بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

# مطالبی چند پیرامون اشباع هایی از زیر مدولها

از:

داود حسن‌زاده للکامی

استاد راهنما:

دکتر حبیب اله انصاری طرقی



( شهریور ماه ۱۳۸۷ )

**تقدیم به :**

# خانواده صبور و مهربانم

# تقدیر و تشکر

پروردگار عالمیان را سپاس که مرا در اقیانوس بیکران ریاضیات غوطه‌ور ساخت و هر لحظه دریچهٔ جدیدی از ناشناخته‌های این علم را به رویم گشود و یاریم کرد که پایان نامه‌ام را به اتمام برسانم. اینک بر خود واجب می دانم که از زحمات و کمکهای بی شائبه خانواده و اساتید محترم خود در طول تحصیل تشکر و قدردانی نمایم.

از جناب آقای دکتر حبیب اله انصاری استاد راهنمای ارجمندم که در این راه مرا از راهنماییهای خود بهره مند نمودند، تشکر می کنم. همچنین از جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی و جناب آقای دکتر احمد عباسی، استادان بزرگوارم که زحمت داوری پایان نامه را تقبل نمودند، نهایت سپاسگذاری را دارم.

از جناب آقای رضا اولیایی که سهم بسزایی در به وجود آوردن ایده های نو و پیشبرد کار داشته اند کمال تشکر را دارم.

در پایان از برادران گرامی و خواهر عزیزم که در تمام طول تحصیل دلسوزانه همراه من بودند، تشکر می کنم.

# فهرست مطالب

## چکیده

**مطالبی چند پیرامون اشباع‌هایی از زیرمدولها**

**داود حسن‌زاده للکامی**

فرض کنیم $R$ یک حلقه تعویضپذیر با واحد و $M$ یک $R$- مدول و $N$ زیرمدولی از $M$ باشد. در سالهای اخیر تحقیقات جالبی پیرامون اشباع زیرمدول $N$ و رابطه آن با زیرمدولهای اول مینیمال $N$ صورت گرفته است که در این پایان نامه آنها را به تفصیل مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم.



**کلید واژه ها :** اشباع، زیرمدول اول مینیمال، رادیکال یک زیرمدول.

**Abstract**

**Some results related to saturations of submodules**
**Dawood Hassanzadeh Lelekaami**

Let $R$ be a commutative ring with identity and let $M$ be an $R-$module further let $N$ be a submodule of $M$. In recent years, there have been considerable researches about the saturation of $N$ and its relation with minimal prime submodules. In this thesis we provide and study some of these results.

Keywords: Saturation, Minimal prime submodule, Radical of a submodule.

مفهوم زیرمدولهای اولِ یک مدول بر روی حلقه های تعویضپذیر، یکی از مفاهیم مورد توجه ریاضیدانان در سالهای اخیر می‌باشد. افرادی همچون Chin-Pi Lu ، Moore ، Smith ، McCasland در مقالات مختلف سعی نموده اند که از زوایای مختلف به این مفهوم نگاه کنند و در سایه این تلاشها توانسته اند به بسیاری از سوالات مانند وجود زیرمدولهای اول، ارتباط آنها با ایده‌آلهای اول حلقه و زیرمدولهای ماکسیمال یک مدول پاسخ دهند. یکی از موضوعات مربوط به زیرمدولهای اول، مفهوم اشباعِ زیرمدولها است. در کتابها و مقالات مختلف به مفهوم اشباع یک ایده آل دلخواه از یک حلقه تعویضپذیر و اشباع یک زیرمدول از یک مدول بر روی حلقه ای تعویضپذیر اشاره شده است که از آن جمله می توان مراجع [۲ و ۳ و ۷ و ۱۴ و ۱۸] را نام برد. در سال ۲۰۰۳ میلادی Chin-Pi Lu در [۱۱] مفهوم اشباع یک زیرمدول دلخواه را به دقت مورد بررسی قرار داده و به تفصیل درباره اهمیت نقش اشباع زیرمدولها در نظریه زیرمدولهای اولِ یک مدول بحث کرده است که ما در این پایان نامه به مطالعه آن خواهیم پرداخت. لازم به ذکر است که با گذشت زمان نقش مفهوم اشباعِ یک زیرمدول در نظریه زیرمدولهای اول پر رنگ تر شده و دلیل این ادعا مقالاتی است که در سالهای ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸ میلادی (ر.ک.[۱۲ و ۱۶] ) منتشر شده و این مفهوم در آنها نقش اساسی داشته است.

