دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

گرایش تحقیق در عملیات

گروه ریاضی

یک الگوریتم سیمپلکس ویژه برای حل مسائل جریان ماکسیمم در شبکه ها

نگارش:

مهدی خطابی

استاد راهنما:

دکتر غلام حسن شیر دل

استاد مشاور:

دکتر شهریار فرهمند راد

دی ۹۱

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی من بوده اند

تقدیر و تشکر:

با تشکر و سپاس فراوان از استاد ارجمندم، دکتر غلام حسن تشیردل که در مراحل تهیه این پایان نامه و نیز در طول

مدت تحصیل همواره پشتیبان من بوده و زحمات بسیاری را تحمل گردیدند. و تشکر از دکتر شهریار فرهمند راد که

[redacted] مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفته است، و با سپاس از استاد ارجمند دکتر اسماعیل خرم که با مطالعه و داوری

این پایان نامه و ارائه رهنمودهای ارزشمندشان مرا یاری نموده اند.

چکیده:

مسئله ماکسیمم جریان مقید عبارتست از، ارسال بیشترین جریان ممکن در شبکه بطوریکه تمامی هزینه های جریان فراتر از بودجه تعیین شده نباشد. هرچند مسئله ماکسیمم جریان در شبکه ها از دیرباز مورد توجه محققان بوده، با این حال محققین همواره نگران پیچیدگی زمانی الگوریتم های حل مسئله ماکسیمم جریان بوده‌اند و لذا الگوریتمهایی را در خصوص تسریع حل این مسئله ارائه کردند که بعضاً منجر به بهبود کارایی و تسریع در حل مسائل شبکه ها شده است. در این پایان نامه برای حل مسایل ماکسیمم جریان، یک الگوریتم پیشنهاد شده، که از دو نقطه نظر تئوری و کاربردی مورد بررسی قرار می گیرد و می تواند زمینه را برای طرح ایده هایی مفید و کاربردی در مسائل شبکه ها فراهم کند. در واقع در این روش ما با ارائه مفاهیم جدیدی در شبکه مانند کمان وارد شونده زیر درخت و کمان داخلی زیر درخت متغیرهای دوگان سیمپلکس را محاسبه نموده و الگوریتمی ارائه کرده‌ایم که پیچیدگی زمانی بهتری نسبت به دیگر الگوریتم ها دارد و لذا مسئله ماکسیمم جریان را در مرتبه زمانی بهتری نسبت به سایر الگوریتم ها حل می کند.

کلید واژه ها: شبکه های جریان، ماکسیمم جریان مقید، برنامه ریزی خطی، سیمپلکس شبکه

پیشگفتار:

سرعت در زندگی امروز، یک شاخص تعیین کننده و مهم می باشد و قطعاً ارجحیت در گزینه های مختلف با گزینه ای است که ضمن داشتن عملکرد سریع، سرعت رسیدن به هدفش بیشتر باشد. این موضوع در خصوص برنامه های کامپیوتری نیز مورد توجه بوده چنانکه پژوهش ها همواره بر این اصل قرار گرفته‌اند که متناسب با تکنولوژی های پشرفته، سرعت کامپیوترها را در پردازش مسائل مختلف افزایش دهند. در مسائل مطرح شده در شبکه ها خصوصاً مسئله ماکسیمم جریان، پیچیدگی زمانی الگوریتم یکی از نگرانی های محققان این زمینه بوده بطوریکه پژوهش های زیادی درخصوص پیدا نمودن الگوریتمی با سرعت بهتر در این زمینه شکل گرفته است.

