دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

زیردیفرانسیل حدی انتگرال نامعین و کاربرد آن در بهینه‌سازی

استاد راهنما

سرکار خانم دکتر محبوبه رضایی

استاد مشاور

جناب آقای دکتر مجید فخار

پژوهشگر

نسیم ذوالفقاری

آبان ۱۳۹۱

چکیده

موضوع این پایان‌نامه مربوط به زیردیفرانسیل حدی انتگرال نامعین و ارتباط آن با مسئله‌ی بهینه‌سازی است. با استفاده از مفهوم زیردیفرانسیل فرشه، زیردیفرانسیل حدی انتگرال نامعین را از یک تابع در سه حالت مختلف بدست می‌آوریم. مفاهیمی مانند زیردیفرانسیل کلارک و انتگرال تابع مجموعه مقدار را مطرح کرده و سپس با محاسبه‌ی انتگرال تابع زیردیفرانسیل کلارک، انتگرال تابع زیردیفرانسیل حدی و فرمول تعمیم یافته‌ی نیوتن-لایبنیتز را بدست می‌آوریم. مجموعه‌های $F^{\bar{x}}$ و $D^{\bar{x}}$ را معرفی و شرایط لازم و کافی بهینه برای مسئله‌ی بهینه‌سازی چند مقداری غیر هموار و مسئله‌ی برنامه‌ریزی نیم‌نامتناهی غیر هموار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

زیردیفرانسیل کلارک یکی از مهم‌ترین مفاهیم در آنالیز غیر هموار است. در سال ۱۹۸۳ کلارک [۱] [۷] زیردیفرانسیل را از تابع انتگرال $G(x) = \int_\Omega g(x,t)d\mu(t)$ که (Ω, μ) فضای اندازه‌ی مثبت، U یک زیر مجموعه‌ی باز از یک فضای باناخ و g تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $U \times \Omega$ است، بدست آورد. در سال ۱۹۷۶ زیردیفرانسیل حدی توسط موردوخوویچ [۲] [۲۲] معرفی شد که نقش اساسی در آنالیز مجموعه مقدار دارد و برخلاف زیردیفرانسیل کلارک همیشه محدب نیست. او علاقه‌مند بود فرمولی برای زیردیفرانسیل حدی $G(.)$ بدست آورد که این مسئله تاکنون اثبات نشده است. با فرض این‌که μ اندازه‌ی لبگ روی $[a,b]$ و $\Omega = [a,b]$ و تابع g با ضابطه‌ی

$$g(x,t) = \begin{cases} f(t) & t \in [a,x] \\ 0 & t \in (x,b] \end{cases}$$

باشد، داریم

$$G(x) = \int_\Omega g(x,t)d\mu(t) = \int_a^x f(t)dt.$$

---

[۱] Clarke
[۲] Mordukhovich

بنابراین $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ حالت خاصی از $G(x)$ است. ما در این پایان‌نامه زیردیفرانسیل حدی F را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

خصوصیات زیردیفرانسیل حدی نقش قابل توجهی برای رسیدن به شرایط بهینه در مسائل بهینه‌سازی غیر هموار دارد. اخیراً توجه زیادی به مشخصه سازی شرایط لازم و کافی بهینه برای مسئله‌ی بهینه‌سازی چندمقداری شده است. این مسئله تحت شرایط هموار توسط محققانی از جمله هن سون و موند[3] [۱۰]، میشرا[4] ([۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]) و سلیمانی-دامنه[5] [۳۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. محققانی از جمله میشرا[6] ([۲۰]، [۲۱]) و یانگ[7] [۳۴]، این مسئله را تحت شرط مشتق‌ناپذیری مورد بررسی قرار داده‌اند. از طرفی تعداد زیادی از محققین به دلیل کاربرد وسیع مسئله‌ی برنامه‌ریزی نیم‌نامتناهی در زمینه‌های مختلف ریاضیات، اقتصاد و مهندسی به تحقیق در این موضوع پرداخته‌اند ([۹]، [۱۱]، [۱۴]، [۲۹]). شرایط لازم و کافی بهینه برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی نیم‌نامتناهی غیر هموار با استفاده از زیردیفرانسیل کلارک توسط کنزی و نوبختیان[8] [۱۳] بررسی شده است.

