بسم الله الرحمن الرحيم

عنوان پایان نامه :

" تحلیل پیوندهای منفی "

نام مؤلف :

محمّد امینی دهک

پایان نامه کارشناسی ارشد

آمار ریاضی

****

سال انتشار :

خرداد ۱۳۷۳

شماره ....

تاریخ ....

پیوست ....

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدهٔ علوم

دانشگاه فردوسی " مشهد"

دانشکده علوم

گروه آمار

صورتجلسه دفاع رساله کارشناسی ارشد (آمارریاضی)

درتاریخ ۲۶/۳/۷۲ خانم / آقای محمد امین زهک از رسالهٔ کارشناسی ارشد خود

تحت عنوان :

« تحلیل سری زمانی های منفی »

با بیان خلاصه ای از کار انجام شده و پاسخ به سئوالات داوران دفاع نمودند و

این رساله با نمره ۲۰ معادل عالی قبول شد.

۱ـ استادراهنما ابوالقاسم بزرگ‌نیا

۲ـ اعضاء هیئت داوران ۱ـ دکتر علی مشکانی (مدیر گروه آمار)

۲ـ ناصررضا ارقامی (استاد مشاور)

۳ـ محسن الدبایی (داور مدعو)

مدیر گروه آمار

معاون آموزشی دانشکده

تقـدیـم بـه :

اولیـن معلمـان زندگانیـم ، پـدرو مادر فداکارم که به حـق الگـوی صبـر و مقاومتو ایثارنـد ، آنـها که با رنج و سختی بسیار و تحمـل فـراق درامـر تحصیـل همراهیـم نمودنـد.

تقـدیـم بـه :

همسـر مهربانـم که در طی تحصیلات دانشگاهیـم متحمل رنـج و زحمات فـراوانـی شده و به خاطـر وقتی کـه از وی دریـغ کـردم .

محمّـد امینـی دهکی

خردادماه ۱۳۷۳

تشکّر و قدردانی

از استاد ارجمند جناب آقای دکترابوالقاسم بزرگ نیا ، بخاطر زحمات بی شائبه ایشان در امر تهیه مقالات و راهنمائی علمی این رساله نهایت تشکر را دارم و خدمات ایشان را به علم آمار ارج می نهم .

از استاد محترم جناب آقای دکتر ناصررضا ارقامی استاد مشاور و مشوق اینجانب در انتخاب موضوع نهایت تشکر را دارم .

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر عین ا... پاشا استاد داور و بواسطه زحمات ایشان در امر مطالعه این رساله و بعنوان یک صاحب نظر سپاسگزارم .

از استاد محترم جناب آقای دکتر علی مشکانی مدیریت محترم گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد قدردانی می کنم .

ضروری می دانم یادآور شوم که زحمات ارزنده خانم حسینی منشی گروه آمار در امرتایپ فارسی مطالب رساله ، آقای اتحاد مسئول کتابخانه در امر تهیه مقالات و بخش زیراکس سزاوار همه گونه قدردانی است .

محمّد امینی دهک

فهــرســـت

عنــوان	صفحه
مقدمـه	۱
فصل ۱ ـ وابستگیهای منفی دومتغیره و روابط بین آنها	
۱ ـ ۱ وابستگی مربعی (پیوند NQD)	۳
۱ ـ ۲ وابستگی رگرسیونی (پیوند NRD)	۲۸
۱ ـ ۳ وابستگی نسبت درستنمایی (پیوند NLRD)	۴۷
۱ ـ ۴ ارتباط بین متغیرها (پیوند NA)	۶۱
فصل ۲ ـ وابستگیهای منفی چند متغیره و روابط بین آنها	
۲ ـ ۱ وابستگی چند گانه (پیوند ND)	۶۶
۲ ـ ۲ ارتباط بین متغیرها (پیوند NA)	۸۱
۲ ـ ۳ دنباله از راست نزولی (پیوند RTDS)	۸۹
۲ ـ ۴ نزولی مشروط در دنباله (پیوند CDS)	۱۱۴
فصل ۳ ـ کاربردها و خواص متغیرهای بطور منفی وابسته	
۳ ـ ۱ کاربرد در مسائل خطایابی	۱۳۵
۳ ـ ۲ کاربرد در نظریه اعتماد	۱۴۲
۳ ـ ۳ سیستم (FGM)	۱۴۷
۳ ـ ۴ خواص وابستگی منفی	۱۵۲
منابع	۱۶۲