در این پایان نامه شرایطی را مطرح می کنیم که تحت آن، اشباعِ یک زیرمدول، خود زیرمدولی اول است و همچنین مطالبی را در مورد زیرمدولهای اول مینیمالِ یک زیرمدول دلخواه بیان می کنیم. سرانجام ارتباط بین یک زیرمدول دلخواه و اشباع آن و $M$- رادیکال آن مورد بررسی قرار می گیرد. در این میان مفهوم جدیدی به نام خاصیت (*) را مطرح می نماییم که این مفهوم در توسیع قضایا و ساده نمودن اثبات بسیاری از نکات به ما یاری می رساند.

ابتدا در فصل اول برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده در پایان نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می شوند. از آنجا که قضایای بیان شده در این فصل در کتابها و مقالات مختلف اثبات شده اند، ما از بیان اثبات آنها خودداری کرده و برهان آنها را به منابع مربوطه ارجاع می دهیم. در فصل دوم مفهوم اشباعِ یک زیرمدول را بیان نموده و بعضی از قضایای بنیادی اشباع های زیرمدولها را مطرح می کنیم. در فصل سوم خاصیت (*) را معرفی کرده و رابطه آن با اشباع یک زیرمدول را بررسی می کنیم و نشان می دهیم که مدولهای متناهی مولد در خاصیت (*) صدق می‌کنند. در فصل چهارم علاقه مند به بررسی وجود زیرمدولهای اول مینیمال یک مدول و همچنین توصیفی از آنها هستیم به ویژه علاقه‌مند به بررسی روابط بین زیرمدول $N$ از مدول $M$، اشباع $N$، زیرمدولهای اول مینیمال $N$ و ایده آلهای اول مینیمال $(N:M)=Ann(M/N)$ هستیم. در فصل پنجم، $M$- رادیکال زیرمدولها را مورد بررسی قرار می دهیم و بسیاری

از قضایای مربوط به رادیکال زیرمدولها را بیان می کنیم. همچنین در این فصل اطلاعـات مفیـدی در مـورد زیرمـدولهای اول مینیمال یک زیرمدول سره ارائه می کنیم.

در پایان متذکر می شویم که در سراسر پایان نامه همه حلقه ها تعویـضپذیر و یکـدار و همـه مـدولها نیـز یکـانی فـرض شده‌اند.

# فصل اول

# مقدمات و مطالب پیشنیاز

# مقدمات و مطالب پیشنیاز

در این فصل برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده در پایان نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می شوند.

در سراسر این پایان نامه $R$ نمایش یک حلقه تعویضپذیر یکدار غیر صفر و $M$ یک $R$- مدول یکانی می باشد.

(۱-۱) **نمادگذاری :** فرض کنیم $A,B$ دو مجموعه دلخواه باشند، منظور ما از $A \subseteq B$ ( $A \subset B$) این است که $A$ یک زیرمجموعه (زیر مجموعه اکید) از $B$ است همچنین برای یک مدول دلخواه $M$ منظور مـا از $N \leq M$ $(N < M)$ ایـن است که $N$ یک زیرمدول (یک زیر مدول سره) از $M$ است. از نمادهای $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ به ترتیب برای نمایش مجموعه اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا استفاده خواهیم نمود.

(۱-۲) **تعریف:** ایده آل $p$ از حلقه $R$ را اول گویند هرگاه

۱) $p \neq R$.

۲) اگر $x,y \in R$ به قسمی باشند که $xy \in p$ آنگاه $x \in p$ یا $y \in p$.

(۱-۳) **تعریف:** ایده آل $\mathfrak{M}$ از $R$ را ماکسیمال گویند هرگاه

۱) $\mathfrak{M} \neq R$.

۲) ایده آلی از $R$ مانند $I$ موجود نباشد به قسمی که $\mathfrak{M} \subset I \subset R$.

(۱-٤) **تعریف:** حلقه $R$ را حوزه صحیح گویند هرگاه مقسوم علیه صفرِ ناصفر نداشته باشد.

