به صورت مدل‌های حالت فضا وجود دارد.اول،این نوع مدل‌ها این امکان را به وجود می‌آورند که متغیرهای مشاهده نشده هم در تخمین مدل مورد استفاده قرار گیرند و بتوان آن‌ها را در مدل تخمین زد.دوم،می‌توان این مدل‌ها را به وسیله الگوریتم‌های بازگشتی قوی مورد تحلیل قرارداد.

## فرآیند نوفه سفید

بردار تصادفی $w$ را نوفه سفید می‌نامیم اگر بردار میانگین و ماتریس خود همبستگی آن به ترتیب صفر و مضرب مثبتی از ماتریس همانی باشد.

$$\mu_w = E(w) = 0$$
$$R_{ww} = E(ww^T) = \sigma^2 I$$

## بیان مسئله

موسسات مالی در ساختار اقتصادی جوامع از اهمیت بالایی برخوردار هستند،یکی از ابزارهای فعالیت این موسسات اوراق بهادار است،تعدادزیادی از این اوراق در معرض انواع ریسک‌ها قرار دارد،بنابراین تقریبا تمام بنگاه‌های مالی به نوعی با ریسک مواجه هستند،از این رو یکی از فعالیت‌های

مهم بنگاه‌های مالی و پولی از جمله بانک‌ها مدیریت ریسک است و برای این کار باید تعریف قابل قبولی از ریسک داشته و منابع مهم آن را شناسایی کنند .

مدیریت ریسک که توسط بخش ریسک بنگاه انجام می‌گیرد،فعالیتی شامل مطالعه،اندازه‌گیری، تصمیم‌گیری و نظارت برانواع ریسک‌های مطرح برای بنگاه است.یکی از مسائل مهم در مدیریت ریسک اندازه‌گیری ریسک است.کمی کردن ریسک از چالش‌های بسیار قدیمی است که ذهن ریاضیدانان،مدیران و سیاستمداران را به خود مشغول کرده‌است.

برای این کار در دو دهه اخیر ابزارهای مختلفی در حیطه آمار،ریاضیات به وجود آمده اند که یکی از این روش‌ها ارزیابی ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی است.

مفهوم ارزش در معرض ریسک[1] را نخستین بار موسسات مالی بزرگ در اواخر دهه1980 برای اندازه‌گیری ریسک معامله سبدهای خود به کار بردند،از آن زمان رشد کاربرد این مفهوم همواره صعودی بوده است.در حال حاضر ارزش در معرض ریسک را بسیاری از معامله‌گران مشتقات برای اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار مربوط به خود به کار می‌برند.در 1994 بررسی‌های آماری پروژه جهانی مشتقات در گروه 30 نشان داد که43 درصد معامله گران از ارزش در معرض ریسک استفاده کرده‌اندو37 درصد در صدد استفاده ازآن تا 1995هستند.تلاش‌های موسسه جی.پی.مورگان از طریق انتشار گزارش ریسک متریکس[2] برای نهادینه کردن استاندارد بازار در اکتبر 1994 تاثیر چشمگیری در رشد کاربرد ارزش در معرض ریسک داشت.در 1997کمیسیون اوراق بهادار و ارز ایالات متحده دستور داد که شرکت‌های خصوصی اطلاعات مربوط به فعالیت‌های خود را در زمینه معاملات مشتقات منتشر کنند.بسیاری از بانک‌ها ومعامله‌گران برای تامین و تهیه صورت‌های مالی

[1] Value at Risk
[2] Riskmetrics

ارزش در معرض ریسک (VaR )را وارد سامانه خود نمودند.با توجه به توصیه‌های کمیته‌های مختلف گروه 30 موسوم به پیمان بال،جهت جلوگیری از وقوع بحران‌های مالی جهانی VaR به عنوان بخشی از مدیریت ریسک بسیاری از موسسات مالی جهان در آمده است.اگرچه VaR توسط سازمان ملل متحد،به عنوان معیار جهانی محاسبه ریسک مطرح است ولی در ایران هنوز این مفهوم جایگاهی پیدا نکرده است.با توجه به این که VaR با استقبال جهانی مواجه شده است ولی مفهوم دیگری که در آینده می‌تواند رقیب جدی آن باشد مفهوم ارزش در معرض ریسک شرطی است ، این مفهوم را هم اکنون دررشته‌های مالی مربوط به بیمه وارد کرده‌اند.

روش‌های محاسبه VaR به دو دسته پارامتریک و غیرپارامتریک و شبیه سازی مونت کارلو تقسیم‌بندی می‌شود.دسته پارامتریک شامل روش واریانس-کواریانس و غیرپارامتریک شامل شبیه سازی تاریخی هستند.

دو رویکرد اساسی در محاسبه VaRمطرح است:

1. اعتبار فرض نرمال بودن برای ارزش یا بازده دارایی یا سبد، شامل مطالعه دم ضخیم و خوشه بندی تلاطم،
2. فرض غیرخطی بودن دارایی‌ها

ویژگی غیرنرمال بودن بازده‌های مالی توسط مندلبرات[1] و فاما[2] مطالعه شده است.از آن زمان به بعد بسیاری از مطالعات تجربی غیرنرمال بودن بازده‌های مالی را پیشنهاد کرده‌اند.این

[1] Mandelbrot
[2] Fama