



پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی برق

(گرایش کنترل)

سنکرون سازی دو سیستم آشوب مرتبه کسری با عدم قطعیت و اغتشاش

دانشجو: سمیرا رفیعی

اساتید راهنما: جناب آقای دکتر پریز و جناب آقای دکتر وحیدیان کامیاد

بهمن ۱۳۸۸

چکیده:

عبارت کنترل آشوب عموماً به زمینه ای در مطالعات علمی اشاره دارد که واسط بین تئوری کنترل و تئوری دینامیک سیستمها بوده و به مطالعه روش کنترل سیستمهای معین می پردازد که دارای رفتارنامنظم و آشوبگرانه باشند. تعاریف ریاضی متفاوتی از آشوب بیان شده است اما همگی آنها در واقع بیشتر بیان کننده حساسیت بیش از حد سیستم (Super Sensitivity) نسبت به شرایط اولیه می باشند و می گویند که مسیرهای حالت سیستم در مسافت کوتاهی واگرا می شوند و پیش بینی رفتار دراز مدت سیستم غیر ممکن است و این در حالیست که مسیرهای حالت سیستم محدود باقی می مانند. در این پایان نامه قصد داریم دو سیستم مرتبه کسری آشوب با در نظر گرفتن عدم قطعیت و نویز را سنکرون کنیم. به همین منظور در فصل اول به معرفی اپراتورها و توابع اولیه مرتبه کسری می پردازیم و در فصل بعد مفهوم هندسی و فیزیکی این اپراتورها را ارائه می کنیم. در فصل سوم این پایان نامه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری و برخی قضایای وجود و یکتایی جواب آورده شده و در فصل چهارم پایداری سیستمهای مرتبه کسری ارائه شده است. از آنجا که کنترلرهای مرتبه کسری توجه زیادی را به خود جلب کرده است در فصل پنجم طراحی یک کنترلر مرتبه کسری با استفاده از الگوریتم تکامل تفاضلی (الگوریتم تکامل تفاضلی اخیراً به عنوان روشی ساده و کارآمد در حل مسایل بهینه سازی سراسری در فضای پیوسته عمومیت یافته است. این الگوریتم در مقایسه با بسیاری از الگوریتمهای تکاملی مانند PSO در حل مسایل محک (Bench mark) و مسایل جهان واقعی بهتر عمل کرده است.) برای یک سیستم نمونه انجام و نتایج حاصله با نتایج به دست آمده از الگوریتم ژنتیک مقایسه شده است .

در فصل ششم مختصری در خصوص سیستمهای آشوب و کاربردهای آن در سیستمهای مختلف اشاره شده است و سپس از کنترل مود لغزشی برای سنکرون سازی سیستمهای آشوب با در نظر گرفتن نویز و عدم قطعیت استفاده می کنیم. کنترل لغزشی نشان داده است که توانایی رسیدن به عملکرد مطلوب را با وجود عدم قطعیت در پارامترهای سیستم و نیز وجود منابع نویز خارجی داراست و از آنجا که در این روش کنترلی، درگیر انتخاب پارامترهای زیاد کنترلی برای سنکرون سازی بهتر هستیم لذا از یک روش ابداعی که ما آن را back-stepping sliding mode نام نهادیم استفاده میکنیم نتایج شبیه سازی نشان می دهد که این روش سنکرون سازی به خوبی روش کنترل مود لغزشی بوده و حتی مجموع مربعات خطا را نیز بهبود بخشیده است بدون آنکه درگیر انتخاب پارامترهای کنترلی زیادی باشیم.

فهرست مطالب

.....چکیده	
۱- فصل اول	۱
۱-۱ مقدمه	۱
۲-۱ تاریخچه و پیش زمینه ریاضی	۱
۳-۱ توابع اولیه اپراتورهای مرتبه کسری	۳
۱-۳-۱ تابع گاما	۳
۲-۳-۱ تابع بتا	۴
۳-۳-۱ تابع میتاگ-فلر	۴
۴-۱ انتگرال و مشتق از مرتبه کسری	۵
۱-۴-۱ انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل	۵
۲-۴-۱ انتگرال و مشتق مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکیف	۷
۳-۴-۱ تبدیل لاپلاس و کانولوشن	۸
۲- فصل دوم	۹
۱-۲ مقدمه	۹
۲-۲ مفهوم هندسی اپراتور مرتبه کسری	۹
۳-۲ مفهوم فیزیکی اپراتور مرتبه کسری	۱۱
۴-۲ رفتار کسری در پدیده های علوم و مهندسی	۱۵
۱-۴-۲ سیستمهای دینامیکی مرتبه کسری در تئوری کنترل	۱۵
۲-۴-۲ مدارهای الکتریکی	۱۶
۳-۴-۲ مقسم ولتاژ تعمیم یافته	۱۷
۴-۴-۲ محاسبات کسری در ویسکوالاستیسیته	۱۸
۵-۴-۲ چند قطبهای مرتبه کسری در الکترومغناطیس	۲۰
۳- فصل سوم	۲۱
۱-۳ مقدمه	۲۱
۲-۳ آنالیز معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری	۲۱
۳-۳ وجود و یکتایی پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه کسری	۲۲