در این پژوهش به بررسی زیردیفرانسیل حدی انتگرال نامعین می‌پردازیم و همچنین شرایط لازم و کافی بهینه را برای مسئله‌ی بهینه‌سازی چندمقداری غیر هموار و مسئله‌ی برنامه‌ریزی

[3] Hanson,Mond
[4] Mishra
[5] Soleimani-damaneh
[6] Mishra
[7] Yang
[8] Kanzi,Nobakhtian

نیم‌نامتناهی غیر هموار با استفاده از زیردیفرانسیل حدی مورد بحث قرار می‌دهیم.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد.

در فصل اول با استفاده از [۱]، [۲]، [۷]، [۸]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۷] و [۲۸] به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایای کلیدی می‌پردازیم.

در فصل دوم با استفاده از [۵] و [۶] به مفهوم مشتق‌پذیر اکید هادامارد و انتگرال تابع مجموعه مقدار می‌پردازیم. انتگرال تابع زیردیفرانسیل کلارک از یک تابع لیپشیتز تعریف شده روی فضای باناخ تفکیک‌پذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم و به کمک آن انتگرال تابع زیردیفرانسیل حدی از یک تابع لیپشیتز تعریف شده روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ را بدست می‌آوریم. علاوه بر این ضمن بیان شرایط تک مقداری بودن انتگرال تابع زیردیفرانسیل کلارک، فرمول تعمیم یافته‌ی نیوتن- لایبنیتز را بدست می‌آوریم.

در فصل سوم با استفاده از [۵] زیردیفرانسیل حدی $\partial F(\bar{x})$ از $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ را در سه حالت مختلف

۱. f یک تابع اندازه‌پذیر به طور اساسی کران‌دار روی $[a, b]$ است.

۲. f یک تابع پیوسته روی یک فاصله شامل $\bar{x}$ به جز احتمالاً خود $\bar{x}$ است.

۳. f یک تابع پله‌ای است که تعداد شمارش‌پذیر پله حول $\bar{x}$ دارد.

بدست می‌آوریم.

علاوه بر این با ارائه‌ی چند مثال نشان می‌دهیم زیردیفرانسیل حدی انتگرال نامعین از یک

تابع اندازه‌پذیر به طور اساسی کران‌دار می‌تواند یک فاصله‌ی بسته‌ی تنها یا اجتماع مجزایی از دو فاصله‌ی بسته باشد. در واقع در این حالت زیردیفرانسیل حدی همیشه محدب نیست. همچنین شرط تحدب آن را بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم با استفاده از [۱۵] و [۳۱] به مفهوم توابع محدب-پایا و زیردیفرانسیل حدی با استفاده از زیردیفرانسیل پروکسیمال پرداخته و شرایط لازم و کافی بهینه را برای مسئله‌ی بهینه‌سازی چندمقداری غیر هموار و مسئله‌ی برنامه‌ریزی نیم‌نامتناهی غیر هموار، با استفاده از زیردیفرانسیل حدی مورد بحث قرار می‌دهیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با استفاده از مراجع [۱]، [۲]، [۷]، [۸]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۷] و [۲۸] مفاهیم اولیه را که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین در تمام این فصل فرض می‌کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند و تابع $g : X \longrightarrow Y$ در نظر می‌گیریم.

۱.۱ مقدمات

تعریف ۱.۱.۱. $A \subseteq X$ را یک مجموعه‌ی محدب[۱] می‌نامند اگر برای هر $x, y \in A$ و هر $\lambda \in [0, 1]$،

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $A \subseteq X$ باشد. در این صورت کوچک‌ترین مجموعه‌ی

[۱] Convex

محدب شامل A را غلاف محدب[۲] A گویند و با coA نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را همگن مثبت [۳] گویند هرگاه

$$f(tx) = tf(x), \quad \forall t \geqslant 0.$$

تعریف ۴.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را روی X لیپشیتز[۴] گویند هرگاه اسکالر نامنفی k به گونه‌ای وجود داشته باشد که

$$|f(x) - f(x')| \leqslant k \parallel x - x' \parallel, \qquad \forall x, x' \in X.$$

تابع f نزدیک x لیپشیتز است هرگاه روی یک همسایگی x لیپشیتز باشد.

در صورتی‌که f در نزدیکی هر نقطه‌ی X لیپشیتز باشد تابع f را روی X موضعاً لیپشیتز می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. منظور از اپی‌گراف [۵] تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ عبارت است از

$$epif = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \leqslant \lambda\}.$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید K زیر مجموعه‌ی غیر تهی X باشد. در این صورت تابع محمل [۶] K که روی X^* تعریف و با $\sigma(K, .)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از

$$\sigma(K, x^*) = \sup\{ \langle x, x^* \rangle \ : \ x \in K \}.$$

[۲] Convex hall
[۳] Positively homogeneous
[۴] Lipschitz
[۵] Epigraph
[۶] Support function

تعریف ۷.۱.۱. گردایه‌ی $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک σ-جبر [۷] در X گویند اگر $\mathfrak{M}$ از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱. $X \in M$؛

۲. هرگاه $A \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

۳. هرگاه $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای $n = 1, 2, 3, \cdots$، $A_n \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A \in \mathfrak{M}$.