(۱-٥) **مثال:** فرض کنیم $R = \mathbb{Z}$. هر ایده‌آل $\mathbb{Z}$ به فرم $(m)$ می باشد که در آن $m \geq 0$ یک عدد صحیح اسـت. ایـده آل $(m)$ اول است $\Leftrightarrow$ $m = 0$ یا $m$ یک عدد اول باشـد. همـه ایـده آل هـای $(p)$ کـه در آن $p$ یـک عـدد اول اسـت ماکسیمال هستند.

(۱-٦) **تعریف:** فرض کنید $M$ یک $R$- مدول و $I$ یک ایده آل از حلقه $R$ باشد. در این صورت

$$I M = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid m_i \in M \ , \ a_i \in I \ , n \in \mathbb{N} \}.$$

(۱-۷) **تعریف:** برای هر $R$- مدول $M$ و $N \leq M$ تعریف می کنیم

$$Ann(M) = ((0):M) = \{ r \in R \mid rM = \mathbf{0}_M \}.$$
$$(N:M) = \{ r \in R \mid rM \subseteq N \} = Ann(M/N).$$

(۱-۸) **تعریف:** زیرمدول $P$ از $R-$ مدول $M$ را اول گوییم هرگاه

۱) $P \neq M$.

۲) برای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $rm \in P$ داشته باشیم $m \in P$ یا $r \in (P:M)$.

(۱-۹) **قضیه و تعریف:** اگر $P$ یک زیرمدول اول $M$ باشد آنگاه $p = (P:M)$ یک ایده آل اول $R$ است کـه در ایـن صورت زیر مدول $P$ را یک زیر مدول $p-$اول می نامیم.

**برهان:** (ر.ک.۸) .

(۱-۱۰) **تعریف:** مجموعه همه زیرمدولهای اول $M$ را طیف $M$ گویند و آن را با نماد $Spec(M)$ نشان مـی دهـیم. بـه ویژه $Spec(R)$ را گردایه شامل همه ایده آلهای اول $R$ می نامند.

بطور مشابه، گردایه همه زیرمدولهای $p$- اول $M$، به ازای هر $p \in Spec(R)$ را با $Spec_p(M)$ نمایش می دهیم.

(۱-۱۱) **تعریف:** اگر $Y$ یک زیرمجموعه از $Spec(M)$ باشد آنگاه اشتراک همه عناصر $Y$ را با $\Im(Y)$ نشان می‌دهیم.

(۱-۱۲) **تعریف:** زیر مدول $N$ از $R$- مدول $M$ را ماکسیمال گویند هرگاه:

۱) $N \neq M$

۲) اگر $L$ زیر مدولی از $R$- مدول $M$ به قسمی باشد که $N \subseteq L \subseteq M$، آنگاه $L = M$ یا $N = L$.

همچنین مجموعه تمام زیرمدولهای ماکسیمال $R$- مدول $M$ را با $Max(M)$ نشان می دهیم.

(۱-۱۳) **لم:** فرض کنیم $M$ یک $R-$مدول و $N$ زیر مدول سره از $M$ باشد در این صـورت اگـر $N \in Max(M)$ آنگاه $(N:M) \in Max(R)$ و $N \in Spec(M)$.

**برهان:** (ر.ک.۸) .

(۱-۱۴) **توجه:** ممکن است $Spec(M)$ به ازای یک مدول ناصفر $M$ برابر با تهی باشد. به عنوان مثال فرض کنیم $p$ یک عدد صحیح اول ثابت باشد و $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. در این صورت

$$M=\mathbb{Z}\left(p^{\infty}\right)=\left\{\ \alpha\in\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\ \mid\ \alpha=\frac{r}{p^{n}}+\mathbb{Z}\ ,\ r\in\mathbb{Z}\ ,\ n\in\mathbb{N}_{\circ}\ \right\}$$

یک $\mathbb{Z}$–مدول است که $Spec\left(M\right)=\varnothing$.

**برهان:** (ر.ک.۱۰) .

**(۱–۱۵) تعریف:** اگر به ازای هر $N\leq M$ قرار دهیم $V\left(N\right)=\left\{\ P\in Spec\left(M\right)\ \mid\ P\supseteq N\ \right\}$ آنگاه اشتراک همه زیر مدولهای اول $M$ شامل $N$ را " $M$- رادیکال $N$" می نامیم و آن را با $rad\left(N\right)$ نشان می دهیم. در نتیجه $rad\left(N\right)=\Im\left(V\left(N\right)\right)$. اگر $V\left(N\right)=\varnothing$ آنگاه تعریف می کنیم $rad\left(N\right)=M$.

