
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض- جبر

عنوان

نیم حلقه های بخش پذیر جمعی و

قضیه تجزیه اولیه ضعیف برای نیم حلقه ها

از

رقیه مهدی زاده لطرئی

استاد راهنما

دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی

مرداد ۸۹

تقدیم به

همسر عزیزم

که با فداکاری همواره یاور و مشوق من بود

تقدیر و تشکر

خدای را بی نهایت سپاس می گویم که به من توفیق داد تا بتوانم رساله ام را تکمیل کنم و تحصیلاتم را به مقطعی بالاتر ارتقا دهم. «من لم یشکرالمخلوق لم یشکرالخالق» برخود لازم می دانم از استاد دلسوزم جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی که در کلیه مراحل این رساله راهنمای من بودند و همواره مرا از نصیحت های خویش بهره مند می ساختند تقدیر نمایم. همچنین مراتب سپاسگزاری خود را از اساتید بزرگوار جناب آقای دکترحبیب الله انصاری و دکتر فرهاد درستکار که زحمت داوری این پایان نامه را بعهده داشته اند ابراز می کنم.

ضمناً از تمامی اساتیدی که افتخار شاگردی آن ها را داشته ام و همچنین دوستان عزیزم خانم ناهید رضایی و آمنه غلامعلی پور بخاطر همه زحماتی که برای بنده کشیده اند قدردانی می کنم. بی تردید بدون همراهی خانواده و بخصوص همسرم، نمی توانستم در این مسیر قدم بگذارم، امیدوارم که تشکر صمیمانه مرا پذیرا باشند.

فهرست مطالب

نمادهای استفاده شده در متن

اعداد صحیح مثبت	$\mathbb{N}$
نیم حلقه اعداد صحیح نامنفی	$\mathbb{Z}^{+}$
حلقه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه شبه نیم میدان های اعداد گویای نامنفی	$\mathbb{Q}^{+}$
گروه نامتناهی که به صورت زیر تعریف می شود	$Z_{p^{\infty}}$

$$Z_{p^{\infty}} = \left\{ \frac{m}{p^{n}} + \mathbb{Z} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^{+} \right\}$$

اگر و تنها اگر	$\Leftrightarrow$
نتیجه می دهد	$\Rightarrow$
زیر مجموعه سره ای از	$\subsetneq$
زیر مجموعه ای است از	$\subset$ یا $\subseteq$
مجموعه تهی	ϕ
وجود دارد ، موجود است	$\exists$
به ازای هر	$\forall$
پایان اثبات یا عدم ارائه اثبات	$\blacksquare$
کلاس هم ارزی a	$\bar{a}$
مرتبه a	$ord(a)$
متعلق است به	$\in$
متعلق نیست به	$\notin$

چکیده

نیم حلقه های بخش پذیر جمعی و قضیه تجزیه اولیه ضعیف برای نیم حلقه ها
رقیه مهدی زاده لطرئی

در این مقاله قضیه تجزیه اولیه برای حلقه های نوتری جابجایی به نیم حلقه های نوتری راست و k-نیم حلقه های راست غیرجابجایی تعمیم داده شده وثابت شده است که اگر M یک ایده آل اول تکین در نیم حلقه چند جمله ای $R[x]$ باشد آن گاه هر ایده آل ضریبی M_i ایده آل اول است[۳] ، همچنین نیم حلقه های جابجایی با نیم گروه های جمعی بخش پذیر را بررسی کرده ایم[۱۰].

کلید واژه ها : نیم حلقه، تجزیه اولیه، k-نیم حلقه، نیم گروه و نیم حلقه بخش پذیر، نیم گروه دوری و نیم حلقه چندجمله ای

Abstract

Additively divisible semirings and Weak primary decomposition theorem for semiring Roghaye Mahdizade Latreiy

We extend the primary decomposition theorem for commutative rings to non- commutative right Notherian, right k-semiring . We also prove that if M is a monic prime ideal in the polynomial semiring $R[x]$ than each coefficient ideal M_i is a prime ideal of R [3],also commutative semirings with divisible additive semigroup are studied[10].

Key words: semiring, primary decomposition, k-semiring, divisible semigroup and semiring , cyclic semigroup and polynomial semiring

مقدمه

اولین بار مفهوم نیم حلقه ها در سال ۱۹۳۴ توسط واندیور[1] بیان شد و در [۱۳] مورد بررسی قرار گرفت.
نیم حلقه های اعداد طبیعی (شامل صفر)،به طور حتم قدیمی ترین ساختار جبری برای محاسبات انسان بوده است و ازاین جا می توان به اهمیت نیم حلقه ها پی برد. نیم حلقه ها توسط محققان زیادی جهت توسعه روش ها و تعمیم نتایج از قضایای حلقه ها و نیم گروه ها و برخی کاربردهای آن بررسی شدند.
از جمله کاربردهای آن می توان به ریاضیات ترکیباتی ، رمزگذاری ، آنالیز تابعی ، توپولوژی ، نظریه گراف ، هندسه اقلیدسی ، بهینه سازی ، مدلسازی ریاضی در فیزیک کوانتوم و . . . اشاره کرد. [۱۴]
اولین کتاب در زمینه نیم حلقه ها و کاربردهای آن توسط گلون[2] نوشته شده است [۷] . او در این زمینه کارهای بسیاری انجام داده است.ازجمله افراد دیگری که در این زمینه فعالیت هایی را انجام داده اند می توان ریدی[3]
(۱۹۶۷-۱۹۵۹) ، لاگوسکی[4] و وینرت[5] (۱۹۶۱) و کاستا[6] (۱۹۷۴) را نام برد. [۱۴]
هنریکسن[7] در سال ۱۹۵۸ مفهوم k -ایده آل را برای نیم حلقه ها بیان کرد و نشان داد که ایده آل های یک حلقه k- ایده آل هستند. [۸]
k-ایده آل ها در نیم حلقه ها به وجود آمدند تا شرایط مشابه ایده آل در حلقه ها را جهت استفاده از قضایای حلقه ها ایجاد کنند .
همچنین جبر cg-ساده یک ساختار پایه برای ساختار های جبری دیگر است . علی رغم این امر در مقایسه با تامین اطلاعات متنوع بخصوص در مورد گروه ها و حلقه های ساده ، نیم حلقه های cg-ساده خیلی شناخته شده نیستند.
در هر حال در این رساله سعی شده است که به بررسی بخش های دیگری از نیم حلقه ها پرداخته شود . این رساله شامل سه فصل است.در فصل صفر تعاریف و قضایا و به طور کلی هر آنچه که پیشنیاز فصل های بعد است مطرح شده است .فصل اول خصوصیت نوتری بودن در نیم حلقه ها را بررسی می کند و شامل دو بخش است. (البته شایان ذکر است که در این فصل نیم حلقه ها غیر جابجایی هستند ،مگر خلاف آن ذکر شده باشد.)
بخش اول به قضیه تجزیه اولیه ضعیف در نیم حلقه ها می پردازد و بخش دوم یک قضیه از نیم حلقه چند جمله ای ها را بررسی می کند.در این فصل از مثال های متنوعی نیز استفاده شده است.
و اما موضوع فصل دوم نیم حلقه های جابجایی بخش پذیر جمعی می باشد.

1-H.S.Vandiver
2-J.Golan
3-L.Redei
4-H.Lugowski
5-H.J.Weinert
6-A.Costa
7-M . Henriksen

این فصل شامل ۶ بخش است . در بخش اول به یک سری از همنهشتی ها درنیم حلقه اعداد صحیح مثبت اشاره شده و در بخش دوم از آن ها در نیم گروه های دوری استفاده شده است.
بخش سوم و چهارم به ترتیب به نیم گروه ها و نیم حلقه های بخش پذیر جمعی پرداخته و در بخش پنجم خصوصیت بخش پذیری را محدودتر کرده و نیم حلقه های بخش پذیر جمعی با یک مولد را بررسی کرده است .
در بخش ۶ نیز حدس هایی مطرح شده است که در صورت درست بودن آن ها قضیه ای مهم قابل اثبات است.

فصل صفر

تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۰-۱ مجموعه R با دو عمل $+$ و $\times$ را یک نیم حلقه گویند هرگاه

۱) $(R,+)$ نیم گروه جابجایی با عنصر همانی صفر باشد.

۲) $(R,\times)$ یک نیم گروه باشد.

۳) عمل ضرب نسبت به عمل جمع از راست و چپ پخشی باشد.

۴) به ازای هر $x \in R$، $x\times \circ = \circ \times x = \circ$.

تذکر اگر R نسبت به ضرب جابجایی باشد آن را نیم حلقه جابجایی گویند؛ به علاوه اگر R نسبت به ضرب عنصر همانی داشته باشد، آن را نیم حلقه یکدار گویند.

مثال ۰-۲ بدیهی است هر حلقه یک نیم حلقه است، به علاوه مجموعه اعداد صحیح نامنفی با ضرب و جمع معمولی یک نیم حلقه جابجایی یکدار است.

تعریف ۰-۳ فرض کنید I یک زیرمجموعه غیرخالی نیم حلقه R باشد. I را یک ایده آل چپ R گویند هرگاه به ازای هر $I\in a,b$ و $R\in r$ داشته باشیم $I\in ra,a+b$

به طریق مشابه ایده آل راست تعریف می شود.

تذکر: I را یک ایده آل(ایده آل دو طرفه) R گویند هرگاه I هم ایده آل چپ و هم ایده آل راست باشد.

تعریف ۰-۴ ایده آل راست I از نیم حلقه R را تحویل ناپذیر گویند هرگاه $I\neq R$ و به ازای هر دو ایده آل راست K و J که $I = K \bigcap J$ آن گاه $I = K$ یا $I = J$

تعریف ۰-۵ ایده آل I (ایده آل راست I) از نیم حلقه R را را k-ایده آل (k-ایده آل راست) گویند هرگاه

$a\,,a+b\in I$ و $b\in R$ نتیجه دهد $b\in I$

تعریف ۰-۶ R را نوتری راست گویند هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده آل های راست آن ایستا باشد و یا معادلاً، هر زیرمجموعه غیرخالی از ایده آل های راست آن عنصر ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۰-۷ ایده آل سره I از یک نیم حلقه R را اول[8] گویند هرگاه به ازای هر $a,b\in R$ از $aRb\subseteq I$ نتیجه گیریم

$$a\in I \quad \text{یا} \quad b\in I$$

تعریف ۰-۸ ایده آل سره راست I از نیم حلقه (حلقه) R را اولیه[9] گویند هرگاه به ازای هر $a,b\in R$ از $I\in ab$ نتیجه گیریم

$$b\in I \quad \text{یا} \quad n\geq ۱ \text{ موجود است که } a^n\in I$$

تعریف ۰-۹ ایده آل راست I از یک نیم حلقه (حلقه) R را اولیه ضعیف[10] گویند هرگاه به ازای هر $a,b\in R$ از $I\in ab$ و $I\subseteq aI$ نتیجه گیریم $b\in I$ یا $n\geq ۱$ موجود است که $a^n\in I$

تذکر واضح است که هر ایده آل راست اولیه، اولیه ضعیف است، اما عکس آن درست نیست. (مثال ۱-۱-۹ و ۱-۱-۱۲)

لم ۰ – ۱۰ فرض کنید I یک ایده آل راست نیم حلقه جابجایی R باشد. I اولیه است اگر و فقط اگر اولیه ضعیف باشد.

برهان : می دانیم که هر ایده آل اولیه ، اولیه ضعیف است . پس کافیست عکس آن را نشان دهیم .

فرض کنید I ایده آل اولیه ضعیف است، بنابراین اگر $I\in ab$ و $I\subseteq aI$ نتیجه می گیریم $b\in I$ یا $n\geq ۱$ موجود است که $a^n\in I$. نشان می دهیم شرط $I\subseteq aI$ در نیم حلقه های جابجایی همواره برقرار است.

از آنجا که I ایده آل راست R است، پس به ازای هر $I\in x$ و $R\in a$ داریم

$I\in xa$ پس $I\subseteq Ia$

و چون نیم حلقه جابجایی است پس $xa=ax$ یعنی $Ia=aI$. ■

تذکر واضح است که لم فوق برای زمانی که I یک ایده آل نیم حلقه (حلقه) R باشد؛ (نه لزوماً جابجایی)، برقرار است.

قضیه (الگوریتم تقسیم) ۰-۱۱

فرض کنید $a,b\in\mathbb{Z}$ و $b>۰$. در این صورت اعداد صحیح یکتایی مانند r,q هست که

1-*Prime*
2-*Primary*
3-*Weak Primary*

$$a = bq + r \qquad \circ \le r \le b$$

q را خارج قسمت و r را باقیمانده a به پیمانه b می نامند.

لم زرن ۰-۱۲ فرض کنید(x ,~) یک مجموعه جزا مرتب باشد. در این صورت، اگر هر زنجیر در(x ,~) دارای یک کران بالا باشد آن گاه (x ,~) حداقل یک عضو ماکسیمال دارد.

تعریف ۰-۱۳ یک نیم حلقه R را $k-$ نیم حلقه ($k-$ نیم حلقه راست) می نامند هرگاه هر ایده آل (هر ایده آل راست) آن یک $k-$ایده آل ($k-$ایده آل راست) باشد.

مثال ۰-۱۴ فرض کنید $R = \left(\mathbb{Z}^+ \bigcup \{\infty\}, \oplus, \otimes\right)$. اعمال $\oplus$ و $\otimes$ بر روی R را چنین تعریف می کنیم، به ازای هر $R \in a,b$

$$a \oplus b = max\{a,b\} \quad \text{و} \quad a \otimes b = min\{a,b\}$$

آن گاه R تحت اعمال فوق یک نیم حلقه جابجایی یکدار $(\infty = ۱_R)$است (توجه می کنیم که $\circ_R = \circ$). نشان می دهیم R یک $k-$نیم حلقه است. برای اثبات آن باید نشان دهیم :

۱) ایده آل های R به صورت زیر است

(به ازای هر $t \in \mathbb{Z}^+$) $I = M_t = \{\circ, ۱, \ldots, t\}$ یا $I = \mathbb{Z}^+$ یا $I = R$

۲) همه ایده آل های R ، k-ایده آل هستند.

برهان ۱) واضح است که R یک ایده آل R است، پس فرض کنیم I ایده آل دلخواه R باشد به قسمی که

$I \ne R$

نشان می دهیم که I به صورت فوق است.

از این که $I \ne R$ نتیجه می گیریم که $۱_R \notin I$ یعنی $\infty \notin I$.

واضح است که $\circ \in I$ پس اگر I عضو دیگری نداشته باشد $I = M_\circ$ و حکم تمام است.

پس فرض کنید I عضو دیگری مانند $\circ \ne t \in \mathbb{Z}^+$دارد، پس حتماً $۱ \in I$، زیرا با انتخاب $r = ۱ \in R$ و $t \in I$ طبق خواص ایده آل داریم: $r \otimes t = min\{r,t\} = r = ۱ \in I$ و به همین ترتیب $۲,۳,\ldots,t \in I$ یعنی

$I = M_t$ یا $I = \mathbb{Z}^+ \blacksquare$

۲) واضح است که $I = R$ یک k-ایده آل است.

حال فرض کنیم $I=\mathbb{Z}^+$. همچنین فرض کنیم $a\in I$, $a+b\in I$ نشان می دهیم $b\in I$.

اگر $a>b$ واضح است که $b\in I$(طبق تعریف I). پس فرض کنیم $a\le b$، در این صورت داریم

$$a\oplus b=max\{a,b\}=b\in I$$

به طریق مشابه برای $I=M_t$ ثابت می شود. ■

مثال ۰-۱۵ فرض کنیم R همان نیم حلقه تعریف شده در مثال ۰-۱۴باشد، R نوتری نیست، زیرا

$$M_t \subsetneq M_{t+1} \text{ یعنی } t+1\notin M_t \text{ ولی } t+1\in M_{t+1}, \qquad (\forall t\in\mathbb{Z}^+)$$

پس یک زنجیر اکیداً صعودی از ایده آل های R موجود است که ایستا نیست.

$$M_0\subset M_1\subset M_2\subset M_3\subset\dots$$

تعریف ۰-۱۶ فرض کنید R یک نیم حلقه جابجایی و X یک زیرمجموعه غیر خالی R باشد. ایده آل $\langle X\rangle=\{r_1x_1+\cdots+r_nx_n : r_i\in R\ ,x_i\in X\ ,n\in\mathbb{N}\}$ را ایده آل تولیدشده توسط X می نامیم.

تعریف ۰-۱۷ فرض کنید I یک ایده آل راست از نیم حلقه R باشد و $a\in R$. تعریف می کنیم

$$(a:I)=\{r\in R : ar\in I\}$$

تعریف ۰- ۱۸ اگر یک ایده آل راست I از نیم حلقه (حلقه) R به صورت اشتراک متناهی از ایده آل های راست اولیه ضعیف R نوشته شود، آن گاه این نمایش I را تجزیه اولیه ضعیف I گویند.

یادآوری ۰-۱۹ اگر R یک نیم حلقه و x متغیرباشد؛ آن گاه نیم حلقه چند جمله ای ها روی R با متغیر x را با $R[x]$ نشان می دهند.

تعریف ۰- ۲۰ ایده آل M در $R[x]$ را تکین گویند هرگاه $\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\in M$ به ازای هر i نتیجه دهد

$$a_ix^i\in M$$

قضیه۰-۲۱ اگر A یک ایده آل در $R[x]$ باشد و

$A_i = \{R \in a$: موجود است به طوری که ax^i یک جمله f است $A \in f\}$

آن گاه $\{A_n\}$ یک زنجیر صعودی از ایده آل های R است. [۲.۲, ۶]

تعریف ۰–۲۲ در قضیه فوق ایده آل های $\{A_n\}$ را، ایده آل های ضریبی گویند.

قضیه ۰ –۲۳ اگر R یک نیم حلقه جابجایی با همانی ۱ باشد آن گاه یک ایده آل تکین M در $R[x]$ یک k–ایده آل است اگر و فقط اگر به ازای هر i، ایده آل ضریبی M_i یک k–ایده آل در R باشد. [۳.۴, ۴]

تعریف۰–۲۴ فرض کنید S نیم گروه باشد. $a \in s$ را با مرتبه متناهی گویند هرگاه $m \neq n \in \mathbb{N}$ موجود باشند به طوری که

$$ma = na$$

تعریف ۰–۲۵ نیم گروه S را تابدار گویند هرگاه هر عنصر S، با مرتبه متناهی باشد.

تعریف ۰–۲۶ نیم گروه $(S, +)$ را بخش پذیر گویند؛ هرگاه به ازای هر $m \in \mathbb{N}$، $S = mS$.

تعریف ۰–۲۷ هرنیم گروه جابجایی خود توان را یک نیم شبکه می نامیم.

قضیه ۰ –۲۸ گزاره های زیر برای یک نیم حلقه R معادلند.

۱) R نوتری راست است.

۲) هر زنجیر از ایده آل های راست R، ایستا است.

۳) هر زیر مجموعه غیرخالی از ایده آل های راست R، عنصر ماکسیمال دارد.

تذکر قضیه فوق روی قوانین مشابه حلقه ها، قابل اثبات است. [۳.۳۶,۱۲]

تذکر۰–۲۹ مجموعه همه ماتریس های $n \times n$ که درایه های آن عناصر نیم حلقه R هستند را با نماد $R_{n\times n}$ نشان می دهیم. اگر I یک ایده آل R باشدآنگاه به طریق مشابه $I_{n\times n}$ تعریف می شود. به وضوح معلوم است $R_{n\times n}$ با جمع و ضرب ماتریسی یک نیم حلقه غیرجابجایی یکدار است.

لم۰ –۳۰ A یک ایده آل در $R_{n\times n}$ است اگر و فقط اگر $A = I_{n\times n}$ که I ایده آل R می باشد. (یعنی A مجموعه ای از ماتریس های $n\times n$ است که درایه های آن عناصر ایده آل I هستند.)

برهان ($\Rightarrow$)واضح است.

($\Leftarrow$) باید نشان دهیم هر ایده آل $R_{n\times n}$، به صورت $I_{n\times n}$ است.

فرض کنید A یک ایده آل $R_{n\times n}$ باشد. بعلاوه فرض کنید $I=\{a_{ij}:(a_{ij})_{n\times n}\in A\}$ (یعنی مجموعه همه درایه های ماتریس هایی که عناصر A هستند). در این صورت بدیهی است که I یک ایده آل R است و $I_{n\times n}=A$. ■

تعریف۰-۳۱ فرض کنید R یک نیم حلقه یکدار باشد. نیم گروه آبلی$(M\ ,\ +)$را بروی R یکR- نیم مدول چپ گوییم هرگاه تابعی به صورت

$$\begin{aligned}\varphi: R\times M &\to M\\ (r\,,m) &\mapsto rm\end{aligned}$$

موجود باشد (یعنی به ازای هر $r\in R$و $m\in M$داشته باشیم $rm\in M$) بقسمی که به ازای هر $r_1,r_2\in R$ و $m\in M$ اصول زیر برقرار باشند.

۱) $r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$

۲) $(r_1+r_2)m=r_1m+r_2m$

۳) $(r_1r_2)m=r_1(r_2m)$

۴) $1_R.m=m$

به طور مشابه R-نیم مدول راست را تعریف می کنیم.

تعریف ۰-۳۲ فرض کنید نیم حلقه ی یکدار M به عنوان یک R نیم مدول باشد. M را یک R- جبر گوییم هرگاه به ازای هر $r\in R$ و $m_1,m_2\in M$ داشته باشیم

$$(rm_1)m_2=r(m_1m_2)=m_1(rm_2)$$

تعریف ۰-۳۳ عنصر αرا در نیم حلقه R جاذب ضربی (جمعی) گوییم هرگاه برای هر $x\in R$داشته باشیم

$$\alpha.x=x.\alpha=\alpha\ (\alpha+x=x+\alpha=\alpha)$$

تعریف۰-۳۴ فرض کنیم R وS دو نیم حلقه و $f:R\to S$ یک تابع باشد.f را یک همریختی نیم حلقه ای می گوییم هرگاه به ازای هر $x\,,y\in R$داشته باشیم

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

بعلاوه همریختی نیم حلقه ای دو سویی (یک به یک و پوشا) را یک یکریختی نیم حلقه ای می گوییم.

تذکره ۰-۳۵ اگر ρ یک رابطه همنهشتی روی S باشد در این صورت $\frac{S}{\rho}$ تحت اعمال $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$ و $\bar{a}\bar{b}=\overline{ab}$ یک نیم حلقه است بعلاوه $\theta : S \to \frac{S}{\rho}$ یک همریختی نیم حلقه ای پوشاست.

تعریف ۰-۳۶ S را یک حلقه ضربی صفر می گوییم هرگاه $S^{۲}=\{۰\}$

تعریف۰-۳۷ فرض کنید S یک نیم حلقه باشد. ایده آل I از S را bi-ایده آل S گویند اگر

$$S+I\subseteq I$$

تعریف ۰-۳۸ نیم حلقه غیر بدیهی Sرا cg- ساده[1] گویند هرگاه id_S و $S\times S$ تنها رابطه های همنهشتی Sباشند.

تعریف ۰-۳۹ نیم حلقه غیر بدیهی R را id- ساده[2] گویند هرگاه $R=I$، اگر I یک ایده آل R باشد به طوری که حداقل شامل دو عنصر است.

تعریف ۰-۴۰ یک نیم حلقه جابجایی S را شبه نیم میدان[3] گویند هرگاه $(S,\cdot)$ یک گروه غیر بدیهی باشد.آشکار است که هر پارا نیم میدان یک id- ساده است.

تعریف ۰-۴۱ فرض کنید R یک نیم حلقه باشد. عنصر $r\in R$ را حذف پذیر جمعی گویند، هرگاه به ازای هر $a,b\in R$ اگر $r+a=r+b$ آنگاه $a=b$.

زیر مجموعه S از نیم حلقه R را حذفی جمعی گویند، هرگاه هر عنصر S حذف پذیر جمعی باشد.

1-*congruence-simple semiring*
2-*ideal-simple semiring*
3-*Parasemifield*

فصل اول

نیم حلقه های نوتری راست

بخش اول قضیه تجزیه اولیه ضعیف بروی نیم حلقه های نوتری راست

بخش دوم نیم حلقه چند جمله ای ها

بخش اول

قضیه تجزیه اولیه ضعیف بروی نیم حلقه های نوتری راست

این بخش به بررسی خواص k– نیم حلقه ها و ایده آل های تحویل ناپذیر و همچنین به ساختار و ویژگی تجزیه اولیه ضعیف بروی نیم حلقه های نوتری می پردازد ، ضمنا رابطه بین R و $R_{n\times n}$ را با ذکر خواصشان و ارائه مثال های گوناگون بیان کرده است .

لم ۱-۱-۱ هر حلقه یک k– نیم حلقه راست (چپ) است.

برهان : فرض کنیم R یک حلقه باشد و I یک ایده آل راست دلخواه R باشد. پس (I ، +) زیرگروه (R ، +) است. بنابراین به ازای هر $a, a+b \in I$ داریم

$$b = (a+b) - a \in I$$

پس I یک k–ایده آل راست است. ■

نتیجه ۱-۱-۲ ایده آل های یک حلقه، k- ایده آل هستند.

مثال ۱-۱-۳ $\mathbb{Z}^{+}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی یک k– نیم حلقه (راست) نیست.