۲۵	فصل چهارم.....	۴-
۲۵	۱-۴ مقدمه	
۲۵	۲-۴ مدل‌های متفاوت برای سیستم مرتبه کسری خطی.....	
۲۷	۳-۴ پایداری سیستمهای مرتبه کسری خطی	
۲۷	۱-۳-۴ روش مستقیم	
۲۸	۲-۳-۴ تحلیل مقادیر ویژه	
۳۱	۳-۳-۴ کاربرد اصل آرگومان برای مطالعه پایداری سیستمهای مرتبه گویا.....	
۳۲	۴-۴ پایداری سیستمهای مرتبه کسری غیر خطی.....	
۳۲	۱-۴-۴ تحلیل پایداری به روش خطی سازی(لیاپانوف مستقیم).....	
۳۵	فصل پنجم.....	۵-
۳۵	۱-۵ مقدمه	
۳۵	۲-۵ کنترل سرعت سیستم با دو اینرسی	
۳۷	۳-۵ تابع s^α	
۴۱	۴-۵ تقریب مشتق مرتبه کسری و تحقق کنترلر $PI^\lambda D^\mu$	
۴۳	۵-۵ الگوریتم تکامل تفاضلی	
۴۴	۶-۵ استفاده از الگوریتم تکامل تفاضلی در طراحی کنترلر $PI^\lambda D^\mu$	
۴۵	۱-۶-۵ جهش	
۴۶	۲-۶-۵ جابجایی	
۴۶	۳-۶-۵ انتخاب	
۴۶	۷-۵ نتایج شبیه سازی	
۴۹	فصل ششم	۶-
۴۹	۱-۶ مقدمه	
۴۹	۲-۶ سیستمهای آشوبگر	
۵۰	۳-۶ نمونه کاربردهای کنترل آشوب	
۵۰	۱-۳-۶ مهندسی هوافضا	
۵۱	۲-۳-۶ سیستمهای الکتریکی و الکترونیکی.....	

۵۱ ۳-۳-۶ سیستمهای ارتباطی
۵۲ ۴-۶ آشوب در سیستمهای مرتبه کسری
۵۶ ۵-۶ کنترل لغزشی سیستمهای مرتبه کسری
۵۸ ۶-۶ سنکرون سازی سیستم آشوب مرتبه کسری
۵۹ ۱-۶-۶ سنکرون سازی دو سیستم آشوب چن
۶۳ ۲-۶-۶ سنکرون سازی دو سیستم آشوب چن و لورنز
۶۵ ۳-۶-۶ سنکرون سازی دو سیستم آشوب چن و لو
۶۷ ۴-۶-۶ سنکرون سازی دو سیستم آشوب لو و لورنز
۶۹ ۷-۶ سنکرون سازی سیستم آشوب مرتبه کسری با استفاده از Nested Sliding Mode Control
۷۴ ۷- فصل هفتم: نتیجه گیری
۷۵ مراجع

فهرست شکلها

۴.....	شکل (۱-۱) شکل تابع گاما با استفاده از MATLAB
۵.....	شکل (۲-۱) تابع میتاگ - لفلر با استفاده از MATLAB
۱۰.....	شکل (۱-۲) تابع $f(t)$ و تصاویر آن بر صفحات (τ, f) و g, f
۱۱.....	شکل (۲-۲) شکل تابع $g_t(\tau)$ ، محور انتقال $f(t)$ تابع به صفحه g, f
۱۲.....	شکل (۳-۲) محور زمان همگن.....
۱۲.....	شکل (۴-۲) محور زمان ناهمگن (زمان کیهانی).....
۲۹.....	شکل (۱-۴) سطوح ریمانی برای تابع $s^{1/3}$
۳۱.....	شکل (۲-۴) مسیر نایکوئیست سیستم مورد مطالعه.....
۳۶.....	شکل (۱-۵) سیستم چرخشی.....
۳۶.....	شکل (۲-۵) مدل دو اینرسی.....
۳۶.....	شکل (۳-۵) مدل دو اینرسی.....
۳۷.....	شکل (۴-۵) تابع s^α
۳۸.....	شکل (۵-۵) سطح ریمان.....
۳۹.....	شکل (۶-۵) نواحی پایداری.....
۴۰.....	شکل (۷-۵) نمودار بود.....
۴۰.....	شکل (۸-۵) نمودار نیکولز.....
۴۰.....	شکل (۹-۵) نمودار نایکوئیست.....
۴۲.....	شکل (۱۰-۵) نمودار بود s^α با تقریب کرونه $\alpha = .2, .4, .6, .8, 1$
	$\alpha = .4$
۴۲.....	شکل (۱۱-۵) نمودار بود s^α با تقریب کرونه $N = 1, 2, 3, 4, 5, 10$
۴۳.....	شکل (۱۲-۵) نمودار بود $G_c(s) = 1 + s^{-\lambda} + s^\mu, \lambda = \mu = .1, .3, .5, .7, 1$ با تقریب کرونه.....
۴۵.....	شکل (۱۳-۵) جهش در فضای دو بعدی.....
	شکل (۱۴-۵) (الف) پاسخ پله سیستم با کنترلر $PI^\lambda D^\mu$ (ب) پاسخ پله سیستم با کنترلر PID طراحی شده با الگوریتم تکامل
۴۸.....	تفاضلی.....

شکل (۵-۱۵) (الف) پاسخ پله سیستم با کنترلر $PI^\lambda D^\mu$ (ب) پاسخ پله سیستم با کنترلر PID طراحی شده با الگوریتم

۴۸.....GA

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (.9, .9, .9)$$

۵۲..... شکل (۶-۱) رفتار آشوبناک سیستم مرتبه کسری با $(a, b, c, k, h) = (8, 40, 2.5, 1, 4)$

۵۳..... شکل (۶-۲) متغیرهای حالت کنترل شده سیستم آشوب مرتبه کسری.

