دانشگاه سیستان وبلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

زنجیرها در فضاهای مرتب خطی توپولوژیک

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:
زینب حشمتی

شهریور ۱۳۹۰

چکیده

در پی شرایطی روی فضاهای مرتب خطی هستیم که تحت آن زنجیر ماکسیمال L دارای عضو ماکسیمال (مینیمال) باشد و همچنین شرایط لازم و کافی را روی فضاهای مرتب خطی توپولوژیک ارائه می‌دهیم که Hـ بسته شود. اگر فضای مرتب خطی توپولوژیک بطورمنظم خطی باشد شرط کافی به وجود می‌آید.

مقدمه

در اصل کلمه توپولوژی از ترکیب دو کلمه یونانی **توپوس**[۱]، به معنی جا و مکان، و **لوگوس**[۲]، به معنی مطالعه حاصل شده است. از جنبه تاریخی توپولوژی در سال ۱۸۴۷ توسط **لیستینگ**[۳] یکی از شاگردان گاوس معرفی شد.

توپولوژی در دو زمینه به کلی متمایز بسط و توسعه یافت: توپولوژی مجموعه ـنقطه‌ای، یا توپولوژی عمومی، نظریه مجرد عام پیوستگی توابع تعریف شده بر مجموعه‌های کلی است. **هاسدورف**[۴] در ۱۹۱۲ مفاهیم حد و پیوستگی را از مجموعه‌های اعداد حقیقی به مجموعه‌های مجرد با استفاده از مفهوم همسایگی یک نقطه، تعمیم داد. زمینه دوم، در واقع یک دهه قبل از توپولوژی عمومی شروع شده بود، مطالعه نظام یافته توپولوژی جبری یا به عبارتی آنالیز وضع بود. گروه‌های توپولوژیک مجرد برای اولین بار توسط **اشریر**[5] در سال ۱۹۲۶ معرفی گردید. در سال‌های اخیر ریاضی‌دانانی چون **گوتیک**[6] و همکارانش در پی گسترش مفهوم فشرده و دسته‌بندی نیم‌گروه‌ها و فضاهای توپولوژیک با استفاده از مفهوم Hـ بسته و خواص حاصل از آن می‌باشند.

در فصل‌های اول و دوم این پایان‌نامه تعاریف وقضایای مقدماتی را مطالعه می‌کنیم. در فصل سوم مفاهیم Hـ بسته، بطورمطلق Hـ بسته، hـ بسته جبری را بیان می‌کنیم. **جی.دبلیو.استپ**[۷] ثابت کرده که نیم‌شبکه E بطورمطلق Hـ بسته است اگروتنهااگر هر زنجیر ماکسیمال در E متناهی باشد. در این فصل به این سؤال که آیا هر نیم‌شبکه توپولوژیک Hـ بسته، بطورمطلق Hـ بسته است؟ پاسخ می‌دهیم. همچنین شرایط کافی روی یک نیم‌شبکه توپولوژیک بطورخطی مرتب قرار می‌دهیم تا Hـ بسته شود. در پایان این فصل نشان می‌دهیم که هر نیم‌شبکه بطورخطی مرتب یک زیرنیم‌شبکه چگال از یک نیم‌شبکه توپولوژیک Hـ بسته است. در فصل چهارم به هدف اصلی پایان‌نامه می‌پردازیم. فصل سوم حالت خاص این فصل می‌باشد. شرایط

---

[۱] $\tau o \pi o \varsigma$

[۲] $\lambda o \nu o \tau \alpha$

[۳] Listing. J. B

[۴] Hausdorff

[۵] Schreier

[۶] Gutik. O

[۷] $J.W.stepp$

کافی را روی زنجیر ماکسیمال L در یک فضای بطورخطی مرتب توپولوژیک قرار می‌دهیم تا دارای عضو ماکسیمال شود. ثابت می‌کنیم که یک نیم‌شبکه توپولوژیک H_ بسته بطورخطی مرتب یک فضای بطور خطی مرتب توپولوژیک H_ بسته است و اینکه در حالت کلی این گفته برقرار نیست. در پایان با آوردن مثالی از یک فضای جزئاً مرتب توپولوژیک H_ بسته و یک زنجیر ماکسیمال ناH_ بسته، شرایط کافی را که یک زنجیر ماکسیمال از یک فضای جزئاً مرتب توپولوژیک H_ بسته، یک فضای جزئاً مرتب توپولوژیک H_ بسته شود را ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل با تعاریف و مفاهیم اولیه از توپولوژی که در طول پایان‌نامه لازم و در فصل‌های بعد مورد استفاده است، آشنا می‌شویم. همچنین اشاره‌ای به اصول جداسازی و شمارایی از توپولوژی عمومی خواهیم داشت.

