بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علامه طباطبائی
دانشکده‌ی ریاضی و علوم رایانه
گروه آمار

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد **آمار اجتماعی- اقتصادی**

**عنوان**

# تحلیل برخی سامانه‌ها با سرویس قطعی

پژوهشگر

**شیما اعتصام همدانی**

استاد راهنما

**دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده**

استاد مشاور

**دکتر محمدرضا صالحی راد**

**شهریور۱۳۹۱**

**تأیید پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشدتوسط دانشجو**

**عنوان پایان‌نامه:** تحلیل برخی سامانه‌ها با سرویس قطعی

**نام دانشجو:** شیما اعتصام همدانی

**شماره‌ی دانشجویی:** ۸۸۱۲۵۱۱۶۲۰۱

**استاد راهنما:** دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده

اینجانب **شیما اعتصام همدانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **آمار اجتماعی- اقتصادی** دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی گواهی می‌نمایم پژوهش‌های ارایه شده در پایان‌نامه با عنوان مذکور توسط شخص اینجانب انجام شده است و درستی مطالب نگارش یافته مورد تأیید می‌باشد. همچنین گواهی می‌نمایم مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط این‌جانب یا فرد دیگری در هیچ کجا ارایه نشده است و در نگارش متن پایان‌نامه شیوه‌ی نگارش مصوب دانشکده‌ی اقتصاد را به‌طور کامل رعایت نموده‌ام. چنان‌چه در هر زمان خلاف آن‌چه گواهی نموده‌ام مشاهده گردد خود را از آثار حقیقی و حقوقی ناشی از دریافت مدرک کارشناسی ارشد محروم می‌دانم و هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

**تاریخ:** **امضا دانشجو:**

# فهرست مطالب

# چکیده

در بعضی از سامانه‌های صف‌بندی متقاضی‌ها به صورت قطعی و ثابت سرویس دریافت می‌کنند. در این پایان‌نامه، سامانه‌های صف‌بندی $M/D/1$ را هنگامی که سرویس‌دهنده بعد از تکمیل هر دوره سرویس می‌تواند وارد تعطیلی شود، تحلیل می‌کنیم و با تغییر توزیع دوره‌ی تعطیلی، اندازه‌های موثر سامانه را محاسبه می‌کنیم . در ابتدا به بیان مفهوم‌های کلی و مشخصه‌های اصلی هر فرایند در نظریه‌ی صف‌بندی می‌پردازیم و سپس یک مدل $M/D/1$ با ورود تکی، سرویس ثابت و تعطیلی سرویس‌دهنده را با توزیع دونوعی مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس، همین مدل را همراه با تعطیلی کلی سرویس‌دهنده تحلیل می‌کنیم. برای این کار ابتدا معادله‌های وابسته به زمان را به دست آورده و سپس زمان را به بی‌نهایت میل می‌دهیم تا معادله‌های حالت پایا را پیدا می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد به تحلیل یک مدل $M/D/1$ می‌پردازیم که تعطیلی در این سامانه شامل دو مرحله‌ی نامتجانس است. در نهایت، با مثال عددی اندازه‌های مؤثر فصل‌های قبل را با هم مقایسه می‌کنیم.

**واژگان کلیدی:** *تعطیلی سرویس‌دهنده با خط‌مشی برنولی، تابع مولد احتمال حالت پایا، شرط حالت پایا، سرویس قطعی، نرخ بهره‌دهی، تعطیلی سرویس‌دهنده با توزیع دونوعی، میانگین زمان انتظار در سامانه، میانگین اندازه‌ی سامانه، میانگین زمان انتظار در صف، میانگین اندازه‌ی صف.*

# فصل ۱

# مفهوم‌های پایه‌ای

## ۱.۱ مقدمه

نظریه‌ی صف برای توصیف خط‌های انتظار متقاضیان دریافت خدمات به وجود آمده است. برحسب این‌که نحوه‌ی ورود و سرویس‌دهی در سامانه تابع‌های تعیینی یا تصادفی باشند مدل‌های صف تعیینی و یا تصادفی شکل می‌گیرند.

به‌طور کلی اطلاعات مورد نیاز برای تجزیه و تحلیل صف عبارتند از: زمان ورود متقاضی‌های متوالی برای مشخص شدن تابع توزیع ورود، زمان سرویس‌دهی به متقاضی‌ها برای مشخص شدن تابع توزیع سرویس‌دهی، طول صف و زمان انتظار.

وجود صف‌های طولانی نشان‌دهنده‌ی این مطلب است که تعداد متقاضی‌ها برای دریافت خدمات بسیار زیادتر از ظرفیت سامانه می‌باشد. در این مرحله علم مدیریت صف‌ها اهمیت خود را نشان می‌دهد. در جهان علوم این علم به"نظریه‌ی صف‌بندی" معروف است. این علم در حوضه‌ی فعالیت خود به مرور زمان پیشرفت کرده و تخصصی‌تر شده است. تعریف‌ها، پارامترها، فرمول‌ها و تاریخچه‌ی پربار آن نشان دهنده‌ی این ادعا است. در دید عموم مردم یک صف، تعداد افراد حاضر در صف

می‌باشد که برای دریافت خدمات در انتظار هستند. نظریه‌ی صف‌بندی گام را فراتر نهاده و بسیاری از عواملی را که بر این مسئله اثر می‌گذارد شناسایی، نام‌گذاری و محاسبه کرده است. برای از بین بردن نتایج نامناسب در صف، شناخت ویژگی‌های این پدیده ضروری است. نظریه‌ی صف، که به مطالعه‌ی صف‌ها از دیدگاه ریاضی می‌پردازد، تأثیر عوامل تشکیل دهنده‌ی صف و راه‌های منطقی کاهش زمان انتظار متقاضی‌ها را بررسی می‌کند. اگر چه هیچ‌گاه نمی‌توان صف را کلا از بین برد اما می‌توان آن را تعدیل کرد.

نظریه صف‌بندی به‌منظور کاهش طول صف و یا کاهش زمان سرویس و همچنین برای تهیه مدل مناسب برای پیش‌بینی رفتار سامانه‌های مختلف گسترش یافته است. با استفاده از روش‌های موجود در این نظریه می‌توان یك مدل مناسب و بهینه برای مسأله‌ی مورد نظر تهیه کرد.

## ۲.۱ مشخصه‌های فرایند صف‌بندی

همه‌ی سامانه‌های صف‌بندی دارای یک گروه ویژگی‌ها و مفهوم‌های مشترک هستند. این ویژگی‌ها عبارتند از:

### الگوی ورود متقاضی‌ها:

الگوی ورود به یك سامانه‌ی صف‌بندی بر حسب متوسط تعداد ورودی در واحد زمان (میانگین نرخ ورود ) و یا به وسیله‌ی متوسط زمان بین دو ورود متوالی (میانگین فاصله‌ی زمانی بین دو ورود متوالی ) اندازه‌گیری می‌شود. واضح است که هر کدام از این کمیّت‌ها برای توصیف ورود به سامانه کافی است. اگر نرخ ورود متقاضیان در زمان‌های مختلف ثابت باشد، می‌گوییم الگوی ورود متقاضیان ثابت( قطعی ) است. در بیشتر مسایل واقعی زمان بین دو ورود متوالی، متغیری تصادفی است. برای بررسی دقیق رابطه‌های ریاضی حاکم بر سامانه‌های صف‌بندی و محاسبه‌ی معیارهای ارزیابی آن، شناخت تابع توزیع این متغیرهای تصادفی ضرورت دارد.

### الگوی ارایه سرویس:

این مؤلفه یکی دیگر از مؤلفه‌های اصلی مدل‌های صف می‌باشد. اگر نرخ سرویس برای همه‌ی متقاضیان برابر باشد گوییم زمان سرویس قطعی است. این مؤلفه را نیز به دو شکل می‌توان توصیف کرد. در شکل اول می‌توان تعداد متقاضیانی که سرویس دریافت کرده‌اند را جمع و بر کل زمان فعالیت سامانه تقسیم کرده و این مؤلفه را به دست آورد. در شکل دوم این مؤلفه به وسیله‌ی اندازه‌گیری بازه‌ی زمانی که سرویس‌دهنده برای هر متقاضی صرف می‌کند و محاسبه‌ی میانگین برای آن‌ها به‌دست می‌آید. تهی نبودن سامانه یکی از شرط‌های اساسی برای محاسبه‌ی این مؤلفه است و در صورت تهی بودن سامانه بحث بر روی وجود این مؤلفه بی‌معنی خواهد بود.

### نظم صف:

بی شک در جامعه و زندگی روزمره، در زمان‌هایی، خود عضوی از یک صف بوده‌ایم و با افرادی که بدون حضور در صف سرویس دریافت کرده‌اند مواجه شده‌ایم. این از دیدگاه عموم یک بی‌نظمی محسوب می‌شود. در مؤلفه‌های صف، مؤلفه‌ای با عنوان نظم صف گنجانده شده است. این مؤلفه با نمادهای خاص خود نمایش داده می‌شود. در زیر حالت‌های مختلف از انواع نظم صف همراه با نمادهای آن‌ها ارایه شده است.

- *FCFS*: این در واقع همان نظمی است که در بسیاری از صف‌های روزانه با آن مواجه هستیم که در آن هر متقاضی که زودتر آمده باشد، زودتر سرویس می‌گیرد(سرویس به ترتیب ورود).

- *LCFS*: این نوع از نظم صف در واقع عکس حالت اول عمل می‌کند. یعنی هر متقاضی که دیرتر وارد سامانه شود، زودتر سرویس می‌گیرد.

- *RSS*: این نوع نظم، نوع خاصی از مدل صف می‌باشد که متقاضی‌ها را به شکل تصادفی انتخاب می‌کند و اقدام به سرویس‌دهی می‌کند.

- *PR*: این حالت از نظم صف برای یک مجموعه خاص از متقاضی‌ها حق تقدم قایل می‌شود. این حق تقدم می‌تواند به این معنی باشد که به آن متقاضی زودتر از بقیه سرویس ارایه شود یا دیرتر؟

### گنجایش سامانه:

گنجایش سامانه در واقع محدودیتی است که به هر دلیلی بر یک صف اعمال می‌شود. این محدودیت می‌تواند بر روی هر یک از مؤلفه‌ها باشد. در توصیف مؤلفه‌ی گنجایش هر سامانه، بحثی با عنوان حالت انفجار به چشم می‌خورد. در واقع زمانی که یک سامانه، دیگر نتواند پاسخگوی متقاضی‌ها باشد و متقاضی‌ها مجبور به ترک سامانه شوند گفته می‌شود سامانه به حد انفجار رسیده است. حتی اگر این ترک اجباری سامانه به خاطر اتمام زمان کل فعالیت سامانه باشد. ظرفیت یک پارکینگ عمومی به نوعی گنجایش سامانه را نشان می‌دهد.

### تعداد باجه‌های سرویس:

سرویس‌دهنده‌ها یکی از مؤثرترین عوامل در تشکیل صف‌ها می‌باشند. بالا بودن تعداد سرویس‌دهنده‌ها می‌تواند بر سرعت ارایه‌ی سرویس تأثیر گذاشته و از طول صف‌ها کم کند. اما بالا بردن تعداد سرویس‌دهنده‌ها هزینه‌ها را نیز بالا می‌برد. برای مثال، ممکن است وجود صف، محدود به برخی از ساعت‌های روز باشد با این شرایط اگر دو سرویس‌دهنده در این سامانه موجود باشد در بیشتر ساعات روز این دو سرویس‌دهنده بی‌کار خواهند بود و این نتیجه‌ی مثبتی نخواهد داشت جز این‌که یکی از این دو سرویس‌دهنده دوباره تعطیل شود. عامل دیگری که بر این مؤلفه اثر می‌گذارد، سرعت سرویس‌دهی برای هر سرویس‌دهنده می‌باشد. این مطلب کاملا واضح است که یک سرویس‌دهنده با سرعت ارایه‌ی سرویس بالا می‌تواند تأثیر به‌سزایی در طول صف داشته باشد. این یکی از دلایلی است که در بسیاری از سامانه‌ها مدیران به فکر مکانیزه و ماشینی کردن سرویس‌دهنده‌ها افتاده‌اند چرا که همیشه سرعت ارایه‌ی سرویس به وسیله‌ی ماشین‌ها بیشتر از نیروی کار انسانی است مگر

در مواردی که یک ماشین قدرت انجام آن فعالیت را نداشته باشد. شاید یک ماشین بتواند مانند یک انسان در داروخانه‌ای، داروی تجویز شده را در اختیار یک بیمار قرار دهد اما به‌هیچ‌وجه نمی‌تواند فعالیت مربوط به یک روانشناس را که با احساس انسان‌ها در رابطه است را انجام دهد.

### مراحل سرویس:

بیشتر سامانه‌های صف‌بندی تنها یك مرحله سرویس دارند، اما در مواردی ممکن است یك سامانه، چندین مرحله‌ی سرویس‌دهی داشته باشد. مراحل آزمایش‌های پزشکی یك مثال روشن از چنین سامانه‌های صف‌بندی است که در آن هر بیمار باید مراحل مختلف مثل آزمایش خون، نوار قلب، *MRI* و ... را بگذراند.

## ۳.۱ بیان مسئله

انتظار در صف پدیده‌ای ناخوشایند است و همه‌ی ما متقاضیان همواره به دنبال کاهش این زمان انتظار می‌باشیم. با کمک نظریه‌ی صف‌بندی مدل‌هایی را برای پیش‌بینی رفتار هر یک از سامانه‌های موجود تهیه می‌کنیم.

زمان سرویس را به عنوان یکی از مشخصه‌های اصلی فرایند صف در نظر می‌گیریم، مدت زمان این سرویس می‌تواند تعیینی باشد. در این پایان‌نامه با استفاده از ویژگی‌های اساسی در صف مانند معادله‌های تعادل، سامانه‌هایی با سرویس تعیینی را مدل‌بندی کرده و سپس اندازه‌های موثر در آن را بهینه می‌کنیم.

## ۴.۱ تعریف‌ها و مفهوم‌های اساسی

### تابع مولد احتمال

اگر $X$ متغیری تصادفی، نامنفی و گسسته مقدار با تابع احتمال $p(X=n)=p(n)$ برای $n=0,1,2,\ldots$ باشد، آن‌گاه تابع مولد احتمال متغیر $X$ را با $P(z)$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌شود

$P(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n)$

که در آن $|z| < 1$ فرض می‌شود. دو ویژگی مهم تابع مولد احتمال که در فصل‌های بعدی از آن استفاده می‌کنیم، عبارتند از:

- $P(1) = 1$
- $P^{'}(1) = E(X)$

## تبدیل لاپلاس

فرض کنید $f(t)$ برای $t \geqslant 0$ تعریف شده باشد و در شرایط خاص که در زیر بیان می‌شود صدق کند. در این صورت تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر است با

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{1.4.1}$$

اکنون به‌منظور ارایه‌ی شرایط خاص ذکر شده در تعریف تبدیل لاپلاس برای تابع $f(t)$ قضیه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم

**قضیه ۱.۴.۱.** *فرض کنید که تابع $f(t)$ دارای ویژگی‌های زیر باشد:*

*۱- بر فاصله‌ی $0 \leqslant t \leqslant A$، به ازاء هر $A$ی مثبت، پیوسته‌ی قطعه‌ای باشد.*

*۲- به ازاء $t \geqslant M$ رابطه‌ی $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ برقرار باشد که در آن $K$، $a$ و $M$ اعداد حقیقی و $K$ و $M$ مثبت‌اند.*

در این‌صورت تبدیل لاپلاس $f(t)$ که با رابطه‌ی (۱.۴.۱) تعریف می‌شود، وجود دارد.

***برهان.*** به [۱] مراجعه کنید. □

## توزیع دونوعی

متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع دونوعی است اگر آن را به‌صورت زیر نمایش دهیم

$$X = \begin{cases} X_1 & 1-b \quad \text{با احتمال} \\ X_1+X_2 & b \quad \text{با احتمال} \end{cases}$$

که در آن $X_1$ و $X_2$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های نمایی هستند و به‌ترتیب دارای میانگین‌های $\frac{1}{\mu_1}$ و $\frac{1}{\mu_2}$ می‌باشند. این توزیع دارای پارامترهای $(b ، \mu_1 ، \mu_2)$ است به‌طوری‌که $\mu_2>\mu_1$ می‌باشد [۷].

## شرط پایایی

در فرایندهای زاد و مرگ شرط پایایی سامانه این است که $\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n$ همگرا باشد. از آن‌جایی که تساوی $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ برقرار است. برای وجود جواب در این تصاعد لازم است شرط $\rho$ کوچکتر از یک برقرار باشد. یا هم‌ارز آن، $\lambda$ کوچکتر از $\mu$ باشد بنابراین برای برقراری شرط پایایی در یک سامانه باید همواره نرخ ورود از نرخ سرویس‌دهی کوچکتر باشد در غیر این صورت سامانه به مرز انفجار نزدیک می‌شود.

## توزیع ارلانگ

تابع چگالی یک توزیع ارلانگ با پارامترهای $k$ و $\beta$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\beta e^{-\beta x} \quad (x \geqslant 0)$$

برای این توزیع $E(X) = \frac{k}{\beta}$ و $Var(X) = \frac{k}{\beta^2}$ می‌باشد [۱۷].

در این بخش، یکی از قضیه‌های اساسی در آنالیز را بیان می‌کنیم که به کمک آن در فصل‌های بعدی ترتیب انتگرال‌گیری و سیگما را می‌توانیم عوض کنیم.

**قضیه ۲.۴.۱.** *فرض می‌کنیم $g_n$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر بر $[0,\infty)$ باشد، به طوری‌که*

*الف) به‌ازای هر $n$، $g_n$ تقریبا همه جا بر $[0,\infty)$ نامنفی است،*

*ب) سری* $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g_n dx$ *همگرا باشد.*

*در این صورت سری* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n dx$ *تقریبا همه جا بر* $[0,\infty)$ *به تابعی انتگرال‌پذیر مانند* $g$ *، همگرا بوده و*

$$\int_{0}^{\infty} g dx = \int_{0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g_n dx$$

***برهان.*** به [۳] مراجعه کنید. □

## عامل بهره‌دهی یا شدت ترافیک

عامل بهره‌دهی نسبتی از زمان است که سرویس‌دهنده در حال ارایه‌ی سرویس می‌باشد. یا به عبارت دیگر، عامل بهره‌دهی نسبت میانگین همه‌ی تقاضاها به کل ظرفیت سامانه در واحد زمان را نشان می‌دهد. برای نمایش این معیار از نماد $\rho$ استفاده می‌شود. برای مدل $M/D/1$، مقدار $\rho$ برابر است با $\lambda d$ که در آن $d$ نشان‌دهنده‌ی زمان ثابت سرویس برای هر متقاضی می‌باشد. اگر $\rho > 1$ باشد زمان انتظار در سامانه زیاد خواهد شد و طول صف مرتب افزایش می‌یابد. در این حالت پس از مدتی سامانه به حالت انفجار خواهد رسید و اگر $\rho < 1$ باشد آن‌گاه نرخ ورود کمتر از نرخ سرویس‌دهی می‌باشد و ارایه‌ی سرویس برای همه‌ی واحدهای متقاضی امکان‌پذیر می‌شود.

## تعطیلی سرویس‌دهنده با روند برنولی

بعد از هر دوره سرویس، برای سرویس‌دهنده دو حالت وجود می‌آید یا با احتمال $p$ به تعطیلی رفته و یا با احتمال $1-p$ به ادامه سرویس بپردازد .در این‌صورت، تعطیلی از یک روند برنولی پیروی می‌کند.

## سرویس قطعی

هرگاه تمام واحدهای متقاضی در یک مدت زمان ثابت سرویس دریافت کنند سرویس قطعی نامیده می‌شود.

### تعطیلی سرویس‌دهنده

هرگاه سرویس‌دهنده، به هر دلیلی مانند تعمیر یا ارتقاء دستگاه، استراحت و از این قبیل امور برای مدت زمانی سامانه را ترک کند تعطیلی به وجود می‌آید که این اتفاق( تعطیلی) تغییراتی در صف به وجود می‌آورد و به‌وضوح بر روی اندازه‌های مؤثر سامانه تأثیر اساسی خواهد داشت. سامانه‌های صف‌بندی با توجه به تعطیلی سرویس‌دهنده به سه دسته تقسیم می‌شوند.

- بدون تعطیلی: در این حالت سرویس‌دهنده همواره در سامانه حاضر و آماده برای ارایه‌ی سرویس می‌باشد حتی اگر هیچ متقاضی‌ای در سامانه وجود نداشته باشد.
- تک تعطیلی: در این نوع تعطیلی اگر سرویس‌دهنده، سامانه را برای یک دوره تعطیلی ترک کند(ممکن است این دوره شامل چند مرحله شود) و در بازگشت از تعطیلی سامانه خالی باشد سرویس‌دهنده تا ورود اولین متقاضی در سامانه منتظر می‌ماند.
- تعطیلی چندگانه: در این حالت اگر سرویس‌دهنده سامانه را برای تعطیلی ترک کند، در بازگشت از تعطیلی اگر سامانه خالی باشد مجددا به تعطیلی رفته و این روند تا ورود حداقل یک متقاضی به سامانه ادامه می‌یابد.

## ۵.۱ نمادگذاری

شکل کلی و استاندارد ارایه شده از سوی کندال (۱۹۵۳) که در اکثر کتاب‌های صف‌بندی امروزی رعایت می‌شود به صورت $A/B/X/Y/Z$ می‌باشد. هر کدام از حروف نمایش داده شده نشانگر یک مقدار یا توزیع در مدل صف می‌باشد که می‌توان با نگاهی اجمالی به هر مدل که ارایه می‌شود مجموعه‌ای از ویژگی‌های سامانه را درک کرد. حروف لاتین فوق به ترتیب نشان‌دهنده‌ی این مؤلفه‌ها می‌باشند: حرف $A$ توزیع زمان ورود متقاضی‌ها، حرف $B$ توزیع زمان سرویس‌دهی سامانه، حرف $X$ نشان تعداد سرویس‌دهنده‌های موجود در سامانه و حروف $Y$ و $Z$ به‌ترتیب گنجایش و نظم صف را توصیف می‌کنند. در مدل‌هایی که فقط از سه نماد برای صف استفاده می‌کنند گنجایش سامانه و

نظم صف به‌ترتیب بی‌نهایت و $FCFS$ در نظر گرفته شده است.

## ۶.۱ اندازه‌های مؤثر بودن

با کمک اندازه‌های مؤثر می‌توان در مورد عمل‌کرد یک سامانه قضاوت کرد. بنابراین هدف از تحلیل هر سامانه‌ی صف‌بندی بهینه کردن این اندازه‌ها است. این اندازه‌ها که شامل تعداد متقاضی‌ها در سامانه ($N$)، تعداد متقاضی‌ها در صف ($N_q$)، زمان انتظار در سامانه($T$) و زمان انتظار در صف($T_q$) می‌باشند متغیرهای تصادفی هستند که معمولا تعیین امید ریاضی آن‌ها مورد نظر تحلیل‌گر می‌باشد. معمولا میانگین این اندازه‌ها را به ترتیب با $L$، $L_q$، $W$ و $W_q$ نشان می‌دهند.

## ۷.۱ تاریخچه‌ی تحقیق

کیل‌سون و سروی اولین کسانی بودند این مدل را مورد بررسی قرار دادند که بعد از تکمیل هر دوره سرویس‌دهی، سرویس‌دهنده با احتمال $p$ به تعطیلی می‌رود و یا با احتمال $1-p$ برای واحد بعدی( متقاضی بعدی) به ادامه‌ی سرویس می‌پردازد [۹]. بعدها کلیسون و سروی (۱۹۸۷) ، دوشي و تاکاجی کاربردهای بی‌شماری از این مدل و مدل‌های مشابه را در موقعیت‌های واقعی مورد مطالعه قرار دادند.

مبحث سامانه‌های صف‌بندی تک سرویس‌دهنده هنگامی‌که سرویس‌دهنده در برخی از فاصله‌های زمانی قابل دسترس نیست یا به عبارت دیگر سرویس‌دهنده در تعطیلی است اولین بار توسط لوی و یچیلای مطالعه شد [۱۰]. بعدها، دوشی و تاکاجی مطالعات بیشتری از این مدل و مدل‌های تعطیلی مرتبط با آن که شامل چند نوع تعمیم و گسترش سامانه‌های صف‌بندی $M/G/1$ کلاسیک است را انجام دادند [۵] و [۱۹]. به علاوه لونگ برخی خط‌مشی‌های تعطیلی پیچیده برای مدل $M/G/1$ در مدل‌هایی با تعطیلی را تحلیل کرد [۱۰].

مادان دو نوع مشابه از مدل‌هایی با تعطیلی در سامانه صف‌بندی $M/G/1$ را مطرح کرد. او در هر دو

مدل روش کار حالت پایای سرویس‌دهنده‌های نامتجانس با روند برنولی و خط‌مشی تعطیلی تکی را معرفی کرد. وی به واسطه‌ی اعمال روش متغیر تکمیلی تابع مولد احتمال($PGF$) را برای توزیع اندازه‌ی صف در حالت‌های مختلف از سرویس برای دوره تعطیلی هر دو مدل به دست آورد [۱۴] و [۱۵].

مادان و صالح سامانه‌های صف‌بندی $M/D/1$ که در آن سرویس‌دهنده با روند برنولی به تعطیلی می‌رود را بررسی کردند [۱۶].

چودری مدل‌هایی با تعطیلی تحت خط‌مشی تعطیلی تکی را مطرح کرد [۶]. همچنین یک سامانه صف‌بندی با دو دوره تعطیلی مختلف را مورد بررسی قرار داد. هر چند که یک سامانه صف‌بندی دو مرحله‌ای با زمان سرویس کلی قبلا توسط دوشی مطرح شده بود. دوشی و تاکاجی به‌ترتیب در سال‌های ۱۹۸۶ و ۱۹۹۱ مطالعه‌ی گسترده‌ای در مورد صف‌ها، با دوره‌ی تعطیلی انجام دادند.

## ۸.۱ اهداف تحقیق

در این تحقیق هدف بررسی سامانه‌هایی با نرخ سرویس ثابت است که در این سامانه‌ها، سرویس‌دهنده با یک روند برنولی می‌تواند برای مدتی به تعطیلی برود. در هر یک از مدل‌های مورد بررسی، سرویس‌دهنده با توزیع خاصی تعطیلی را سپری می‌کند. تفاوت در توزیع تعطیلی بر این سامانه‌ها تأثیرگذار است. در این پایان نامه، ابتدا یک توزیع خاص را در نظر می‌گیریم و سپس مدل‌هایی با توزیع کلی را بررسی می‌کنیم. در آخر نتایج حاصل از فرمول‌های تحلیلی را با مثال عددی به دست آورده و به بررسی این مطلب می‌پردازیم که با تغییر کدام یک از کمیت‌ها در یک مدل می‌توانیم طول و زمان انتظار متقاضیان را کاهش دهیم.

# فصل ۲

# سامانه‌ی صف‌بندی $M/D/1$ با تعطیلی دو نوعی و خط‌مشی تعطیلی تکی

## ۱.۲ مقدمه

در این فصل یک مدل صف‌بندی $M/D/1$ را مطالعه می‌کنیم که در آن سرویس‌دهنده می‌تواند به صورت اختیاری، با روند برنولی و توزیع دو نوعی به تعطیلی برود. فرض می‌کنیم پس از تکمیل هر دوره سرویس، سرویس‌دهنده با احتمال $p$ به تعطیلی رفته و یا با احتمال $1-p$ سرویس‌دهی به متقاضی بعدی را شروع می‌کند. متقاضی‌هایی که در دوره‌ی تعطیلی سرویس‌دهنده وارد سامانه می‌شوند باید برای بازگشت سرویس‌دهنده در صف منتظر بمانند. اگر سرویس‌دهنده از تعطیلی بازگردد و سامانه خالی باشد دوباره به تعطیلی می‌رود اما برخلاف این فرض تعطیلی‌های پی در پی را نادیده می‌گیریم و فرض می‌کنیم تعطیلی سرویس‌دهنده همیشه یک تعطیلی تکی است. در این مدل دوره‌ی سرویس برای هر متقاضی قطعی است و دوره‌ی تعطیلی سرویس‌دهنده دارای توزیع دونوعی می‌باشد.

مثال‌های ساده‌ای از مدل صف‌بندی $M/D/1$ وجود دارد که برخی از آن‌ها عبارتند از:

- زمان مسافرت هواپیمای مشخصی بین دو موقعیت معلوم $A$ و $B$. اگر هواپیما را به عنوان یک