پس از مطرح شدن مسئله ماکسیمم جریان، محققان الگوریتمهای فراوانی در خصوص حل ماکسیمم جریان ارائه کردند که هر یک به نوبه خود معایب و محاسنی داشته و بعضاً توانسته‌اند که سرعت محاسبه جواب را به اندازه قابل توجهی افزایش دهند. از جمله مهمترین این پژوهش ها می توان به الگوریتم برچسب گذاری توسط فورد و فولکرسون در سال ۱۹٥٦ و الگوریتمهای گلوور (۱۹۷٤) ، کلینگمن (۱۹۷۷) و الگوریتمCM-NET توسط مک بریچ(۱۹۸۵)، و الگوریتم آهوجا در سال ۱۹۹۵ اشاره نمود. آنچه مسلم است فرایند تکامل و رشد الگوریتم های ارائه شده برای مسئله ماکسیمم جریان است .

در این پایان نامه فرایند تکاملی فوق را ادامه می دهد و سعی می کند تا با ارائه یک الگوریتم سیمپلکس ویژه، فرایند حل مسئله ماکسیمم جریان در مدت زمان کمتری (با سرعت بیشتری) انجام

پذیرد . بصورت دقیق تر، ما با تقسیم بندی درخت مسئله ماکسیمم جریان به دو زیر درخت مبدأ و مقصد و تعریف مفهوم کمانهای درخت، به کمان وارد شونده زیر درخت و کمان داخلی زیر درخت، که تاثیری زیادی در سرعت حل الگوریتم دارد ،مسئله ماکسیمم جریان را بررسی می کنیم تا بتوانیم سرعت حل مساله را به اندازه قابل توجهی کاهش دهیم و در انتها با مقایسه الگوریتم مورد بررسی با الگوریتم های دیگر ادعای خود را درخصوص سرعت محاسبه الگوریتم سیمپلکس ویژه پیشنهادی ،نسبت به الگوریتمهای دیگر نشان می دهیم.

فصل های این پایان نامه بدین ترتیب ارائه شده‌اند. در فصل اول به بیان تاریخچه ای از مسئله ماکسیمم جریان و ارائه تعاریف و مقدمات مسئله می پردازیم. در فصل دوم الگوریتم دوگان مسئله را تشریح کرده و در فصل سوم به ارائه الگوریتم سیمپلکس ویژه پیشنهادی درخصوص حل مسئله ماکسیمم جریان می پردازیم. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با سایر الگوریتم های موجود در این زمینه را در فصل چهارم انجام می دهیم و با استفاده از آن نتیجه گیری می کنیم.

فصل اول

تعاریف و کلیات

۱-۱- مقدمه:

در این فصل ابتدا بحث را در خصوص تعریف مسئله ماکسیمم جریان شروع می کنیم و سپس در بخش بعدی تاریخچه شکل گیری الگوریتم سیمپلکس را به اختصار توضیح می دهیم و در پایان این فصل تعریف های مورد نیاز در خصوص پیاده سازی این الگوریتم را بیان می کنیم.

۱-۲-ماکسیمم جریان مقید:

فرض کنید $G=(N,A)$ یک شبکه جهت دار باشد که در آن N مجموعه گره ها و A مجموعه کمانهااست. دراین شبکه، جریان روی هر کمان جهتدار (i,j) با متغیرهای نامنفی x_{ij} ، هزینه c_{ij} و ظرفیت u_{ij} نمایش داده می شود.

مسئله ماکسیمم جریان مقید عبارتست از: ارسال بیشترین جریان ممکن از گره مبدأ s به گره مقصد t، بطوری که تمامی هزینه های جریان بیشتر از بودجه D نباشد.

فرض می کنیم همواره یک مسیر از t به s در شبکه وجود دارد بطوریکه هزینه کمان $(t,s)\in A$ را برابر با صفر $c_{ts}=۰$ و ظرفیت آن را بی نهایت $u_{ts}=+\infty$ در نظر می گیریم.