**(۱–۱۶) تذکر:** فرض کنیم $N$ یک زیر مدول $M$ باشد. واضح است که $rad\left(N\right)$ زیرمدولی از $M$ شامل $N$ است که لزوماً اول نیست. همچنین به ازای هر زیر مدول اول $K$ شامل $N$ داریم $rad\left(N\right)\subseteq K$. به علاوه اگر $P$ یک زیرمدول اول $M$ باشد آنگاه $rad\left(P\right)=P$.

**(۱–۱۷) تعریف:** اگر $V\left(N\right)$ حداقل یک عضو مینیمال نسبت به رابطه شمول داشته باشد آنگاه به این عضو مینیمال، یک "زیرمدول اول مینیمال $N$" یا یک " زیرمدول اول مینیمال به روی $N$" گویند. یعنی زیرمدول اول $P$ از $M$ را زیرمدول اول مینیمال $N$ گویند هرگاه $N\subseteq P$ و برای هر زیرمدول اول $L$ از $M$ که $N\subseteq L\subseteq P$ داشته باشیم $L=P$.

**(۱–۱۸) تذکر:** فرض کنیم $N$ یک زیر مدول $M$ باشد. در این صورت

$$Spec\left(\frac{M}{N}\right)=\left\{\ \frac{P}{N}\ \mid\ P\in Spec\left(M\right),\ N\subseteq P\ \right\}.$$

**برهان:** (ر.ک.۸) .

**(۱–۱۹) تعریف:** فرض کنیم $I$ یک ایده آل دلخواه از حلقه $R$ باشد. رادیکال $I$ در $R$ را با $r\left(I\right)$ نشان می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$r\left(I\right):=\left\{\ x\in R\ \mid\ x^{n}\in I\ \text{که به قسمی باشد داشته وجود}\ n\in\mathbb{N}\ \text{چون عددی}\right\}$$

اگر $J$ یک ایده آل $R$ به قسمی باشد که $r\left(J\right)=J$ ، آنگاه می گوییم که $J$ یک ایده آل رادیکال است.

**(۱–۲۰) تعریف:** به ایده آل $q$ از حلقه $R$ اولیه گویند اگر

۱) $q\neq R$؛

۲) اگر $x,y \in R$ به قسمی باشند که $xy \in q$ آنگاه $x \in q$ یا یک عدد صحیح مثبت $n$ موجود باشد به قسمی که $y^n \in q$.

**(۱-۲۱) تذکر:** روشن است که هر ایده آل اول حلقه تعویضپذیر $R$ یک ایده آل اولیه است.

**(۱-۲۲) قضیه:**

۱) فرض کنید $I$ ایده آلی از $R$ باشد. در این صورت $I$ اولیه است اگر و فقط اگر حلقه $R/I$ حلقه صفر نباشد و هر مقسوم علیه صفر $R/I$ پوچتوان باشد.

۲) فرض کنید $f:R \to S$ همریختی حلقه های تعویضپذیر و $q$ ایده آل اولیه $S$ باشد. در این صورت $q^c := f^{-1}(q)$ ایده آل اولیه $R$ است.

**برهان:** (ر.ک.۱۹) .

**(۱-۲۳) تعریف:** فرض کنیم $q$ یک ایده‌آل اولیه در $R$ باشد. در این صورت $r(q)$ کوچکترین ایده آل اول شامل $q$ است. اگر $p = r(q)$ آنگاه $q$ را $p$ - اولیه گویند.

**(۱-۲٤) قضیه:** اگر $p$ ایده آل اول حلقه $R$ باشد آنگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داریم $r(p^n) = p$.

**برهان:** (ر.ک.۱۹) .

**(۱-۲۵) قضیه:** فرض کنید $q$ ایده آلی از حلقه $R$ باشد به طوری که $r(q) = \mathfrak{M}$ ایده آل ماکسیمال $R$ باشد. در این صورت $q$ یک ایده آل اولیه ( در واقع ایده آل $\mathfrak{M}$ - اولیه ) $R$ است.