علائم اختصاری

1-	PQD	Positively quadrant dependent
2-	NQD	Negatively
3-	PRD	Positively Regression dependent
4-	NRD	Negatively " "
5-	PLRD	Positvely Likelihood ratio dependence
6-	NLRD	Negutively " "
7-	NA	Negatively associated
8-	UND	Upper negatively dependent
9-	LND	Lower " "
10-	ND	Negatively dependent
11-	RTDS	RiGHT tail decreasing in Sequence.
12-	LTIS	LEFT tail increasing in sequence
13-	CDS	Conditionally decreasing in sequence.
14-	TP	totally positive of order (two)
15-	TN	totally Negative of order two

مقـدمـــه :

مفاهیـم اولیه وابستگی منفی و مثبـت درحالت دو متغیره در سال (۱۹۶۶) توسط لـهمن [۶] ارائه شد و دستورالعملهـای قـوی تری از وابستگی مثبت درحالت دومتغیـره بعدا" درســال (۱۹۷۲) توسط ازاری و پروشـن [۴] توسعه یافت همچنین درسال (۱۹۶۷) ازاری و پروشـن و والکپ [۳] مفهوم ارتباط را مطرح کردند که یک مفهـوم قـوی تری از وابستگی مثبـت رادربر دارد . تعمیم چند متغیره این مفاهیـم از وابستگی مثبـت بعدا" بوسیله آماردانان دیگـر بررسـی شد. اما باتوجه به اینکه در مورد وابستگی مثبت مقالات زیادی نوشته شـده اسـت درمورد وابستگی منفـی واقعا" کمتر مقالـه ای ارائـه شده است .

بعداز آنکه مفاهیـم اولیه وابستگی منفی توسط لهمن در سال (۱۹۶۶) ارائـه شد ، تعمیـم چنـد متغیره این مفاهیـم از وابستگی منفی بعدا" بوسیله آمـار دانان آغـاز شد تا اینکه در ســال (۱۹۸۱) توسط ابراهیمـی و قو ش [۲] تعمیم چند متغیره وابستگی منفی توسعه یافت و درسال (۱۹۹۳) بزرگنیا و تیلور[۱] ارتباط منفی بین متغیرها را مطرح، و قضایای حـدی برای متغیرهای تصادفی بطور منفـی وابسته را بررسی کردند ، لذا باتوجـه به اثبات نکردن بعضی از روابط بین وابستگیهـای منفـی و علاقـه مند شدن به موضوع بـــر آن شدم تا به گردآوری بیشتر مطالـب درمورد انواع وابستگیهـای منفـی ، ارتباط بین آنهـــا و خـواص آنها بپـردازم و آنچه را که دراین مقالـه ارائـه می دهم گرفته شده ازمقالات فــوق می باشد ضمن اینکه در سراسـر مقالـه کلیـه قضـایا ، نتایـج ، و مثالهـای نقضی که توسـط اینجانـب بیان و اثبـات شده با علامت (*) مشخص شده است .

در فصل ۱ مفاهیم اولیـه وابستگی منفی ، خواص و ارتباط بین آنها در حالت دو متغیره بررسی می شود و در پایان فصل جدولـی تنظیم شده است که ارتباط بین انواع وابستگیهـا ی منفـــی در حالت دو متغیره را نشان می دهـد.

درفصل ۲ تعمیم چند متغیره وابستگی منفی ومفاهیم متعددی که به نوعی به وابستگی منفی مربوط می شوند مطرح و ارتباط بین آنها بررسی می شود در پایان این فصل نیزجدولی تنظیم شده است که ارتباط بین این نوع وابستگیها را نشان می دهد.

در فصل ۳ ـ کاربرد و خواص مفاهیم وابستگی منفی در آمار و نظریه اعتماد بحث خواهد شد و یک خانواده از توزیعهای چند متغیره بطور منفی وابسته که بوسیله فارلی ، گابیل ، مورجنبسترن (۱) مطرح شده و به سیستم (FGM) موسوم است را ارائه نمی دهیم .

" فصـــــل اول "

****

۱ ـ انــواع وابستگیهــای منفـی و روابــط بین آنهـــا

۱ ـ ۱ وابستگـی مـربعـــی

<u>تعـریـف ۱ ـ ۱ ـ ۱</u>

زوج تصـادفـی (X, Y) رابطور منفی وابسته مربعـی NQD گوئیم اگر

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y] \qquad \forall x, y \in R \qquad (۱ - ۱)$$

وابستگی اکید هست اگر نامساوی فوق لااقل برای یک زوج (x, y) برقرار باشد .

یک مجموعه از متغیرهای تصادفی دوبدو بطور منفی وابسته اند اگر هـر زوج از متغیرهای تصادفی آن مجموعه در تعریف (۱ ـ ۱ ـ ۱) صدق کنـد .

خانواده تمام توزیعهـایی که در نامساوی (۱ ـ ۱) صـدق می کنند را بـه $\mathcal{G}_1$ نشـــــان می دهیـم .