۵۳..... شکل (۶-۳) رفتار آشوبناک سیستم مرتبه کسری لو.

۵۴..... شکل (۶-۴) متغیرهای حالت کنترل شده سیستم آشوب مرتبه کسری.

۵۴..... شکل (۶-۵) خطای سنکروزاسیون.

۵۵..... شکل (۶-۶) خطای سنکروزاسیون.

۵۶..... شکل (۶-۷) نتایج سنکرون سازی.

شکل (۶-۸) سنکرون سازی کامل دو سیستم چن با شرایط اولیه

$$(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}) = (15, 20, 29), (x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}) = (20, 19, 29)$$

۶۱ و ۶۲..... و پارامترهای $r = 350, p = .5, C = [100, 5, .1], K = [100, 2000, 10]$

شکل (۶-۹) سنکرون سازی کامل دو سیستم چن و لورنز $(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}) = (15, 20, 29)$ $(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}) = (10, 16, 25)$

۶۳ و ۶۴..... و پارامترهای $r = 6000, p = .5, C = [2500, 0.001, 10], K = [500, 70000, 10]$

شکل (۶-۱۰) سنکرون سازی کامل دو سیستم چن و لو $(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}) = (15, 20, 29)$ $(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}) = (10, 15, 25)$ و

۶۵ و ۶۶..... پارامترهای $r = 150, p = .5, C = [100, 5, 10], K = [200, 7000, 10]$

شکل (۶-۱۱) سنکرون سازی کامل دو سیستم لو و لورنز $(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}) = (15, 20, 29)$ $(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}) = (10, 15, 25)$ و

۶۷ و ۶۸..... پارامترهای $r = 3500, p = .2, C = [0.1, 100, 0.1], K = [900, 900, 0.1]$

۷۲ و ۷۳..... شکل (۶-۱۲) شبیه سازی برای دو سیستم چن با عدم قطعیت در ساختار و پارامتر.

فهرست جداول

- جدول (۱-۲) جدول زمان و سرعت متحرک از دید ناظر درون و بیرون متحرک..... ۱۳
- جدول (۱-۵) پارامترهای قابل تنظیم سیستم ۳۷
- جدول (۲-۵) نتایج شبیه سازی ۴۷

۲- فصل اول

۱-۱ مقدمه

کلمه کسری^۱ امروزه در زمینه های زیادی از علوم مختلف عمومیت یافته است مشتقهای کسری در ریاضیات، ابعاد کسری در هندسه، نویز کسری، تبدیل کسری در پردازش سیگنال و . . . به طور عمومی کلمه کسری به معنی پارامترهایی است که مقادیر صحیح ندارند.

اگر چه ایده اپراتورهای مرتبه کسری قدمتی دیرینه دارد اما بیشترین مطالعات علمی و تئوری آن مخصوصاً در حوزه های مختلف علوم و از جمله علوم مهندسی در صد سال اخیر رخ داده است. همچنین کارهای مختلفی در خصوص کاربردهای این ابزار ریاضی در تئوری کنترل صورت گرفته است [۲۷, ۳۳, ۲۹, ۶۸, ۳۷, ۳۰, ۵۳]. از این ابزار می توان برای توصیف سیستم کنترل و نوع جدیدی از کنترلر (کنترلر مرتبه کسری) استفاده کرد و آنچه استفاده از این ابزار را برای محققان دلپذیر ساخته است قابلیت توصیف بهتر و دقیقتر سیستمهای واقعی در حوزه توصیف مدل سیستمها است [۷۷, ۷۸, ۲۱, ۳].

انگیزه اصلی در استفاده از کنترلرهای مرتبه کسری کنترلرهای PID هستند که در حوزه صنعت مورد استفاده فراوان قرار دارند و همواره بهبود کیفیت و مقاوم بودن آنها مورد توجه بوده است. یکی از روشهای بهبود کنترلرهای PID استفاده از کنترلرهای مرتبه کسری با قسمت مشتق گیری و انتگرالگیری غیر صحیح است. این امر باعث شده کنترلرهای مرتبه کسری (FPID) از انعطاف پذیری بیشتری نسبت به کنترلرهای کلاسیک برخوردار بوده و باعث افزایش قابلیت کنترل سیستمهای مختلف شوند [۷۵].

¹ Fraction

۱-۲ تاریخچه و پیش زمینه ریاضی

اکثر نویسندگان این موضوع تاریخ خاصی را به عنوان تولد محاسبات کسری ذکر کردند در نامه ای که در ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ هوییتال^۲ برای لیبنز^۳ نوشت از او در خصوص نحوه نگارش مشتق مرتبه n تابع خطی $f(x)=x$ ، $\frac{D^n x}{Dx^n}$ که در گزارش خود ارائه داده بود پرسید و این سوال را مطرح کرد که اگر $n=1/2$ باشد نتیجه را چگونه می توان توجیه نمود و او در پاسخ رابطه نزدیک بین مشتقات و سریهای نامتناهی (واگرا) را مطرح کرد و نوشت: اگر چه سریهای واگرا و هندسه رابطه دوری با هم دارند در سریهای واگرا تنها مجاز به استفاده از توانهای صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از توانهای کسری را نداشتیم. او ادامه می دهد: " $d^{1/2}x$ مساوی $x \cdot \sqrt{dx}/x$ می باشد" و اظهار می دارد: "این یک پارادکس آشکار از چیزی است که روزی نتایج مفیدی خواهد داشت" و در این جملات محاسبات کسری متولد شد [۴].