مسئله ماکسیمم جریان مقید را به کمک برنامه ریزی خطی می توان بصورت معادله $[CMF-LP]$ زیر فرموله نمود.

$$[CMF-LP] \qquad \max x_{ts} \qquad (۲.۱)$$

s.t:

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = ۰ \qquad \forall i \in N \qquad (۳.۱)$$

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \leq D \qquad (۴.۱)$$

$$۰ \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (۵.۱)$$

معادله **[CMF-LP]**- مدل ماکسیمم جریان مقید

این مسئله از دو نقطه نظر تئوری و کاربردی مورد بررسی قرار می گیرد و بالقوه می تواند زمینه را برای توسعه های بیشتر مباحث شبکه فراهم آورد. ضمن آنکه مسئله ماکسیمم جریان، خود یکی از مهمترین مسائل کاربردی در شبکه ها می باشد.

دو مثال زیرنمونه هایی از کاربرد مسئله ماکسیمم جریان می باشد.

۱) در شبکه فیزیکی توزیع، هر گره نشانگر مرکز توزیع و هر کمان نشانگر امکان انتقال بین دو مرکز توزیع بوده که دارای هزینه وظرفیت می باشد. هدف این شبکه تعیین ماکسیمم جریان بین تمام گره های مبدأ و مقصد باظرفیت و بودجه محدود می باشد.

۲) درشبکه‌های کامپیوتری، هدف شبکه، پهنای باند(ماکسیمم بسته ها) انتقالی بین مبدا و مقصد با هزینه های انتقالی مشخص و ظرفیتهای محدود می باشد.

در این پایان نامه، ابتدا یک الگوریتم سیمپلکس ویژه برای مسئله ماکسیمم جریان مقید در شبکه ها ارائه می دهیم و سپس سرعت به جواب رسیدن دو الگوریتم CPLEX و LP solver را با الگوریتم سیمپلکس ویژه مقایسه نموده و الگوریتم برتر را بر اساس نتایج حاصل از این مقایسه مشخص می کنیم.

۱-۳- تاریخچه:

مهمترین پژوهشهای انجام گرفته در مساله ماکسیمم جریان را در این بخش مطرح می شود.

بعد از الگوریتم برچسب گذاری توسط فورد[۱]و فولکرسون[۲] در سال ۱۹۵٦، تعداد زیادی الگوریتم کلاسیک برای مسئله ماکسیمم جریان پیشنهاد گردید ازجمله اینکه فولکرسون در سال ۱۹۵۹ الگوریتم ماکسیمم جریان را با اضافه کردن بودجه معین تشریح نمود.

گلوور[۳] (۱۹۷٤) و کلینگمن[٤] با جایگزینی جهت مقید با معادله محافظ جریان در مسئله ماکسیمم جریان و با اضافه کردن تعدادی گره و کمان در شبکه، نشان دادند که الگوریتم فوق توانایی حل مسائل شبکه محض را دارد.

کلینگمن (۱۹۷۵)، راسل[٥] (۱۹۷٦) و گلوور (۱۹۷۸) الگوریتم ویژه ای را برای مسائل حمل و نقل و تخصیص مقید ارائه کردند. گلوور و مک بریج[٦] (۱۹۷٦) چارچوبی کلی برای تعیین محل ساختار شبکه در الگوریتم سیمپلکس را پیشنهاد دادند. در سال ۱۹۸۵ مک بریچ یک الگوریتم سیپملکس ویژه به نام CM-NET را که در شبکه های جهتدار مقید کاربرد داشت، ارائه نمود.

---

[۱] Ford
[۲] Fulkerson
[۳] Glover
[٤] Klingman
[٥] Russell
[٦] McBride

در سال ۱۹۹۵ آهوجا[۱] و اورلین[۲]، مسئله ماکسیمم جریان مقید را معرفی و الگوریتمی برای حل آن پیشنهاد نمودند که مبنای بحث ما در این پایان نامه است . در واقع ما در الگوریتم پیشنهادی، نقاطی را که در الگوریتم آهوجا و اورلین به جواب همگرا نمی شود ، از الگوریتم خارج کرده ودر نتیجه الگوریتم آنها را بهبود می دهیم.

برای ادامه بحث به تعاریف و مقدماتی نیاز داریم که در زیر به بیان آنها می پردازیم.

۱-٤- کلیات و تعاریف:

در این بخش تعدادی از تعاریف اولیه الگوریتم را به تفصیل بررسی کرده و بعضی از تعاریف مورد نیاز الگوریتم را به علت پیوستگی مطالب به فصل های بعدی موکول می کنیم.

اساس الگوریتم ماکسیمم جریان مقید شامل یک جفت زیر درخت ریشه دار می باشد که بوسیله کمان (t,s) به هم متصلند. بدین منظور درخت پوشای T را به دو زیر درخت مبدأ S و زیر درخت مقصد Z نشانه گذاری می کنیم.

S = {مجموعه ای از کمانهای زیر درخت مبدأ}

Z = { مجموعه ای از کمانهای زیردرخت مقصد}

در نهایت درخت پوشای T به دو زیر درخت S و Z تقسیم می شود.

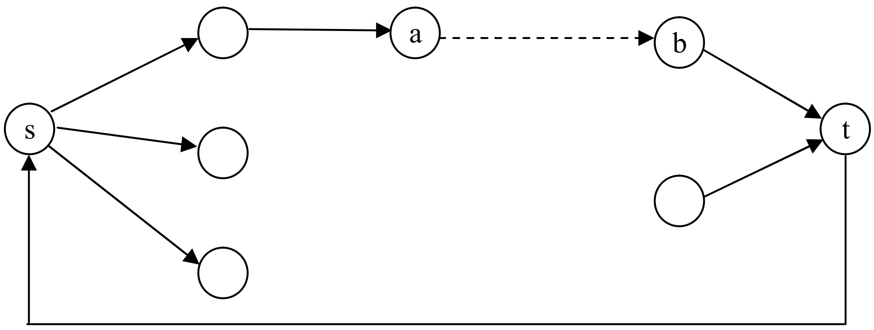
[۱] Ahuja
[۲] Orlin

تعریف ۱.۱ :

در مسئله ماکسیمم جریان، چند کمان پایه ای، دور منحصربفردی را روی درخت پوشای T می سازند که به این دور منحصربفرد، دوربنیادی[۱] می نامیم. کمان پایه‌ای را با $\Psi(a,b)$ و هزینه آن را با $C\Psi(a,b)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱:

در دور بنیادی منحصر به فرد روی درخت پوشای T، اگر کمان (a,b) دو زیر درخت متفاوت را به هم متصل کند، کمان $\Psi(a,b)$ را کمان وارد شونده زیر درخت[۲] می نامیم. (شکل (۱.۱)).

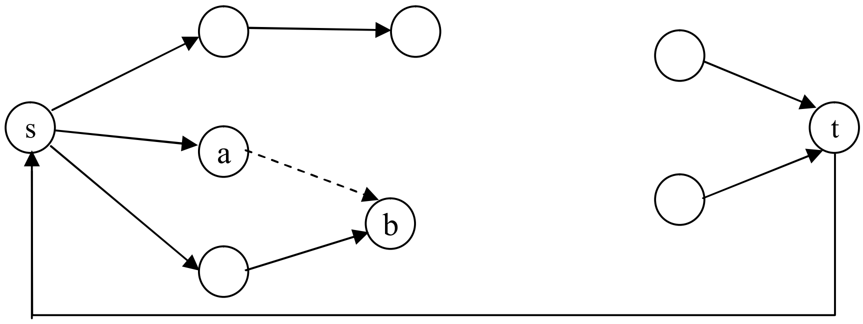


شکل (۱.۱) – کمان واردشونده زیردرخت

[۱] Fundamental Cycle
[۲] inter- subtree arc

تعریف ۳.۱:

در دور بنیادی منحصر به فرد روی درخت پوشای T ، اگر کمان (a,b) دو زیر درخت مشابه را به هم متصل کند، کمان $\Psi(a,b)$ را کمان داخلی زیردرخت[۱] می نامیم.(شکل (۲.۱))



شکل (۲.۱)- کمان داخلی زیردرخت

[۱] intra-subtree arc

فصل دوم
دوگان الگوریتم سیمپلکس ویژه

۲-۱- مقدمه :

در این فصل با توجه به تعاریف اولیه الگوریتم سیمپلکس ویژه ماکسیمم جریان که در فصل اول ارائه شد، ابتدا قضیه‌ای را در خصوص غیرصفر بودن هزینه $\psi(a,b)$ بررسی می کنیم و سپس به وضعیت بهینگی الگوریتم، دوگان مسئله و محاسبه جریانها خواهیم پرداخت.

همچنین در این فصل خواهیم دید که در الگوریتم پیشنهادی می توان متغیرهای دوگان و وضعیت بهینگی را با کمترین محاسبات بدست آوریم.

۲-۲- هزینه[۶] دوربنیادی :

قضیه۲.۱: برای یک پایه B از مسئله ماکسیمم جریان مقید مفروض داریم $C\psi(a,b) \neq ۰$.

برهان: فرض کنیم $C\psi(a,b) = ۰$. اگر تمامی ستون‌های مسئله ماکسیمم جریان متناظر با کمانهای $\psi(a,b)$ را اضافه کنیم، ماتریس وقوع- یال گراف بدست آمده یک گراف همبند می باشد که معادله محافظ جریان آن صفر می باشد.

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = ۰$$

به عبارت دیگر مجموع سطرهایش صفر می باشد. همچنین $\psi(a,b)$ متناظر با سطر بودجه مقید برابر با صفر می باشد. یعنی $\psi(a,b) = ۰$و لذا داریم:

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} = ۰$$

این بدان معنی است که تمامی کمانها مستقل خطی نیستند و B نمی تواند یک پایه باشد و این یک تناقض است. بنابراین $C\psi(a,b) \neq ۰$ □

در الگوریتم سیمپلکس ویژه ماکسیمم جریان مقید، اگر ماکسیمم جریان از s به t ازبودجه مقید تجاوز نکند، الگوریتم به جواب بهینه رسیده است در غیر این صورت جواب بهینه باید کاملاً در بودجه مقید صدق کند.

۲-۳- وضعیت بهینگی

برای اینکه بتوانیم وضعیت بهینگی الگوریتم را بررسی کنیم، ابتدا مسئله دوگان ماکسیمم جریان را درنظر گرفته وسپس هزینه های تقلیل یافته مسئله دوگان را محاسبه می کنیم.

۲-۳-۱- دوگان مسئله ماکسیمم جریان مقید:

اگر متغیرهای دوگان π , λ را به ترتیب متناظر با معادله جریانی و بودجه مقید مسئله اولیه در نظر بگیریم، مسئله دوگان مسئله ماکسیمم جریان مقید بصورت زیر می باشد.

$$
\begin{aligned}
& \min D\lambda \\
& \text{S.t:} \\
& \pi_i - \pi_j + \lambda c_{ij} \geq 0 \\
& \lambda \geq 0 \\
& \pi \text{ آزاد در علامت}
\end{aligned}
\qquad (۱.۲)
$$

$$
\begin{aligned}
& \max x_{ts} \\
& \text{S.t:} \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = 0 \\
& \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \leq D \\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}
\end{aligned}
\qquad (۲.۲)
$$

برای اینکه وضعیت بهینگی مسئله را بررسی کنیم باید هزینه تقلیل یافته متغیرهای غیرپایه ای را محاسبه نماییم. از این رو داریم:

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - z_{ij} \Rightarrow c_{ij} - wa_{ij} = 0 - \pi_i + \pi_j - \lambda c_{ij}$$

ولذا :

$$\overline{c_{ij}} = -\pi_i + \pi_j - \lambda c_{ij} \qquad (۳.۲)$$

در مسئله ماکسیمم جریان، مجموعه کمان های کران بالا را با U و مجموعه کمان های کران پایین را با L نمایش می دهیم. اکنون داریم:

X یک جواب بهینه است اگر و فقط اگر:

$$\begin{aligned} &\bar{c}_{ij} \le 0 \qquad (i,j) \in L \text{ برای هرکمان} \\ &\bar{c}_{ij} \ge 0 \qquad (i,j) \in U \text{ برای هر کمان} \end{aligned} \qquad (٤.۲)$$

اگر هزینه تقلیل یافته هر کمان در شرط بهینگی الگوریتم صدق نکند، کمان غیر پایه ای را وارد پایه می کنیم و جواب را بهبود می بخشیم.

برای محاسبه هزینه تقلیل یافته کمانهای غیرپایه‌ای ، نیاز است مقادیر متغیرهای دوگان π,λ را تعیین کنیم. لذا قضیه زیر نشان می دهد که با توجه به مفاهیم کمان وارد شونده زیر درخت و کمان داخلی زیر درخت می توان λ را به راحتی محاسبه نمود.

قضیه۲.۲:اگر (a,b) کمان وارد شونده زیردرخت از S به Z باشد، آنگاه $\lambda = \dfrac{1}{C\psi(a,b)}$ و اگر (a,b) کمان وارد شونده زیردرخت از Z به S باشد ، آنگاه $\lambda = \dfrac{-1}{C\psi(a,b)}$ و اگر (a,b) کمان داخلی زیردرخت باشد ،آنگاه $\lambda = 0$.

برهان : ابتدا فرض می کنیم که (a,b) یک کمان وارد شونده زیردرخت از S به Z باشد.

P را مسیری از s به t که شامل مسیر درخت منحصر به فرد از s به a و کمان (a,b) و مسیر درخت منحصر به فرد از b به t تعریف می کنیم و تمامی کمانها در مسیر P هم جهت با (a,b) باشد. از این رو P یک درخت می باشد و به ازای هر کمان $(i,j)\in P$ هزینه تقلیل یافته هر کمان برابر با صفر می باشد.ازاینرو داریم $\bar{c}_{ij}=۰$ همچنین :

$$\sum_{(i,j)\in P}\bar{c}_{ij}=\sum_{(i,j)\in P}(-\pi_i+\pi_j-\lambda c_{ij})=-\pi_s+\pi_t-\lambda\sum_{(i,j)\in P}c_{ij}=۰$$

کمان (t,s) پایه و متناظر با قید دوگان x_{ts} می باشد پس $-\pi_s+\pi_t=۱$ می باشد.

$$\lambda\sum_{(i,j)\in P}c_{ij}=\lambda C\psi(a,b)=۱\Rightarrow\lambda=\frac{۱}{C\psi(a,b)}$$

و با یک استدلال مشابه، اگر جهت (a,b) از Z به S باشد $\lambda=-\frac{۱}{C\psi(a,b)}$ می باشد.

حال فرض کنیم (a,b) یک کمان داخلی زیردرخت است و تمامی کمانهای (a,b) هم جهت با $\psi(a,b)$ باشد ،و به ازای هر کمان $(i,j)\in\psi(a,b)$ داریم $\bar{c}_{ij}=۰$

$$\sum_{(i,j)\in\psi(a,b)}\bar{c}_{ij}=\sum_{(i,j)\in\psi(a,b)}(-\pi_i+\pi_j-\lambda c_{ij})=-\lambda\sum_{(i,j)\in\psi(a,b)}\bar{c}_{ij}=-\lambda C\psi(a,b)=۰$$

بنا به قضیه۱.۲ داریم:

$$C\psi(a,b)\neq۰ \qquad\qquad \lambda=۰ \qquad \square$$

با توجه به قضیه فوق ملاحظه می شود که اگر (a,b) کمان داخلی زیردرخت باشد ، آنگاه هزینه های تقلیل یافته را می توانیم آن بدون نیاز به محاسبه توان صفر تعیین می گردد. همچنین اگر کمان (a,b)، کمان وارد شونده زیر درخت، و جهت آن از S به Z باشد، هزینه تقلیل یافته آن برابر با ۱ و در غیر اینصورت برابر با ۱− می باشد.

۲-٤ – محاسبهٔ جریان کمان های پایه :

در الگوریتم سیمپلکس ویژه نیازی به محاسبه جریانها وجود ندارد اما لازم است نحوه به روز رسانی جریانها را بررسی کنیم.

مقادیر جریانهای پایه هر کمانی که در دور بنیادی وجود دارد مانند (a,b) در معادله $x_{ab}=۰$ صدق کند و همچنین پیچیدگی زمانی محاسبه جریانها برابر با $O(m)$ است.[۱]

لازم به ذکر است جریانهای پیرامون دور بنیادی حتماً باید دربودجه مقید صدق کنند.

۲-۵- محاسبه متغیرهای دوگان:

به ازای هر کمان (i,j) عضو پایه B، هزینه تقلیل یافته کمانها صفر می باشد. همچنین اگر کمان $(i,j)\in T\setminus(t,s)$ باشد هزینه تقلیل یافته بصورت زیر می باشد:

$$-\pi_i+\pi_j-\lambda c_{ij}=۰$$

ولی اگر کمان $(i,j)\in(t,s)$ باشد با جایگزینی $(i=t,j=s)$ و بنا به قضیه۲.۲ $\lambda=\frac{-۱}{C\psi(a,b)}$ وهزینه تقلیل یافته بصورت زیر تعریف می شود.

$$۱-\pi_t+\pi_s=۰$$

و بطور کلی داریم:

$$\begin{cases}-\pi_i+\pi_j-\lambda c_{ij}=۰ & (i,j)\in T\setminus(t,s)\\ ۱-\pi_t+\pi_s=۰ & (i,j)\in(t,s)\end{cases} \qquad (۵.۲)$$

با توجه به اینکه π متناظر با معادلهٔ جریانی در مسئله ماکسیمم جریان مقید می باشد متغیر منحصر به فرد دوگان π_α را که از گره s تا گره t به ترتیب زیردرخت های Sو Z را می پیماید

تعریف می کنیم و فرض می کنیم $\pi_s = ۰ , \pi_t = ۱$. محاسبه π_α وقتی که هزینه های تقلیل یافته کمان ها گره α را ملاقلات می کنند بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$\pi_\alpha = \begin{cases} \lambda \sum_{(i,j)\in P_\alpha} \mp c_{ij} & if \quad \alpha \in S \\ ۱ - \lambda \sum_{(i,j)\in P_\alpha} \mp c_{ij} & if \quad \alpha \in Z \end{cases} \tag{٦.٢}$$

به ازای تمامی گره های $\alpha \in N \setminus \{s,t\}$.

P_α مسیر منحصر به فردی از s تا α (اگر $(\alpha \in S)$) و یا مسیر منحصر به فردی از α تا t (اگر $\alpha \in Z$) می باشد:

$$P_\alpha = \begin{cases} \text{مسیرمنحصر به فرد از s تا } \alpha & if \ \alpha \in S \\ \text{مسیر منحصر به فردی از } \alpha \text{ تا t} & if \ \alpha \in Z \end{cases} \tag{٧.٢}$$

تعریف ۱.۲: کمان پیشرو[۱] کمانی است که جهت آن از گره s بسوی گره t باشد.

در معادله (٦.٢)، وقتی که (i,j) یک کمان پیشرو باشد علامت c_{ij} مثبت است و وقتی که (i,j) کمان برگشتی[۲] باشد علامت c_{ij} منفی است.

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{مثبت} & \text{(i,j) کمان پیشرو باشد} \\ \text{منفی} & \text{(i,j) کمان برگشتی باشد} \end{cases} \tag{٨.٢}$$

عبارت $\sum_{(i,j)\in P_a} \mp c_{ij}$ هزینه شبکه برای پیمایش هر واحد در مسیر منحصر به فرد درخت P_α است و هنگامی که (a,b) کمان داخلی زیردرخت باشد ، نیازی به محاسبه متغیرهای دوگان نیست و بصورت زیر تعریف می شود:

---
[۱] forward arc
[۲] return arc