<u>تعـریـف ۱ ـ۱ ـ ۲</u> زوج تصادفی (X, Y) را بطور مثبت وابسته (PQD) گوئیم اگر

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y] \qquad \forall x, y \in R \qquad (۲ - ۱)$$

خانواده تمام توزیعهـایی که در نامساوی (۲.۱) صدق می کنند را به $\mathcal{F}_1$ نشان می دهیـم .

لـم : ۱ ـ ۱ ـ ۱

* الف) درنـامسا وی (۱ ـ ۱) هر کدام از نامساویهای ($Y\le y$ یا $X\le x$) را بطور متناظر می توان با ($Y<y$ یا $X<x$) جایگزین کرد.

ب) هرگاه نامساوی (۱ ـ ۱) برقرار باشد هریک از نامساویهای زیر را می توان نتیجه گرفت

(۱ ـ اَ) $$P[X\le x, Y\ge y] \ge P[X\le x]\cdot P[Y\ge y]$$

(۱ ـ اً) $$P[X\ge x, Y\le y] \ge P[X\ge x]\cdot P[Y\le y]$$

(۱ ـ اًً) $$P[X\ge x, Y\ge y] \le P[X\ge x]P[Y\ge y]$$

ج) $$(X,Y)\in \mathcal{F}_1 \iff (X,-Y)\in \mathcal{G}_1$$

اثبات :

الف) فرض کنید $(X,Y)\in \mathcal{G}_1$ و نامساوی (۱ ـ ۱) برقرار است آنگاه داریم :

$$P[X<x, Y\le y]=P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\le x-1/n, Y\le y)\right]=P\left[\lim_n (X\le x-1/n, Y\le y)\right]$$
$$=\lim_n P[X\le x-1/n, Y\le y]\le \lim_n P[X\le x-1/n\cdot Y\le y]=$$
$$P\left[\lim_n (X\le x-1/n)\right]\cdot P[Y\le y]=P[X<x]\cdot P[Y\le y]$$

درنتیجه

$$P[X<x, Y\le y]\le P[X<x]\cdot P[Y\le y] \quad \forall x, y\in R$$

دراثبات از اینکه دنباله پیشامدهای

$$B_n=[X\le x-1/n, Y\le y] \qquad A_n=[X\le x-1/n]$$

دنباله های صعودی برحسب n هستند استفاده کرده ایم و بنابه صعودی بودن دنباله های فوق داریم ،

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad , \quad \lim_n B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

با استدلالی مشابه استدلال فوق می توان ثابت کرد که :

$$P[X\le x, Y<y] \le P[X\le x]\cdot P[Y<y]$$

$$P[X<x, Y<y] \le P[X<x]\cdot P[Y<y] \qquad \forall x,y\in R$$

ب) بنابه فرض داریم $(X,Y)\in$ [illegible] درنتیجه

$$P[X\le x, Y\ge y] = P[X\le x] - P[X\le x, Y<y] \tag{1-آ}$$

$$\ge P[X\le x] - P[X\le x]\cdot P[Y<y] = P[X\le x](1-P[Y<y])$$

$$= P[X\le x]\cdot P[Y\ge y]$$

درنتیجه

$$P[X\le x, Y\ge y] \ge P[X\le x]\cdot P[Y\ge y] \quad \forall x,y\in R$$

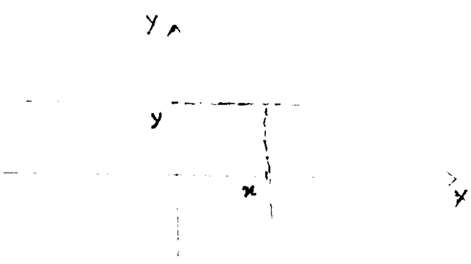
$$P[X\ge x, Y\le y] = P[Y\le y] - P[X<x, Y\le y] \ge \tag{1-آ}$$

$$P[Y\le y](1-P[X<x]) = P[X\ge x]\cdot P[Y\le y]$$

درنتیجه

$$P[X\ge x, Y\le y] \ge P[X\ge x]\cdot P[Y\le y] \qquad \forall x,y\in R$$

باتوجه به نمودار زیر اثباتهای فوق واضح است .