در سال ۱۸۱۹ لاکروا^۴ در کتاب هفتصد صفحه ای خود دو صفحه را به مبحث مشتق از مرتبه دلخواه اختصاص داد [۱۰۲].

او نشان داد که اگر $y = x^\alpha$ آنگاه $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)} x^{\alpha-1/2}$ به ویژه این نتیجه را به دست آورد که $\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = 2 \cdot \sqrt{x/\pi}$ و این با نتایج حاصل از تعریف ریمان^۵ نیز منطبق است.

در سال ۱۸۲۳ آبل^۶ اولین کاربرد حساب دیفرانسیل کسری را در مسائل فیزیکی (مساله تعیین یک منحنی به قسمی که اگر جسمی تحت تاثیر نیروی جاذبه بدون اصطکاک روی آن بلغزد زمان حرکت آن مستقل از نقطه شروع حرکت باشد)^۷ ارائه داد و البته این مساله را حل نکرد [۱۰۲]. همچنین این مسئله مورد توجه ریاضی دانان معروفی چون اویلر، لاپلاس، فوریه، آبل، لیوویل^۸ و ریمان بوده است.

در سال ۱۸۸۴ لوران^۹ نظریه عملگرهای تعمیم یافته D^v با v حقیقی را ارائه و منتشر کرد (که شامل D^v با v گویا یا گنگ و حقیقی و مختلط نیز می توانست باشد) و با انتگرالگیری و مشتق گیری از مرتبه دلخواه مواجه شد [۱۰۲].

در سال ۱۸۹۲ هوی ساید^{۱۰} مشتقات از مرتبه کسری را در توسعه نظریه خط انتقال خود به کار برد [۷۱].

L'Hopital²
Leibniz³
Lacroix⁴
Riemann⁵
Abel⁶
Tautochrone⁷
Liouville⁸
Laurent⁹
Heaviside¹⁰

در سال ۱۹۷۴ راس^{۱۱} اولین کنفرانس دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری و کاربردهای آن را برگزار کرد و گزارش آن را در کتاب خود به چاپ رساند [۱۱].

در همین سال اولدهام^{۱۲} و اسپنیر^{۱۳} دومین رساله در مورد "حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری" را منتشر کردند [۴۲].

در سال ۱۹۹۳ کنت میلر^{۱۴} و راس کتاب "مقدمه ای بر دیفرانسیل و انتگرال و معادلات از مرتبه کسری" را ارائه دادند که این کتاب روشهای خوبی را برای دانشمندان و ریاضی دانانی که در جستجوی مقدمه ای بر این موضوع جذاب هستند ارائه می دهد. در این کتاب حل معادلات $[D^{n/q} + \alpha_1 D^{(n-1)/q} + \dots + \alpha_{n-1} D^{1/q} + \alpha_n D^0]X(t) = Y(t)$ و وقتی q و n اعداد صحیح و مثبت و α_i ها ثابت اند ارائه می شود [۴۵].

در سال ۱۹۹۷ کول و نکار^{۱۵} در پایان نامه دکتری خود به مطالعه در مورد ارتباط بین فراکتالها و حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری پرداخت و برای مشتق گیری از توابع کسری در جاهاییکه مشتق ندارند فرمول ریمان-لیوویل را مجدداً بازنویسی کرد [۴۴]. در سال ۲۰۰۰ هیلفر^{۱۶} کتابی با عنوان "کاربردهایی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری در فیزیک" در ۹ بخش چاپ و منتشر کرد که هر بخش به کاربردی ویژه می پردازد [۷۶].

و بدین گونه به دنبال جستجوی اولیه هوپیتال و لیبز محاسبات کسری زمینه ای برای بهترین مغزها در ریاضیات شد و بسیاری از تئوریهای ریاضی که قابل پیاده سازی در محاسبات کسری می باشند قبل از قرن بیستم توسعه یافت و موجب جهشهای جالب در علوم و مهندسی گردید.

۱-۳ توابع اولیه اپراتورهای مرتبه کسری

۱-۲-۱ تابع گاما

بعدا خواهیم دید که تابع گاما نقش مهمی در محاسبات کسری دارد. ساده ترین تفسیر تابع گاما، تابع فاکتوریل برای همه اعداد حقیقی است. فرض کنید $F(n)$ تابع فاکتوریل باشد در این صورت برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$F(1) = 1, F(n) = n.F(n-1) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (1-3)$$

تابع گاما به صورت زیر تعریف می شود [۷۵]:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad z \in R \quad (2-3)$$

به سادگی ثابت می شود که:

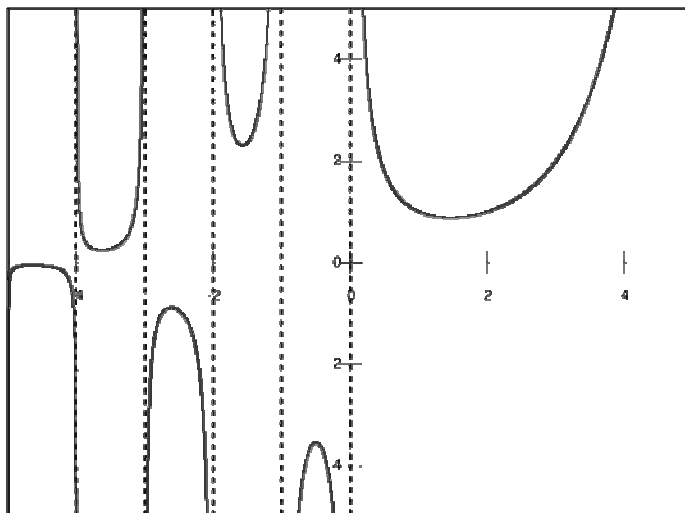
Ross¹¹
Oldham¹²
Spanier¹³
Miller¹⁴
Kolwankar¹⁵
Hilfer¹⁶

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \quad z \in N_+ \quad (3-3)$$

$$\Gamma(z) = (z-1)! \quad z \in N_+$$

شکل (۱-۱) تابع گاما را در صفر و اطراف صفر نشان می دهد. در مقادیر صحیح منفی تابع گاما به بی نهایت می رود ولی در مقادیر غیر صحیح مقدار دارد. با استفاده از تابع گاما می توان تابع $\phi(t)$ را که بعداً برای نمایش دیگری از انتگرال کسری استفاده می شود تعریف کرد:

$$\phi_\alpha(t) := \frac{t_+^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (4-3)$$



شکل تابع گاما با استفاده از MATLAB

شکل (۱-۱)

۲-۲-۱ تابع بتا

به عنوان انتگرال مرتبه اول اولر، تابع بتا نقش مهمی در محاسبات کسری دارد. نقش آن تنها به استفاده از آن به عنوان جایگزینی از توابع گامای درهم ضرب شده محدود نمی شود بلکه بیشتر به خاطر تشابه مشخصات آن با مشتق و انتگرال کسری بسیاری از توابع به ویژه چند جمله ای به فرم t^α و تابع میتاگ-لفلر می باشد. معادله زیر انتگرال بتا را بر حسب تابع گاما نشان می دهد [۷۵]:

$$\beta(p, q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad p, q \in R_+ \quad (5-3)$$

۳-۲-۱ تابع میتاگ-لفلر

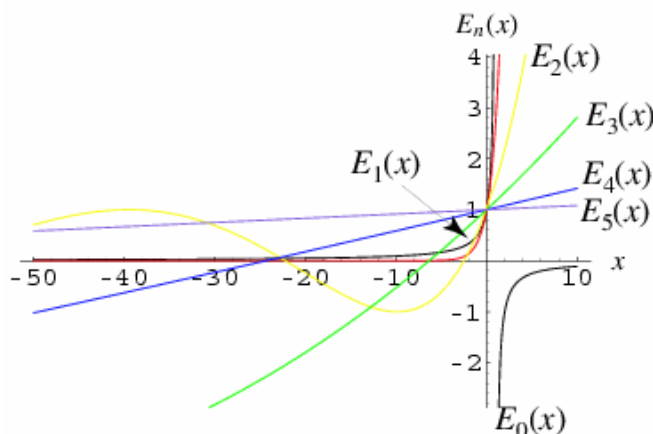
تابع میتاگ لفلر تابع مهمی است که نقش و کاربرد وسیعی در دنیای محاسبات کسری دارد و همچنین در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری نقش مهمی را ایفا می کند این تابع که تعمیم یک پارامتری تابع نمایی e^z است به شکل زیر است:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k - 1)} \quad \alpha > 0 \quad (6-3)$$

که با $\alpha = 1$ تابع نمایی e^z را خواهیم داشت. شکل (۲) تابع میتاگ لفلر را به ازای مقادیر مختلف α نشان می دهد. همچنین معمولا تابع میتاگ- لفلر را با آرگومانهای α, β هم نمایش می دهند:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k - \beta)} \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad (7-3)$$

این شکل نمایش عمومیت بیشتری دارد اگر چه همیشه در حل معادلات دیفرانسیل کسری لزومی به آن نیست.



تابع میتاگ - لفلر با استفاده از MATLAB

شکل (۲-۱)

۱-۳-۱ انتگرال و مشتق از مرتبه کسری

۱-۳-۱-۱ انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل

فرموله کردن مفاهیم انتگرال و مشتق کسری به طور طبیعی از مشتق و انتگرال مرتبه صحیح معمولی گرفته شده است. به طور مشابه برای ساختن فرمول انتگرال کسری به طور مستقیم می توان از نمایش سنتی انتگرالهای پی در پی تابع استفاده کرد. این روش عموماً به عنوان روش ریمان-لیوویل است و اثبات آن به کوشی برای محاسبه انتگرال مرتبه n تابع f نسبت داده می شود [۷۵]:

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-2} f(\tau) d\tau \quad (8-3)$$

برای نمایش مختصر فرمول اپراتور J^n را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$J^n F(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (9-3)$$

گاهها اپراتور D^{-n} را به جای اپراتور J^n تعریف می کنند.

در فرمول (۱) عدد صحیح است و اولین محدودیت در استفاده از تابع فاکتوریل است، چرا که مفهومی برای مقادیر غیر صحیح ندارد برای رفع این مشکل از تابع گاما استفاده می کنیم.