در نتیجه تمام توانهای $\mathfrak{M}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ از ایده آل ماکسیمال $\mathfrak{M}$، $\mathfrak{M}$ - اولیه اند.

**برهان:** (ر.ک.۱۹) .

**(۱-۲٦) تعریف:** فرض کنیم $M$ یک $R$ - مدول دلخواه و $N$ یک زیرمدول $M$ باشد. رادیکال $N$ در $M$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$r_M(N) = \{\, x \in R \mid x^n M \subseteq N \text{ وجود داشته باشد که } n \in \mathbb{N} \,\}.$$

به راحتی می توان نشان داد که $r_M(N) = r(N:M) = r\left(Ann\left(\frac{M}{N}\right)\right)$. به ویژه $r_M(N)$ یک ایده آل است.

( زیرا $r_M(N)$ برابر با رادیکال یک ایده آل است پس خود یک ایده آل $R$ است.)

**(۱-۲۷) تعریف:** زیرمدول $N$ از $M$ را اولیه گویند هرگاه

۱) $N \neq M$

۲) برای هر $x \in R$ و $m \in M$ که $xm \in N$ آنگاه $m \in N$ یا $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $x^n M \subseteq N$ (یا بطور معادل $x \in r(N:M)$).

به عبارت دیگر گوییم $N$ یک زیرمدول اولیه $M$ است اگر

۱) $\frac{M}{N} \neq 0$ ؛

۲) به ازای هر $x \in Zd\left(\frac{M}{N}\right) = \{\ r \in R \mid rm \in N$ وجود داشته باشد که $m \in M \setminus N\ \}$ یک عدد صحیح مثبت $n$ وجود داشته باشد که $x^n \left(\frac{M}{N}\right) = 0$. یعنی $x$ به $r_M(N)$ تعلق داشته باشد. (ر.ک.۱۹).

**(۱-۲۸) تعریف:** اگر $N$ یک زیرمدول اولیه $M$ باشد آنگاه $(N:M)$ یک ایده آل اولیه است و از این رو $r_M(N)$ برابر است با یک ایده آل اول $p$. در این صورت می گوییم $N$ یک زیرمدول $p$- اولیه $M$ است.

**(۱-۲۹) تعریف:** می گوییم که زیر مجموعه $S$ از حلقه $R$ " ضربی بسته " است اگر

۱) $1 \in S$ ۲) $0 \notin S$ ۳) اگر $s_1, s_2 \in S$ آنگاه $s_1 s_2 \in S$.

**(۱-۳۰) تعریف:** فرض کنید $S$ زیرمجموعه ضربی بسته از $R$ و $M$ یک $R$- مدول باشد. رابطه $\sim$ روی $M \times S$ با تعریف زیر:

به ازای $(m\ ,\ s)\ ,\ (n\ ,\ t) \in M \times S$

$$(m\ ,\ s) \sim (n\ ,\ t)\ \Leftrightarrow\ \exists u \in S\ ,\ u(tm - sn) = 0$$

رابطه‌ای هم ارزی روی $M \times S$ است؛ به ازای $(m\ ,\ s) \in M \times S$، رده هم ارزی شامل $(m\ ,\ s)$ را با $m/s$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $S^{-1}M$ متشکل از رده‌های هم ارزی رابطه $\sim$ همراه با اعمال $\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st}\ ,\ \frac{r}{s}\ \frac{n}{t} = \frac{rn}{st}$ که در آن $m, n \in M$، $s, t \in S$ و $r \in R$، را در نظر می گیریم. اگر $M = R$ آنگاه $S^{-1}R$ یک حلقه است که آن را حلقه کسرهای $R$ نسبت به $S$ می نامیم. مجموعه $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$- مدول و همین طور، یک $R$- مدول است. $S^{-1}R$- مدول $S^{-1}M$ مدول کسرهای $M$ نسبت به $S$ نامیده می شود. اگر $P$ یک ایده آل اول از $R$ و

$S=R\setminus P$ باشد آنگاه $S^{-1}R$ را با $R_P$ ، $S^{-1}P$ را با $PR_P$ و $S^{-1}M$ را با $M_P$ نمایش می دهیم. $M_P$ را مدول حاصل از موضعی سازی $M$ در $P$ می نامیم.