در این پایان نامه بستار توپولوژی مجموعه‌ها را با $cl_X(A)$ نمایش می‌دهیم که در آن A زیرمجموعه فضای توپولوژیک X است.

۱ــ۱ فضای چگال و هیچ‌جا چگال

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.

(۱) مجموعه $Y \subseteq X$ را در X چگال می‌گوییم، هرگاه $cl_X(Y) = X$.

(۲) مجموعه $Y \subseteq X$ هم‌چگال در X گفته می‌شود، اگر $X \setminus Y$ در X چگال باشد.

(۳) مجموعه $Y \subseteq X$ را هیچ‌جاچگال در X گوییم، در صورتی که $cl_X(Y)$ در X هم‌چگال باشد.

۱ــ۲ اصول شمارایی

اصول زیر به اصول شمارایی معروفند:

تعریف ۱.۲.۱. فضای X را لیندلوف [۱] گوییم، هرگاه هر پوشش باز X دارای یک زیرپوشش شمارا باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فضای توپولوژیک X را شمارای نوع اول گوییم، هرگاه هر نقطه آن یک پایه شمارا داشته باشد.

---

[۱] Lindeloff

تعریف ۳.۲.۱. فضای X را شمارای نوع دوم گوییم، هرگاه دارای یک پایه شمارا باشد.

قضیه ۴.۲.۱([۱۸]). زیرفضای یک فضای شمارای نوع اول، شمارای نوع اول و حاصل‌ضرب شمارا از فضاهای شمارای نوع اول، شمارای نوع اول است. همچنین زیرفضای یک فضای شمارای نوع دوم، شمارای نوع دوم است و حاصل‌ضرب شمارا از فضاهای شمارای نوع دوم، شمارای نوع دوم است.
توجه کنید زیرفضای یک فضای لیندلوف و حاصل‌ضرب فضاهای لیندلوف، لزوماً لیندلوف نیست.

۱—۳ اصول جداسازی

تعریف ۱.۳.۱. فضای توپولوژیک X را فضای T_0 گوییم، هرگاه برای هر جفت از نقاط مجزای $x_1, x_2 \in X$، مجموعه‌ای باز شامل یکی از نقاط موجود باشد که شامل دیگری نیست.

تعریف ۲.۳.۱. فضای توپولوژیک X را یک فضای T_1 نامیم، هرگاه برای هر جفت از نقاط مجزای $x_1, x_2 \in X$، برای هر نقطه مجموعه‌ای باز شامل آن نقطه موجود باشد که شامل دیگری نباشد. به عبارت دیگر برای هر $x \in X$ در فضای T_1، $\{x\}$ در X بسته است.

به وضوح هر فضای T_1 یک فضای T_0 است.

تعریف ۳.۳.۱. فضای توپولوژیک X را یک فضای T_2 یا یک فضای هاسدورف نامیم، هرگاه برای هر جفت نقطه مجزا در X، چون x_1, x_2، مجموعه‌های باز مجزای U_1, U_2 به ترتیب از نقاط x_1, x_2 موجود باشند.

قضیه ۴.۳.۱([۱۲]). در فضاهای T_2، حد یکتا است.

به وضوح هر فضای $T_۲$ یک فضای $T_۱$ است.

تعریف ۵.۳.۱. فضای توپولوژیک X را یک فضای $T_۳$ یا یک فضای منظم نامیم، هرگاه X یک فضای $T_۱$ باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه بسته $F \subset X$ که $x \notin F$، مجموعه‌های باز مجزای $x \ni U_۱$ و $F \subset U_۲$ موجود باشند. لذا هر فضای منظم یک فضای هاسدورف است.

قضیه ۶.۳.۱([۱۲]). فضای $T_۱$، X را یک فضای منظم نامیم اگروتنهااگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی V از x، همسایگی $x \ni U$ بطوریکه $cl_X(U) \subset V$ موجود باشد.