با جایگزینی تابع گامای معادل فاکتوریل رابطه (۱۲) برای $\alpha \in R_+$ به شکل زیر در می آید:

$$J^\alpha f(t) := f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (10-3)$$

این نحوه نگارش انتگرال کسری خواص مهمی را با خود در بر دارد و در حل معادلات با انتگرال و مشتق مرتبه کسری استفاده می شود. ابتدا برای انتگرال با مرتبه $\alpha=0$ داریم:

$$J^0 f(t) = f(t) \quad (11-3)$$

همچنین بر اساس تعریف طبیعی انتگرال و نیز مفهوم آن (معادلات انتگرالی تکرار شده کوشی) می توان دید که :

$$J^n J^m = J^{n+m} = J^m J^n \quad m, n \in N \quad (12-3)$$

بنابراین :

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} = J^\beta J^\alpha \quad \alpha, \beta \in R \quad (13-3)$$

اولین پیش فرض برای تابع $f(t)$ این است که $f(t)$ یک تابع علی^{۱۷} باشد. یعنی برای $t \leq 0$ ، صفر باشد و در نتیجه :

$$f(0) = f_n(0) = f_\alpha(0) \equiv 0 \quad (14-3)$$

خاصیت دیگری از انتگرال ریمان-لیویل بعد از معرفی تابع φ_α در (۱۷) ظاهر می شود:

$$\varphi_\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \varphi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau \quad (15-3)$$

t_+ نشان می دهد تابع برای $t \leq 0$ از بین می رود و در نتیجه (۱۷) یک رابطه علی است. از تعریف کانولوشن لاپلاس در (۶) داریم:

$$J^\alpha f(t) = \varphi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (16-3)$$

اکنون می خواهیم تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان-لیویل را بیابیم در (۱۷) نشان دادیم انتگرال کسری می تواند به شکل کانولوشن $\varphi_\alpha(t), f(t)$ نشان داده شود و می دانیم که تبدیل لاپلاس $t^{\alpha-1}$ به شکل زیر است:

causal function¹⁷

$$L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \quad (17-3)$$

بنابراین با استفاده از $\varphi_\alpha(t)$ در (17) و تبدیل لاپلاس کانولوشن (6) تبدیل لاپلاس انتگرال به شکل زیر به دست می آید

$$L\{J^\alpha\} = s^{-\alpha}\tilde{f}(s) \quad (18-3)$$

۱-۳-۲ انتگرال و مشتق مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکف

برخلاف روش ریمان-لیویل که تعریفش را از روی انتگرالهای تکراری می گیرد، فرمول گرانوالد-لتنیکف مساله را از طرف مشتق بررسی می کند. پس از تعریف اولیه مشتق شروع می کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (19-3)$$

با اعمال مجدد این فرمول، میتوان مشتق مرتبه دوم را به دست آورد:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \quad (20-3)$$

با انتخاب $h = h_1 = h_2$ داریم:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \quad (21-3)$$

برای مشتق مرتبه n پروسه به صورت جمع در می آید. از اپراتور d^n برای نمایش مشتق مرتبه n استفاده می کنیم:

$$d^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x-mh) \quad (22-3)$$

این نمایش، می تواند برای مقادیر غیر صحیح n که $\alpha \in R$ است استفاده شود که ضرایب دو جمله ای به عنوان توابع

گاما به جای فاکتوریل به کار رفته است. حد بالای Σ به ∞ می رود (به خاطر $\frac{t-a}{h}$ که t و a حدود بالا و پایین

دیفرانسیل هستند) مشتق کسری گرانوالد-لتنیکف به شکل زیر در می آید:

$$d^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh) \quad (23-3)$$

همانطور که می توان از تعریف انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیویل برای تعریف مشتق کسری استفاده کرد در اینجا نیز

می توان از مشتق کسری برای تعریف انتگرال کسری استفاده کرد و آنچه مهم است مقادیر منفی α است. اگر به رابطه

(22-3) برگردیم می بینیم $\binom{-n}{m}$ برای فاکتوریل تعریف شده است:

$$\binom{-n}{m} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-m+1)}{m!} \quad (24-3)$$

این فرم می تواند به شکل زیر نوشته شود :

$$\binom{-n}{m} = (-1)^m \frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} \quad (25-3)$$

نمایش فاکتوریل در (34) برای مقادیر حقیقی منفی با تابع گاما می تواند استفاده شود بنابراین :

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)m!} \quad (26-3)$$

با استفاده از (35) می توان (32) را برای $-\alpha$ به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$d^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha)} f(x-kh) \quad (27-3)$$

۳-۳-۱ تبدیل لاپلاس و کانولوشن

تبدیل لاپلاس معمولاً برای حل معادلات دیفرانسیل پیچیده استفاده می شود. با تبدیل لاپلاس می توان از کار کردن با معادلات دیفرانسیل با مرتبه های متفاوت به طور مستقیم اجتناب کرد و این کار با تبدیل مسئله به حوزه ای که راه حل جبری ارائه می دهد صورت می گیرد تعریف فرمول تبدیل لاپلاس به شرح ذیل است [75]:

$$L\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s) \quad (28-3)$$

اگر انتگرال فوق همگرا باشد می گوئیم تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود است ($f(t)$ تبدیل لاپلاس دارد) و این به شرطی است که $f(t)$ با سرعت بیشتر از سرعت کاهش جمله نمایی e^{-st} افزایش نیابد. نیز کانولوشن لاپلاس به شکل زیر است:

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = g(t) * f(t) \quad (29-3)$$