**(۱-۳۱) تذکر:** ۱) توجه کنید که به ازای $m\in M$ و $s\in S$ داریم $\frac{m}{s}=0_{S^{-1}M}$ اگر و تنها اگر $t\in S$ وجود داشته باشد که $tm=0$.

۲) نگاشت $f:M\to S^{-1}M$ که به ازای هر $m\in M$ به صورت $f(m)=\frac{m}{1}$ تعریف می شود یک همریختی $R$- مدولهاست.

**(۱-۳۲) قضیه:** فرض کنیم $S$ یک زیرمجموعه ضربی بسته از $R$ بوده و $I$ یک ایده آل $R$ باشد. در این صورت $S^{-1}I=S^{-1}R$ اگر و فقط اگر $I\cap S\neq\varnothing$.

**برهان:** (ر.ک.۱۹) .

**(۱-۳۳) قضیه:** فرض کنید $p$ یک ایده آل اول $R$ باشد. در این صورت برای زیرمدول دلخواه $N$ از $R$- مدول $M$ احکام زیر معادل اند:

۱) $N$ یک زیرمدول $p$- اول است.

۲) $N$ یک زیرمدول $p$- اولیه است و $p\subseteq (N:M)$.

**برهان:** (ر.ک.۸) .

**(۱-۳۴) تعریف:** $R$- مدول $M$ را باوفا گوییم هرگاه $Ann(M)=0$.

**(۱-۳۵) تعریف:** فرض کنید $R$ یک حوزه صحیح دلخواه و $x$ عضوی از $R$- مدول $M$ باشد. در این صورت گوییم $x$ یک عضو تابدار است هرگاه یک عضو ناصفر $r$ از $R$ وجود داشته باشد که $rx=0$.

زیرمجموعه $T(M)$ از $M$ برابر است با مجموعه همه عناصر تابدار $M$. در واقع

$$T(M)=\{\, m\in M \mid \text{وجود داشته باشد که } rm=0 \;\; 0\neq r\in R \,\}.$$

این مجموعه یک زیرمدول $M$ است و آن را زیرمدول تابدار $M$ می نامیم. $R$- مدول $M$ را تابدار گویند هرگاه $T(M)=M$. همچنین مدول $M$ را فارغ از تاب گویند هرگاه $T(M)=0$، به عبارت دیگر هرگاه $rx=0$ آنگاه $r=0$ و یا $x=0$.

**(۱-۳۶) توجه:** همه فضاهای برداری فارغ از تاب اند همچنین هر مدول آزاد فارغ از تاب است.

**برهان:** (ر.ک.۵) .

**(۱-۳۷) قضیه:** فرض کنیم $N$ یک زیرمدول سره $M$ به قسمی باشد که $(N:M)=p\in Spec(R)$. در این صورت $N$ یک زیرمدول اول $M$ است اگر و فقط اگر $\frac{M}{N}$ بعنوان $\frac{R}{p}$ - مدول، فارغ از تاب باشد.

**برهان:** (ر.ک.۸) .

**(۱-۳۸) قضیه:** فرض کنیم $N$ یک زیرمدول سره $M$ باشد. اگر $p$ یک ایده آل ماکسیمال $R$ به قسمی باشد که $p=(N:M)$، آنگاه $N$ یک زیرمدول اول $M$ است.

**برهان:** (ر.ک.۸) .

**(۱-۳۹) لم:** فرض کنیم $R$ یک حوزه صحیح بوده و $M$ یک $R$- مدول ناصفر و فارغ از تاب باشد و $I$ یک ایده آل ناصفر از $R$ باشد. در این صورت داریم $IM\neq 0$.

**برهان:** فرض کنیم $IM=0$. در این صورت $0\neq I\subseteq(0:M)$. لذا $0\neq r\in R$ وجود دارد که به ازای هر $m\in M$ داریم $rm=0$. اما این یک تناقض است زیرا بنا به فرض $M$ یک مدول فارغ از تاب است. در نتیجه $IM\neq 0$. ■

**(۱-۴۰) تعریف:** فرض کنید $R$ حلقه ای تعویضپذیر و ناصفر باشد.

عبارتی چون $p_0\subset p_1\subset\ldots\subset p_n$ که در آن $p_0$،...، $p_n$ ایده آلهای اول $R$ هستند زنجیرهٔ ایده آلهای اول $R$ نامیده می‌شود. طول این زنجیره برابر با تعداد علامت های $\subset$ است. یعنی یکی کمتر از تعداد ایده آلهای اول موجود در آن است. لذا طول زنجیرهٔ فوق $n$ است.