اگر $\mathfrak{M}$ یک σ-جبر در X باشد، آن‌گاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامند.

تعریف ۸.۱.۱. یک اندازه‌ی [۸] مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ-جبر مانند $\mathfrak{M}$ تعریف می‌شود و جمعی شمارش‌پذیر می‌باشد. به این معنی که اگر $\{A_i\}$ گردایه‌ی شمارش‌پذیر واز هم جدا از اعضای $\mathfrak{M}$ باشد، آن‌گاه

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

همچنین $\mu(\emptyset) = 0$.

تعریف ۹.۱.۱. هر فضای اندازه یک فضای اندازه‌پذیر است که یک اندازه‌ی مثبت تعریف شده بر σ-جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر خود داشته باشد.

---

[۷] Algebra
[۸] Measure

تعریف ۱۰.۱.۱. هرگاه $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه، $E \in \mathfrak{M}$ و $\mu(E) = 0$ باشد، آن‌گاه E را یک مجموعه از اندازه‌ی صفر می‌نامند.

اگر خاصیتی در مورد نقاط $x \in X$ درست باشد مگر روی یک مجموعه از اندازه‌ی صفر، آن‌گاه خاصیت فوق تقریباً همه جا [۹] برقرار است و با $(a.e)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای اندازه‌ی $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ کامل [۱۰] است هرگاه $B \in \mathfrak{M}$، $\mu(B) = 0$ و $A \subseteq B$ نتیجه دهد $A \in \mathfrak{M}$.

تعریف ۱۲.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی [۱۱] است هرگاه $\{x \ : \ f(x) > \alpha\}$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ باز باشد. اگر $\{x \ : \ f(x) < \alpha\}$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ باز باشد، f نیم‌پیوسته‌ی بالایی [۱۲] است.

تعریف ۱۳.۱.۱. مشتق جهتی[۱۳] تابع g در نقطه‌ی x و در جهت $v \in X$ را با $g'(x, v)$ نمایش می‌دهند و عبارت است از

$$g'(x, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(x + tv) - g(x)}{t}.$$

مشروط به این‌که حد راست وجود داشته باشد.

[۹] Almost everywhere
[۱۰] Complete
[۱۱] Lower semicontinuous
[۱۲] Upper semicontinuous
[۱۳] Directional derivative

تعریف ۱.۱.۱۴. تابع g را در x مشتق‌پذیر فرشه[۱۴] گویند هرگاه تابع خطی پیوسته‌ی $g'(x) : X \longrightarrow Y$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که

$$\lim_{\|v\|\longrightarrow 0} \frac{\| g(x+v) - g(x) - \langle g'(x), v\rangle \|}{\| v \|} = 0.$$

تعریف ۱.۱.۱۵. تابع $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ را در نظر بگیرید. منظور از $u \xrightarrow{f} x$ عبارتست از

$$u \longrightarrow x,\ f(u) \longrightarrow f(x).$$

و برای $\Omega \subset X$ عبارت $u \xrightarrow{\Omega} x$ یعنی $u \longrightarrow x$ و $u \in \Omega$.

قضیه ۱.۱.۱۶. هر تابع لیپشیتز تعریف شده روی زیر مجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ تقریباً همه جا مشتق پذیر است.

اثبات. به [۲۷] رجوع شود. □

۱.۲ توابع مجموعه مقدار

تعریف ۱.۲.۱. تابع مجموعه مقدار $G : X \rightrightarrows Y$ را در نظر بگیرید. منظور از دامنه‌ی G عبارت است از

$$\operatorname{Dom} G = \{x \in X \ : \ G(x) \neq \emptyset\}.$$

[۱۴] Frechet differentiable

تعریف ۲.۲.۱. تابع مجموعه مقدار $G : X \rightrightarrows Y$ در $x \in \operatorname{Dom} G$ نیم‌پیوسته‌ی بالایی است اگر و فقط اگر برای هر همسایگی U از $G(x)$، $\eta > 0$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که