تعریف ۷.۳.۱. فضای توپولوژیک X را یک فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ یا یک فضای تیخونوف یا یک فضای کاملاً منظم نامیم، هرگاه X یک فضای $T_۱$ باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه بسته $F \subset X$ که $x \notin F$، تابع پیوسته $f : X \to I = [۰, ۱]$ موجود باشد بطوریکه $f(x) = ۰$ و برای $y \in F$، $f(y) = ۱$.
با توجه به تعریف هر فضای کاملاً منظم یک فضای منظم است.

قضیه ۸.۳.۱([۱۲]). برای $i \leq ۳\frac{۱}{۲}$ هر زیر فضای یک فضای T_i ، یک فضای T_i است.

تعریف ۹.۳.۱. فضای توپولوژیک X را یک فضای $T_۴$ یایک فضای نرمال گوییم، هرگاه X یک فضای $T_۱$ باشد و برای هر جفت زیرمجموعه مجزای بسته $A, B \subset X$، مجموعه‌های باز مجزای $A \subset U$ و $B \subset V$ موجود باشند. با توجه این تعریف هر فضای نرمال یک فضای تیخونوف است.

اکنون یکی از قضایای اساسی را بیان می‌کنیم:

لم ۱۰.۳.۱([۱۲]). (لم اوریسون[۲]) **برای هر جفت زیرمجموعه بسته و مجزای A, B از فضای نرمال X،**

[۲] Urysohn

تابع پیوسته $f: X \to I$ بطوریکه برای $x \in A$، $f(x) = ۰$ و برای $y \in B$، $f(y) = ۱$ موجود است.

۱ـــ۴ فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱.۴.۱. اگر برای هر نقطه x از فضای توپولوژیک X، $\mathcal{B}(x)$ پایه توپولوژی در نقطه x باشد، آنگاه خانواده $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ یک مجموعه همسایگی برای فضای توپولوژیک (X, τ) نامیده می‌شود. هر مجموعه همسایگی فضای توپولوژیک (X, τ) در شرایط زیر صدق می‌کند وبرعکس

(۱) برای هر $x \in X$، $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ و برای هر $U \in \mathcal{B}(x)$، $x \in U$.($BP(۱)$)

(۲) اگر $x \in U \in \mathcal{B}(x)$، آنگاه $V \in \mathcal{B}(x)$ موجود باشد بطوریکه $V \subset U$.($BP(۲)$)

(۳) برای هر $U_۱, U_۲ \in \mathcal{B}(x)$، $U \in \mathcal{B}(x)$ چنان که $U \subset U_۱ \cap U_۲$ موجود باشد. ($BP(۳)$)

تعریف ۲.۴.۱. اگر $\tau_۱$ و $\tau_۲$ دو توپولوژی روی مجموعه X باشند و $\tau_۲ \subset \tau_۱$ باشد، آنگاه توپولوژی $\tau_۱$ را ظریفتر از توپولوژی $\tau_۲$ گوییم.

ظریف‌ترین توپولوژی روی مجموعه X توپولوژی گسسته(شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعه X) می‌باشد.

قضیه ۳.۴.۱([۱۲]). فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. آنگاه در مورد نگاشت $f: X \longrightarrow Y$ گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) f نگاشتی پیوسته است.

(۲) تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y، مجموعه‌ای باز در X است.

(۳) تصویر معکوس هر مجموعه بسته در Y، مجموعه‌ای بسته در X است.

(۴) به ازای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم:

$$f(cl_X(A)) \subseteq cl_Y(f(A)).$$

(۵) به ازای هر $B \subseteq Y$ داشته باشیم:

$$cl_X(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl_Y(B)).$$

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید مجموعه X همراه با ترتیب $\leq$ یک مجموعه مرتب باشد. برای هر $x \in X$، $L(x) = \{y \in X \mid y \leq x\}$ قرار دهید. توپولوژی چپ القایی روی X توسط $\leq$، توپولوژی تولیدشده توسط مجموعه همسایگی $\{\{L(x)\}\}_{x\in X}$ است.

بطورمشابه توپولوژی راست القایی تعریف می‌شود.