حل کانولوشن دو تابع در حوزه t گاهی پیچیده می شود در حالیکه در حوزه لاپلاس نتیجه کانولوشن به صورت ضرب ساده می باشد:

$$L\{f(t) * g(t)\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \quad (30-3)$$

یکی از خواص مهم تبدیل لاپلاس تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه n تابع $f(t)$ می باشد:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (31-3)$$

۲- فصل دوم

۲-۱ مقدمه

در این فصل، مفهوم اپراتورهای مرتبه کسری از دو دیدگاه هندسی و فیزیکی بیان خواهد شد. اگرچه هنوز هم بحث در زمینه مفهوم مشتق و انتگرال مرتبه کسری در بین ریاضیدانان و فیزیکدانان مطرح بوده و مقالات متعددی در این زمینه به انتشار رسیده و می‌رسد و در هر کدام از این مقالات توصیف‌هایی گاه جدید ارائه می‌گردد، اما در این فصل به توصیف‌های معمول‌تر و پرکاربردتر اشاره خواهد شد.

۳-۱ مفهوم هندسی اپراتور مرتبه کسری

در این بخش یک مفهوم هندسی برای اپراتور انتگرال ریمان - لیوویل ارائه خواهد شد و از آنجایی که مشتق مرتبه کسری نیز با مشتق‌گیری مرتبه صحیح از انتگرال مرتبه کسری قابل بیان است، بنابراین مفهوم مشتق نیز به آسانی قابل حصول خواهد بود. همان گونه که در فصل ابتدایی اشاره شد، اپراتور انتگرال ریمان - لیوویل را می‌توان به فرم رابطه ۲-۱ تعریف کرد.

$$I_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad t \geq 0 \quad (1-2)$$

اما رابطه ۲-۱ را می‌توان به صورت رابطه ۲-۲ بازنویسی کرد.

$$I_t^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t f(\tau) dg(\tau) \quad (2-2)$$

که در این رابطه:

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [t^\alpha - (t-\tau)^\alpha] \quad (3-2)$$

تابع $g_t(\tau)$ دارای خواص قابل توجهی می‌باشد. در واقع اگر $t_1 = kt, \tau_1 = k\tau$ و $k > 0$ در نظر گرفته شود. آنگاه:

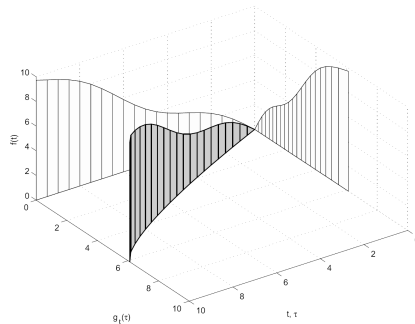
$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau) \quad (4-2)$$

با فرض ثابت بودن t در رابطه ۳-۲ و برای به دست آوردن تعبیر هندسی از این انتگرال، در فضای سه بعدی، سه محور عمود بر هم τ, g, f و f در نظر گرفته می‌شود. در صفحه (τ, g) ، می‌توان دیواره‌ای به ارتفاع متغیر $f(\tau)$ رسم کرد که لبه بالایی این دیواره، یک خط سه بعدی در صفحه (τ, g, f) باشد. برای $0 \leq \tau \leq t$ خواهد بود. همانطور که در شکل (۴) نشان داده شده است، دیواره رسم شده در این فضای سه بعدی را می‌توان بر روی دو صفحه عمود بر هم از این فضا تصویر کرد. با مشاهده تصویر این دیواره، بر روی این صفحات، می‌توان گفت:
- مساحت تصویر این دیواره، بر روی صفحه (τ, f) نشان‌دهنده مقدار انتگرال رابطه ۲-۵ است.

$$I_t^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau; t \geq 0 \quad (5-2)$$

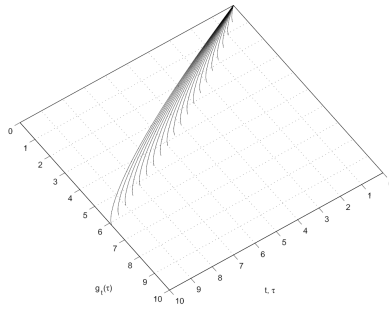
- مساحت تصویر این دیواره، بر روی صفحه (g, f) ، مقدار انتگرال رابطه ۲-۲ یا همان مقدار انتگرال مرتبه کسری ۱- را نشان خواهد داد.

به عبارت دیگر، دیواره تعریف شده، دو سایه ایجاد خواهد کرد. اولین سایه، بر روی صفحه (τ, f) ایجاد می‌شود که همان تعریف مشهور سطح زیرمنحنی تابع $f(\tau)$ می‌باشد و این تعریف، تعریف انتگرال معمولی (مرتبه صحیح) خواهد بود. اما سایه ایجاد شده، بر روی g, f ، مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری رابطه ۱-۲ برای یک نقطه ثابت t خواهد بود.



تابع $f(t)$ و تصاویر آن بر صفحات (τ, f) و (g, f) [۳۴]

شکل (۱-۲)



شکل تابع $g_t(\tau)$ ، محور انتقال $f(t)$ تابع به صفحه g, f [۳۴]

شکل (۲-۲)

اگر $\alpha = 1$ باشد، آنگاه $g_t(\tau) = \tau$ ، یک خط راست در شکل (۵) خواهد بود و هر دو تصویر، مساوی خواهد بود. این موضوع به این معنی است که انتگرال معمولی (مرتبه صحیح)، از دیدگاه هندسی (مانند دیدگاه ریاضی)، نیز حالت خاصی از انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل می‌باشد.