$$G(x') \subset U, \qquad \forall x' \in B(x, \eta).$$

تعریف ۳.۲.۱. تابع مجموعه مقدار $G : X \rightrightarrows Y$ در $x \in \operatorname{Dom} G$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی است اگر و فقط اگر برای هر $y \in G(x)$ و برای هر دنباله‌ی $(x_n) \in \operatorname{Dom} G$ که $x_n \longrightarrow x$ دنباله‌ی $(y_n) \in G(x_n)$ وجود داشته باشد به طوری که $y_n \longrightarrow y$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ فضای اندازه‌ی σ-متناهی کامل و $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ یک تابع مجموعه مقدار از Ω به خانواده‌ی زیرمجموعه‌های بسته‌ی غیر تهی $\mathbb{R}^n$ باشد. G را اندازه‌پذیر [۱۵] گویند هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز W از $\mathbb{R}^n$،

$$G^{-1}(W) = \{ x \in \Omega \ : \ G(x) \cap W \neq \emptyset \} \in \mathscr{A}.$$

تابع G را کران‌دار انتگرال‌پذیر [۱۶] گویند هرگاه تابع نامنفی $K(.) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n, \mu)$ وجود داشته باشد به طوری که تقریباً همه جا روی Ω،

$$G(x) \subset K(x) B_{\mathbb{R}^n},$$

[۱۵] Measurable
[۱۶] Integrably bounded

که $B_{\mathbb{R}^n}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$B_{\mathbb{R}^n} = \{\, y \in \mathbb{R}^n \ : \ \|y\| \leqslant ۱ \,\}.$$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $G : X \rightrightarrows X^*$ تابع مجموعه مقدار بین فضای باناخ X و دوگان توپولوژیکی X^* باشد. حد بالایی پینلو-کوروتوفسکی [۱۷] دنباله‌ای تحت توپولوژی نرمی X و توپولوژی ضعیف ستاره‌ی X^* عبارت است از

$$\limsup_{u\longrightarrow x} G(u) = \big\{x^* \in X^* \ : \ \exists u_k \longrightarrow x, \ x_k^* \xrightarrow{w^*} x^* \\ s.t \ \ x_k^* \in G(u_k) \quad \forall k = ۱, ۲, ...\big\}.$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در نزدیکی $x \in X$ لیپشیتز باشد. مشتق جهت‌دار تعمیم یافته‌ی کلارک [۱۸] تابع f در نقطه‌ی x و در جهت $v \in X$ را با $f^\circ(x,v)$ نمایش می‌دهند و عبارت است از

$$f^\circ(x,v) = \limsup_{\substack{x'\longrightarrow x \\ t\downarrow ۰}} \frac{f(x'+tv) - f(x')}{t}.$$

همچنین زیردیفرانسیل کلارک [۱۹] تابع f در نقطه‌ی x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_c f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi, v\rangle \leqslant f^\circ(x,v) \quad \forall v \in X\}.$$

[۱۷] Painleve-Kuratowski
[۱۸] Clarke generalized directional derivative
[۱۹] Clarke subdifferential

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در نزدیکی $x \in X$ لیپشیتز باشد. f را در x منظم کلارک [۲۰] گویند هرگاه برای هر $v \in X$ مشتق جهتی $f'(x,v)$ وجود داشته باشد و شرط زیر برقرار باشد:

$$f^{'}(x,v) = f^{\circ}(x,v), \qquad \forall v \in X.$$

گزاره ۸.۲.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ نزدیک $x \in X$ لیپشیتز باشد. اگر f محدب باشد، آن‌گاه f در x منظم کلارک است.

اثبات. به [۷] رجوع شود. □

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید تابع $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ در x متناهی $(|f(x)| < \infty)$ و $\varepsilon \geqslant \circ$ باشد. ε-زیر دیفرانسیل فرشه‌ی [۲۱] تابع f در x با $\hat{\partial}_{\varepsilon} f(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\partial}_{\varepsilon} f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ \liminf_{u \longrightarrow x} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x\rangle}{\parallel u - x \parallel} \geqslant -\varepsilon\}.$$

اگر $|f(x)| = \infty$، آن‌گاه

$$\hat{\partial}_{\varepsilon} f(x) = \emptyset.$$

وقتی $\varepsilon = \circ$، مجموعه‌ی $\hat{\partial}_{\circ} f(x)$ با $\hat{\partial} f(x)$ نمایش داده می‌شود و به آن زیردیفرانسیل فرشه‌ی f در x می‌گویند.