قضیه ۵.۴.۱. فرض کنید X یک فضای T_0 با این خاصیت باشد که مقطع هر خانواده از مجموعه‌های باز در X، مجموعه‌ای باز باشد. آنگاه ترتیب $\leq$ روی X چنان موجود است که توپولوژی چپ القایی توسط $\leq$ با توپولوژی اولیه روی X منطبق است.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنید X یک خانواده بطورخطی مرتب توسط $<$ و حداقل شامل دو عضو باشد. برای $a, b \in X$ که $a < b$ مجموعه‌های زیر را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\uparrow a = \{x \in X \mid a < x\},$$

$$\downarrow a = \{x \in X \mid x < a\},$$

$$(a,b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$$

مجموعه‌های تعریف‌شده در X، بازه نامیده می‌شود.

خانواده تمام بازه‌ها در مجموعه بطورخطی مرتب X، تشکیل یک پایه برای X می‌دهد.

توپولوژی القایی توسط ترتیب خطی $>$ روی X، توپولوژی تولیدشده توسط خانواده تمام بازه‌های آن است. یک فضا که توپولوژی روی آن می‌تواند توسط یک ترتیب خطی القا شود را یک فضای بطورخطی مرتب می‌نامیم.

توجه کنید که هر فضای بطورخطی مرتب یک فضای T_1 است.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $Y \subset X$. آنگاه مجموعه تمام $Y \cap U$ هایی که U زیرمجموعه‌ای باز در X است، تشکیل یک پایه برای توپولوژی روی Y می‌دهد که توپولوژی زیر فضایی (القایی) نام دارد.

تعریف ۸.۴.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و E یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد. مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی E را با X/E نمایش می‌دهیم. نگاشت پیوسته $\pi : X \to X/E$، روی X/E توپولوژی خارج‌قسمتی را القا می‌کند به این ترتیب که U زیرمجموعه‌ای باز در X/E است اگروتنهااگر $\pi^{-1}(U)$ زیرمجموعه‌ای باز در X باشد. فضای X/E همراه با این توپولوژی را فضای خارج‌قسمتی می‌نامیم. π نگاشت خارج‌قسمتی نام دارد.

قضیه ۹.۴.۱([۱۲]). زیرمجموعه A در فضای خارج‌قسمتی X/E بسته است اگروتنهااگر $\pi^{-1}(A)$ در فضای توپولوژیک X بسته باشد.

یادآور می‌شویم که فضای توپولوژیک X یک فضای فشرده است اگر هر پوشش باز X دارای زیرپوشش متناهی باشد.

قضیه ۱۰.۴.۱([۱۲]). زیرفضای فشرده از فضای هاسدورف X، یک زیرفضای بسته از X

است.

تعریف ۱۱.۴.۱. فضای توپولوژیک هاسدورف X را که هر پوشش باز شمارای آن دارای زیرپوشش متناهی است را فضای فشرده شمارش‌پذیر گوییم.

تعریف ۱۲.۴.۱. فضای توپولوژیک X را که برای هر $x \in X$ همسایگی U از x چنان موجود باشد که $cl_X(U)$ یک زیرفضای فشرده در X باشد، فضای موضعاً فشرده نامیم.

تعریف ۱۳.۴.۱. فضای هاسدرف X را فشرده دنباله‌ای گوییم، هر گاه هر دنباله از نقاط X، دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

قضیه ۱۴.۴.۱ ([۱۲]). هر فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده‌شمارایی است.

قضیه ۱۵.۴.۱ ([۱۲]). هر زیرفضای بسته از فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده دنباله‌ای است.

قضیه ۱۶.۴.۱ ([۱۲]). هر فضای فشرده یک فضای نرمال است.

قضیه ۱۷.۴.۱ ([۱۲]). هر فضای موضعاً فشرده یک فضای تیخونوف می‌باشد.

یادآور می‌شویم که حاصل‌ضرب یک فضای فشرده در یک فضای فشرده شمارش‌پذیر یک فضای فشرده شمارش‌پذیر است.

تعریف ۱.۴.۱۸. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده باشد. برای فشرده‌سازی X عنصری خارج از مجموعه X را انتخاب و به آن می‌افزاییم. این عنصر را معمولاً با نماد ∞ نشان می‌دهیم. در این‌صورت قرار می‌دهیم:

$$X_\infty = X \cup \{\infty\}, \infty \notin X.$$

برای مجموعه X_∞، توپولوژی τ_∞، عبارتست از τ و اجتماع همسایگی‌هایی از ∞ چون U، به طوریکه $X_\infty \setminus U$ در X فشرده باشد.