بُعد $R$ را برابر با

$$\mathrm{Sup}\,\{\, n\in\mathbb{N}_0 \mid \text{زنجیره ای به طول } n \text{ از ایده آلهای اول } R \text{ وجود داشته باشد} \,\}$$

تعریف می کنیم مشروط بر اینکه مجموعهٔ فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این صورت آن را $\infty$ می‌گوییم. بعد $R$ را با $\dim R$ نشان می دهیم.

فرض کنید $p \in Spec(R)$. در این صورت ارتفاع $p$ را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعهٔ طولهای زنجیره های $p_0 \subset p_1 \subset \ldots \subset p_n$ از ایده آلهای اول $R$ تعریف می کنیم که در آن $p_n = p$ ، مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این صورت آن را $\infty$ می گوییم. ارتفاع $p$ را با $ht\ p$ نشان می دهیم.

اگر $\dim R$ متناهی باشد آنگاه

$$\dim R = \sup \{ \ ht\ \underline{m} \ | \ \text{است } R \text{ یک ایده آل ماکسیمال } \underline{m} \ \}$$
$$= \sup \{ \ ht\ p \ | \ p \in Spec(R) \ \}.$$

برای مشاهده جزئیات بیشتر به مرجع [۱۹] رجوع کنید.

(۱-۴۱) **لم**: فرض کنیم $R$ یک حوزه صحیح باشد. اگر $M$ یک $R$-مدول ناصفر متناهی مولد و تابدار باشد آنگاه $Ann(M) \neq 0$.

**برهان**: فرض کنیم $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$. چون $0 \neq M = T(M)$ از این رو به ازای هر $1 \leq i \leq n$، عضوی مانند $0 \neq s_i \in R$ وجود دارد که $s_i m_i = 0$.

قرار می دهیم $s := \prod_{i=1}^{n} s_i$. از این رو $s$ یک عضو ناصفر حوزه صحیح $R$ است و به ازای هر $m \in M$ داریم $sm = 0$.

بنابراین $0 \neq s \in Ann(M)$. ■

(۱-۴۲) **قضیه** :فرض کنیم $F$ یک $R$-مدول آزاد، $I$ و $J$ و $I_1, \ldots, I_n$ ایده آلهایی از $R$ باشند در این صورت

۱) $\frac{F}{IF}$ یک $\frac{R}{I}$-مدول آزاد است.

۲) $(IF:F) = I$.

۳) اگر $I \in Spec(R)$ آنگاه $IF \in Spec(F)$.

٤) اگر $q$ یک ایده آل اولیه باشد آنگاه $qF$ یک زیر مدول اولیه است.

۵) اگر $IF \subseteq JF$ آنگاه $I \subseteq J$.

٦) $(I_1 \cap \ldots \cap I_n)F = I_1F \cap \ldots \cap I_nF$.

**برهان**: (ر.ک.۱۳و۱۷).

**(۱-۴۳) قضیه:** فرض کنیم $R$ یک حلقه و $I$ ایده آلی از $R$ و $M$ یک $R$-مدول متناهی مولد باشد که توسط $n$ عضو تولید شده است و $x$ عضوی از $R$ باشد به قسمی که در رابطه $xM \subseteq IM$ صدق می کند. در این صورت به ازای یک $y \in I$ داریم $(x^n + y)M = 0$.

**برهان:** (ر.ک.۶) .

**(۱-۴۴) قضیه:** فرض کنیم $M$ یک $R$-مدول متناهی مولد باشد و $I$ ایده آلی از $R$ است به قسمی کـه $r(I) = I$. در این صورت $(IM : M) = I$ اگر و تنها اگر $Ann(M) \subseteq I$.

**برهان:** $(\Leftarrow)$چون $(0:M) \subseteq (IM : M) = I$ پس $Ann(M) \subseteq I$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $Ann(M) \subseteq I$ و $r$ عضوی از $R$ به قسمی باشد که به $(IM : M)$ تعلق دارد. فرض کنیم $M$ توسط $n$ عضو تولید شده باشد در این صورت با توجه به قضیه (۱- ۴۳) $y \in I$ موجود است به قسمی که $r^n + y \in Ann(M) \subseteq I$. بر این اساس داریم $r^n \in I$ و بنابراین $(IM : M) \subseteq r(I) = I$. در نتیجه $(IM : M) = I$.■

**(۱-۴۵) تعریف:** فرض کنید $M$ مدولی روی حلقه تعویضپذیر $R$ باشد. مقصود از محمل $M$ مجموعه $\{p \in Spec(R) | M_p \neq 0\}$ است. این مجموعه را با نماد $Supp(M)$ نشان می دهیم. ( در اینجا $M_p$ نشاندهنده مدول حاصل از موضعی سازی $M$ در $p$ است. )

**(۱-۴۶) لم:** اگر $M$ یک $R$-مدول باشد آنگاه

$$Supp(M) = \{\ p \in Spec(R) \mid \exists\, 0 \neq m \in M \ s.t.\ (0:m) \subseteq p\ \}.$$

**برهان:** (ر.ک.۱۹) .

**(۱-۴۷) قضیه:** فرض کنید $M$ یک $R$-مدول متناهی مولد باشد. در این صورت

$$Supp(M) = \{\ p \in Spec(R) \mid (0:M) \subseteq p\ \} = V\left(Ann(M)\right).$$

**برهان:** (ر.ک.۱۹) .

**(۱-۴۸) لم:** فرض کنیم $N$ زیرمدولی از مدول $M$ روی حلقه تعویضپذیر $R$ و $S$ زیر مجموعه‌ای ضربی بسته از $R$ باشد. در این صورت نگاشت زیر

$$S^{-1}M/S^{-1}N \to S^{-1}(M/N)$$
$$(m/s)+S^{-1}N \mapsto (m+N)/s$$

یکریختی $S^{-1}R$ - مدولهاست.

**برهان:** (ر.ک.۱۹) .

**(۱-۴۹) لم** : فرض کنیم $\{P_i \mid i \in I\}$ یک خانواده ناتهی از زیرمدولهای اول $R$ - مدول $M$ باشد و فرض کنید این خانواده نسبت به رابطه شمولیت کلاً مرتب باشد. در این صورت $\bigcap_{i\in I} P_i$ یک زیرمدول اول $M$ است. اگر $M$ یک مدول متناهی مولد باشد آنگاه $\bigcup_{i\in I} P_i$ نیز یک زیرمدول اول $M$ است.

**برهان:** (ر.ک.۹) .

**(۱-۵۰) قضیه:** فرض کنیم $M$ یک $R$ - مدول باشد. اگر زیرمدول $N$ زیرمجموعه زیرمدول اول $P$ باشد آنگاه $P$ شامل یک زیرمدول اول مینیمال $N$ است.

**برهان:** (ر.ک.۹) .

**(۱-۵۱) قضیه:** اگر $M$ یک مدول متناهی مولد باشد آنگاه هر زیرمدول سره از $M$ مشمول در یک زیرمدول اول است.

**برهان:** (ر.ک.۸) .

**(۱-۵۲) نتیجه:** فرض کنیم $M$ یک $R$ - مدول متناهی مولد بوده و $N$ یک زیرمدول سره از $M$ باشد. در این صورت حداقل یک زیرمدول اول مانند $P$ شامل $N$ موجود است به قسمی که به روی $N$ مینیمال است.

**برهان:** (ر.ک.۸).

**(۱-۵۳) قضیه:** فرض کنیم $M$ یک $R$ - مدول متناهی مولد باشد. آنگاه $M$ - رادیکال یک زیرمدول $N$ از $M$ برابر است با اشتراک زیرمدولهای اول مینیمال $N$.

**برهان:** زیرمدول $N$ با توجه به نتیجه (۱- ۵۲) دارای زیرمدول اول مینیمال است. از این رو اشتراک $L$ از همه زیرمدولهای اول مینیمال $N$ شامل $rad(N)$ است. از طرف دیگر فرض کنیم $P$ یک زیرمدول اول شامل $N$ باشد. با توجه به قضیه (۱- ۵۱)، $P$ شامل زیرمدول اول مینیمال $P_i$ از $N$ است. از این رو $L=\bigcap_{i\in I} P_i \subseteq rad(N) \subseteq L$. ■