$R_1=[X\le x]$, $R_2=[X\le x, Y\le y]$

$R_3=[X\le x, Y\ge y]$, $R_4=[X\ge x, Y\le y]$

$R_5=[Y\le y]$

نمودار (۱)

درنتیجه $R_3 = R_1 - R_2 \, , \quad R_4 = R_1 - R_2$

(آ ـ ۱) $P[X \geq x , Y \geq y] = 1 - P[X < x \cup Y < y] =$

$1 - P[X<x] - P[Y<y] + P[X<x , Y<y] \leq P[X \geq x] - P[Y<y] + P[X<x] \cdot P[Y<y]$

$= P[X \geq x] - P[Y<y](1 - P[X<x]) = P[X \geq x](1 - P[Y<y])$

$= P[X \geq x] \cdot P[Y \geq y]$

درنتیجه

$P[X \geq x , Y \geq y] \leq P[X \geq x] \cdot P[Y \geq y] \qquad \forall x , y \in R$

ج) فرض کنید $(X,Y) \in \mathcal{F}_1$ آنگاه داریم

$P[X \leq x , Y \leq y] \geq P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y] \qquad \forall x , y \in R$

درنتیجه

$P[X \leq x , -Y \leq y] = P[X \leq x , Y \geq -y] = P[X \leq x] - P[X \leq x , Y < -y]$

$\leq P[X \leq x] - P[X \leq x] \cdot P[Y < -y] = P[X \leq x] P[-Y \leq y]$

درنتیجه

$P[X \leq x , -Y \leq y] \leq P[X \leq x] \cdot P[-Y \leq y] \qquad \forall x , y \in R$

درنتیجه

$(X , -Y) \in \mathcal{C}_1$

برعکس : فرض کنیم $(X,-Y)\in \mathcal{C}_q$ آنگاه داریم .

$$P[X\le x, -Y\le y] \le P[X\le x]\cdot P[-Y\le y] \quad \forall x, y\in R$$

درنتیجه

$$P[X\le x, Y\le -y] = P[X\le x] - P[X\le x ,\ Y > -y] \geq$$
$$P[X\le x] - P[X\le x]\, P[-Y< y] = P[X\le x]\,(1-P[-Y<y])$$

$$= P[X\le x]\, P[-Y\ge y] = P[X\le x]\, P[Y\le -y]$$

درنتیجه

$$P[X\le x, Y\le y'] \geq P[X\le x]\, P[Y\le y'] \quad \forall x, y\in R ,\ y'=-y$$

درنتیجه

$$(X,Y)\in \mathcal{F}$$

* **قضیه 1.1.1** هرگاه $(X,Y)\in \mathcal{C}_q$ ، f, g توابع حقیقی غیر نزولی (غیر صعودی) باشند آنگاه

$$(f(X), g(Y)) \in \mathcal{C}_q$$

اثبات :

ابتدا فرض می کنیم f و g غیر نزولی باشند .چون f و g غیر نزولی هستند بنابه قضیه ای در آنالیز حقیقی اندازه پذیر هستند و چون $(-\infty,\alpha]$ به ازای هر $\alpha\in R$ یک مجموعه بورل هست آنگاه بنابه قضیه ای در آنالیز حقیقی $f^{-1}(-\infty,\alpha]$ و $g^{-1}(-\infty,\alpha]$ نیز یک مجموعه بورل بصورت $(-\infty,t)$ یا $(-\infty,t]$ می باشند درنتیجه برای اثبات قضیه داریم ،

$$(X,Y) \in \mathcal{G}_1 \Rightarrow \forall x,y \in R \Rightarrow P[X \le x, Y \le y] \le P[X \le x] \cdot P[Y \le y]$$

$$\Rightarrow P[f(X) \le x, g(Y) \le y] = P[f(X) \in (-\infty, x], g(Y) \in (-\infty, y]]$$

$$= P[X \in f^{-1}(-\infty, x], Y \in g^{-1}(-\infty, y]] \le$$

$$P[X \in f^{-1}(-\infty, x]] \cdot P[Y \in g^{-1}(-\infty, y]] = P[f(X) \le x] \cdot P[g(Y) \le y]$$

درنتیجه

$$P[f(X) \le x \cdot g(Y) \le y] \le P[f(X) \le x] \cdot P[g(Y) \le y] \quad \forall x,y \in R$$

درنتیجه

$$(f(X), g(Y)) \in \mathcal{G}_1$$

حال اگر f و g غیر صعودی باشند آنگاه $-f$ و $-g$ غیر نزولی هستند و داریم

$$P[f(X) \le -x, g(Y) \le -y] = P[-f(X) \ge x, -g(Y) \ge y] \quad \forall x,y \in R.$$

درنتیجه

$$P[-f(X) \ge x, -g(Y) \ge y] \le P[-f(X) \ge x] \cdot P[-g(Y) \ge y]$$

$$= P[f(X) \le -x] \cdot P[g(Y) \le -y]$$

درنتیجه

$$P[f(X) \le x', g(Y) \le y'] \le P[f(X) \le x'] \, P[g(Y) \le y']$$

$$\forall x,y \in R, \quad x' = -x, \quad y' = -y$$

پس

اگر f و g غیر صعودی باشند $\quad (f(X), g(Y)) \in \mathcal{C}_1$

یک کلاس مهم از توزیعهای NQD و PQD از قضیه بدست می آید .