قضیه ۱.۴.۱۹([۱۲]). هرگاه (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. آنگاه $X^* = X \cup \{\alpha\}$ که $\alpha \notin X$، همراه با

$\tau^* = \tau \cup \{X^* \setminus K \mid$ زیرمجموعه‌ای بسته و فشرده از X است $K\}$

یک فضای توپولوژیک فشرده است که فضای فشرده‌ساز نقطه‌ای الکساندروف [۳] نام دارد.

تعریف ۱.۴.۲۰. فضای توپولوژیک X را یک فضای همبند نامیم اگروتنهااگر X به صورت اجتماعی از زیرمجموعه‌های ناتهی بسته از هم جدای X نباشد.

تعریف ۱.۴.۲۱. شبه‌مؤلفه یک نقطه x در فضای توپولوژیک X، مقطع تمام زیرمجموعه‌های باز و بسته از X و شامل نقطه x می‌باشد.

تعریف ۱.۴.۲۲. فضای توپولوژیک X را که شبه‌مؤلفه‌های هر نقطه $x \in X$ شامل تک نقطه x باشد را یک فضای کلاً ناهمبند گوییم.

---
[۳] Alexandroff

تعریف ۲۳.۴.۱. فضای توپولوژیک X را که یک فضای T_1 ناتهی و دارای یک پایه از مجموعه‌های باز و بسته است را یک فضای توپولوژیک صفر- بعدی می‌نامیم.

به وضوح هر فضای صفر- بعدی یک فضای تیخونوف است و هر فضای صفر- بعدی کلاً ناهمبند است.

لم ۲۴.۴.۱([۱۲]). اگر فضای توپولوژیک X شامل یک زیرفضای چگال همبند باشد، آنگاه X همبند است.

لم ۲۵.۴.۱([۴]). هر فضای توپولوژیک هاسدورف لزوماً کلاً ناهمبند است. فضای موضعاً فشرده هاسدورف، صفر- بعدی است اگروتنهااگر کلاً ناهمبند باشد.

تعریف ۲۶.۴.۱. فضای توپولوژیک X را که هر زیرمجموعه ناتهی آن شامل یک نقطه تنها است، یک فضای توپولوژیک پراکنده می‌نامیم.

لم ۲۷.۴.۱([۱۲]). هر فضای پراکنده فشرده، یک فضای صفر- بعدی است(دارای یک پایه از مجموعه‌های باز و بسته است).

فصل ۲

نیم‌گروه‌ها و نیم‌شبکه‌های توپولوژیک

۲−۱ نیم‌گروه

تعریف ۱.۱.۲. یک نیم‌گروه جفت $(S, .)$ می‌باشد، که در آن S یک مجموعه ناتهی و "$.$" یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر می‌باشد، بطوریکه $. : S \times S \longrightarrow S$ و $(s,t) \longrightarrow s.t$، شرکت‌پذیری در آن، یعنی به‌ازای هر $r, s, t \in S$ داشته باشیم: $r.(s.t) = (r.s).t$

هر زیرمجموعه از S که همراه با عمل نیم‌گروه خود یک نیم‌گروه باشد، یک زیرنیم‌گروه از S است. مجموعه عناصر نیم‌گروه را که دارای خاصیت جابجایی هستند$(x.y = y.x)$ را با $Z(S)$، یعنی مرکز نیم‌گروه نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۲. برای هر عضو t از نیم‌گروه S، $\rho_t : S \to S$ و $\lambda_t : S \to S$ را به ترتیب انتقال راست و انتقال چپ S می‌نامیم بطوریکه برای هر $s \in S$، $\rho_t(s) = st$ و $\lambda_t(s) = ts$.

تعریف ۳.۱.۲. نگاشت $\theta : S \to T$، از نیم‌گروه S به توی نیم‌گروه T را یک همریختی نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in S$، $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$. یک همریختی یک به یک را یک تکریختی و یک همریختی یک به یک و پوشا را یک یکریختی می‌نامیم.