حال سؤال این است که اگر t تغییر کند چه حالتی رخ خواهد داد؟ اگر مقدار t تغییر کند، دیواره تعریف شده در قسمت قبل نیز همزمان با آن تغییر خواهد کرد. برای نشان دادن این موضوع می‌توان به شکل (۵) توجه کرد. تغییرات به وجود آمده در دیواره، بر تصویر آن در صفحه (g, f) تأثیر داشته و به طور همزمان آن را تغییر خواهد داد. بنابراین در این حالت با مفهوم هندسی دینامیکی انتگرال مرتبه کسری برای یک تابع، با متغیر t ، روبرو خواهیم بود.

۴-۱ مفهوم فیزیکی اپراتور مرتبه کسری

در بخش قبل، مفهوم هندسی انتگرال مرتبه کسری با اضافه کردن یک بعد سوم $g_t(\tau)$ ، به صفحه $(\tau, f(\tau))$ مورد بررسی قرار گرفت. اگر در روابط بخش قبل، پارامتر τ به عنوان زمان در نظر گرفته شود، تابع $g(\tau)$ را می‌توان زمان انتقال یافته دانست. اما وجود دو محور زمان در این رابطه به چه معنی خواهد بود؟

برای پاسخ به این سؤال نیاز است که برخی از تعابیر موجود در زمینه زمان مورد بررسی قرار گیرد. در حال حاضر تصور ما از محور زمان، یک محور نیمه بی‌نهایت است که به بخش‌های مساوی تقسیم شده است (شکل (۶)). سوال این است که آیا تمام این قسمت‌ها با یکدیگر مساوی هستند؟

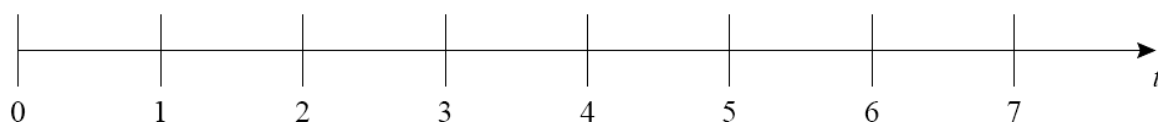
بدیهی است که قابلیت اندازه‌گیری و مقایسه دو بخش یا قسمت از هر کمیت فیزیکی، زمانی میسر خواهد بود که هر دو بخش به طور همزمان در اختیار باشد. به عبارت دیگر، در یک زمان و در یک مکان، بتوان آنها را با یک معیار ثابت اندازه‌گیری کرد و یا با کنار هم قرار دادن این دو بخش، آنها را با هم مقایسه کرد و تساوی آنها را بررسی نمود. با این

استنباط از مساوی بودن دو کمیت، قسمت‌های محور زمان (تقسیمات زمانی محور نیمه‌بی‌نهایت)، قابل مقایسه نخواهند بود چرا که این بخش‌ها تنها به صورت دنباله‌وار و پشت سر هم در اختیار ما هستند. به راستی، چگونه می‌توان تقسیمات زمان را اندازه‌گیری کرد؟

محور زمانی که اکنون برای ما به عنوان یک محور بدیهی بوده و تمام روابط و معادلات، بر اساس آن آنالیز و تحلیل می‌شود (شکل (۶))، تنها با مشاهده برخی رویدادها، که حادث شدن آنها به طور منظم و تکراری فرض می‌شود، حاصل شده است. کلمنس در مقاله خود می‌نویسد:

«اندازه‌گیری زمان اساساً یک رویداد شمارشی است. هر پدیده تکراری در هر کجا که اتفاق بیفتد و قابل شمارش باشد در حقیقت یک اندازه از زمان در اختیار می‌گذارد. ساعت در واقع رویداد «تیک» را تکرار می‌کند و ما با شمارش این تیک‌ها، آنها را ساعت، دقیقه، ثانیه و ... می‌نامیم. اما به واقع قادر نیستیم زمان مطلق بین دو تیک را مقایسه کنیم و نمی‌توان با قطعیت اعلام داشت که زمان بین دو تیک متوالی با یکدیگر برابر بوده است.»

مفهوم ناهمگن بودن زمان، در شکل (۷) نمایش داده شده است. این زمان مطلق را زمان کیهانی^{۱۸} می‌نامند.



محور زمان همگن [۳۴]

شکل (۲-۳)



محور زمان ناهمگن (زمان کیهانی) [۳۴]

شکل (۲-۴)

برای وضوح بیشتر مطالب گفته شده، در این قسمت، مثالی مطرح می‌شود. فرض می‌کنید شخص N ، در متحرکی نشسته است و دو وسیله اندازه‌گیری در اختیار دارد که یکی از آنها یک سرعت سنج متحرک و دیگری یک ساعت است که زمان آن در حال کند شدن است. یعنی در این ساعت، تفاوت بین هر دو بخش زمانی متوالی (هر دو تیک متوالی)، دو برابر بخش زمانی قبل از آن خواهد بود (مطابق جدول (۱)). شخص N ، مقادیر سرعت نشان داده شده بر روی سرعت سنج را در هر ثانیه قرائت می‌کند بدون آن که از کند شدن ساعت در طول زمان آگاه باشد.

¹⁸ -Cosmic