[۲۰] Clarke regular
[۲۱] Frechet subdifferential

اگر تابع f حول x نیم‌پیوسته‌ی پایینی باشد و $\dim X < \infty$، آن‌گاه زیردیفرانسیل حدی [۲۲] تابع f در x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial f(x) = \limsup_{u \xrightarrow{f} x} \hat{\partial} f(u).$$

قضیه ۱.۲.۱۰. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ نزدیک $\bar{x}$ لیپشیتز باشد. در این صورت

$$\partial_c f(\bar{x}) = \overline{co}\, \partial f(\bar{x}).$$

اثبات. به [۲۳] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱.۲.۱۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق پیوسته باشد. در این صورت f منظم کلارک است و

$$\partial_c f(x) = \{f^{'}(x)\}.$$

اثبات. به [۸] رجوع کنید. $\square$

[۲۲] Limiting subdifferential

فصل ۲

انتگرال تابع زیردیفرانسیل و فرمول تعمیم یافته‌ی نیوتن-لایبنیتز

در این فصل انتگرال تابع زیردیفرانسیل کلارک و انتگرال تابع زیردیفرانسیل حدی از یک تابع لیپشیتز تعریف شده روی فضای باناخ تفکیک‌پذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین شرایط تک مقداری بودن انتگرال تابع زیردیفرانسیل کلارک از یک تابع لیپشیتز تعریف شده روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^n$ را مطالعه می‌کنیم . در پایان با قرار دادن زیردیفرانسیل کلارک و انتگرال تابع مجموعه مقدار به جای مشتق فرشه و انتگرال لبگ، فرمول تعمیم یافته‌ی نیوتن-لایبنیتز را بدست می‌آوریم.

۱.۲ انتگرال تابع زیردیفرانسیل کلارک و انتگرال آیومان تابع زیردیفرانسیل حدی

در این بخش فرض می‌کنیم X, Y فضاهای باناخ و $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ فضای اندازه‌ی σ-متناهی کامل باشند. مطالب این بخش تا آخر قضیه ۱۲.۱.۲ با استفاده از مرجع [۶] می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ تابع مجموعه مقدار از Ω به خانواده‌ی زیرمجموعه‌های بسته‌ی غیرتهی $\mathbb{R}^n$ باشد. مجموعه‌ی انتخاب‌های انتگرال‌پذیر[۱] G با $\mathcal{G}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{G} = \{g \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n, \mu) \ : \ g(x) \in G(x) \quad a.e \quad x \in \Omega\}.$$

همچنین انتگرال G روی Ω مجموعه انتگرال‌های انتخاب‌های انتگرال‌پذیر از G است و به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_\Omega G d\mu = \{\int_\Omega g d\mu \ : \ g \in \mathcal{G}\}.$$

اگر $g = (g_1, \cdots, g_n)$، آن‌گاه

$$\int_\Omega g d\mu = (\int_\Omega g_1 d\mu, \cdots, \int_\Omega g_n d\mu).$$

تعریف ۲.۱.۲. تابع $f : X \longrightarrow Y$ در $x_0 \in X$ مشتق‌پذیر اکید هادامارد[۲] است هرگاه

[۱] Integrable selections

[۲] Strictly hadamard differentiable

تابع خطی پیوسته‌ی $D_sf(x_\circ) : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_\circ \\ t \downarrow \circ}} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = D_sf(x_\circ)v.$$

گزاره ۳.۱.۲. فرض کنید تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در x مشتق‌پذیر اکید هادامارد باشد در این صورت f نزدیک x لیپشیتز است و $\partial_c f(x) = \{D_sf(x)\}$. برعکس، اگر f نزدیک x لیپشیتز و $\partial_c f(x)$ تک مقداری $\{\xi\}$ باشد، آن‌گاه تابع f در x مشتق‌پذیر اکید هادامارد است و $D_sf(x) = \xi$.

اثبات. به [۷] رجوع کنید. □

قضیه ۴.۱.۲ (قاعده‌ی زنجیری)**.** توابع $F : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید F در x مشتق‌پذیر اکید هادامارد و g حول $F(x)$ لیپشیتز باشد. در این صورت $f = g \circ F$ حول x لیپشیتز است و

$$\partial_c f(x) \subset \partial_c g(F(x)) \circ D_sF(x).$$

اگر g یا $-g$ در $F(x)$ منظم باشد تساوی برقرار است.

اثبات. به [۷] رجوع کنید. □

در قضایای ۵.۱.۲، ۶.۱.۲ و ۷.۱.۲ تابع $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ تابعی مجموعه مقدار با تصویر بسته و غیرتهی است و Ω زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.