به عنوان مثال نگاشت $s \to \lambda_s$ از نیم‌گروه S به نیم‌گروه تمام نگاشت‌های S، یک همریختی می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه R روی X را که دارای خواص بازتابی، متقارن، تعدی است، یک رابطه هم‌ارزی روی X نامیم.

تعریف ۵.۱.۲. به رابطه هم‌ارزی R روی نیم‌گروه S یک هم‌نهشتی گوییم، هرگاه برای $(s,t) \in R$ و $u \in S$ داشته باشیم: $(us,ut),(su,tu) \in R$.

هرگاه R یک هم‌نهشتی روی نیم‌گروه S و $\pi(s)$ نمایش رده‌های هم‌ارزی شامل s باشد، آنگاه

$$S/R = \{\pi(s) \ | \ s \in S\}.$$

حال ضرب در S/R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi(s).\pi(t) = \pi(st).$$

آنگاه S/R یک نیم‌گروه است و $\pi : S \to S/R$ یک همریختی است.

۲—۲ نیم‌گروه توپولوژیک

تعریف ۱.۲.۲. نیم‌گروه S راهمراه با یک توپولوژی فرض کنید. S را یک

(۱) نیم‌گروه توپولوژیک راست(چپ) گوییم، هرگاه برای هر $s \in S$، $\rho_s : S \to S$ ($\lambda_s : S \to S$) پیوسته باشد.

(۲) نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک گوییم، هرگاه برای هر $s \in S$، $\rho_s : S \to S$ و $\lambda_s : S \to S$ پیوسته باشند.

(۳) نیم‌گروه توپولوژیک گوییم، هرگاه $. : S \times S \to S$ که $(s,t) \to st$، پیوسته باشد.

(۴) گروه توپولوژیک راست(چپ) گوییم، هرگاه S یک گروه و یک نیم‌گروه توپولوژیک راست(چپ) باشد.

(۵) گروه نیم‌توپولوژیک گوییم، هرگاه S یک گروه و یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک باشد.

(٦) گروه توپولوژیک نامیم، هرگاه S یک گروه و یک نیم‌گروه توپولوژیک و عمل معکوس از S به توی S که $s \to s^{-1}$، پیوسته باشد.

تعریف ۲.۲.۲. S را یک گروه همراه با یک توپولوژی روی آن فرض کنید. S را گروه

پیراتوپولوژیک گوییم، هرگاه نگاشت ضرب در گروه پیوسته باشد. این معادل است با اینکه اگر x و y را عناصری از S فرض کنید، آنگاه برای هر همسایگی باز دلخواه W از xy در S، همسایگی‌های باز U از x و V از y موجود باشند بطوریکه $UV \subseteq W$.

در تعاریف بالا توجه کنید که هر نیم‌گروه توپولوژیک یک نیم‌گروه توپولوژیک راست و چپ است، زیرا عمل نیم‌گروه را می‌توان به عنوان ضرب از سمت راست یا ضرب از سمت چپ یک عضو در نظر گرفت.
به عنوان مثال از تعاریف بالا می‌توان به مثال زیر توجه کرد:

مثال ۳.۲.۲. مجموعه اعداد حقیقی $(R, +)$ را همراه با توپولوژی متمم متناهی که در آن مجموعه‌های باز، مجموعه‌هایی با متمم متناهی در R می‌باشند، در نظر بگیرید. آنگاه R یک گروه نیم‌توپولوژیک با معکوس پیوسته است. توجه کنید که با این توپولوژی، R هاسدورف و یک نیم‌گروه توپولوژیک نیست.

واضح است که یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک یک نیم‌گروه توپولوژیک راست و چپ است، اما عکس این گفته همواره برقرار نیست. بطور مثال، مجموعه $S = [۰, ۱]$ همراه با توپولوژی القایی از مجموعه اعداد حقیقی و عمل زیر در نظر بگیرید:

$$s.t = \begin{cases} t & ۰ \leq t < \frac{۱}{۲} \\ ۱ & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

آنگاه S یک نیم‌گروه توپولوژیک راست است اما یک نیم‌گروه توپولوژیک چپ نیست، لذا یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک نمی‌باشد.
برای اثبات ادعای اول(S یک نیم‌گروه توپولوژیک راست)، برای هر $t \in S$، انتقال راست S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: