وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

میانگین‌پذیری توسیع‌های مدولی جبرهای باناخ دوگان

توسط:

حامد رضایی

استاد راهنما:

دکتر محمد رمضان‌پور

استاد مشاور:

دکتر نرگس تولایی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

میانگین‌پذیری توسیع‌های مدولی جبرهای باناخ دوگان

توسط:

حامد رضایی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر محمد رمضان‌پور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر نرگس تولایی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکترعلی غفاری استاد ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشگاه سمنان (داور اول)

دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

بهترین همراهان زندگیم،

پدر و مادرم

دو عزیزی که فرصت اندیشیدن، رستن و اعتلا را به من عطا نمودند؛

آنانکه در رویش نهال دانشم صبوری کردند و روح اندیشیدن را در من بیدار کردند؛

و پیشکش می‌نمایم به **خواهر و برادران** مهربانی که عابران همیشه کوچه‌های مهربانی‌اند؛

و ضرب آهنگ قدم‌هایشان بذر آرامش را روی چشم‌های خسته اما تشنه علم من پاشیدند.

الهی!

هیچگاه تنهایشان مگذار و اجازه بده نامت تا همیشه منتشر شود در چاردیواری بی‌هم نفسی‌شان.

سپاسگزاری

خدایا هر کس از تو نوشت واژه کم آورد، فکر کم آورد، دل، ولی تپید و تپید و ادعا کرد حتی اگر از نفس بیافتد، کم نمی آورد، دل راست می گفت که انسان قله ای دارد بنام تنهایی که در آن به تماشای غروب تمام وابستگی ها می نشیند و سپس حس می کند که تنها تو در کنار او می مانی. معبودا، در من احساس عرفانی اسیر است که از اعماق فطرتم سرچشمه گرفت و هرگاه نام تو را بر زبان می آورم، تا چشم هایم می جوشد.

پس ای نیک... که به نیکی شناخته شده ای، اینک من بر سجاده نیازم بوسه می زنم و دست های التماسم را به سویت دراز می کنم و فریاد می زنم که با یاری، توکل، امید و عشق به تو توانستم در مسیری قدم بگذارم که حتی ثانیه هایش هم با رایحه خوش علم و دانش آمیخته شده و اگر نبود توکل به تو و یاری و راهنمایی استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمد رمضانپور، شاید پیمودن برایم سخت می شد. استاد ارجمندی که کمک کرد تا آنچه را که طی سالها آموخته بودم، تکمیل کنم و به سرانجامی برسانم که آرزویم بود و به یادم بیاورد که در این راه اگر نبود مشاوره دلسوزانه سرکار خانم دکتر نرگس تولایی، شاید باز هم در نیمه راه می ماندم.

و در آخر از اساتید ارجمند، جناب آقای دکتر علی غفاری و جناب آقای دکتر غلامرضا عباسپور که در مقام داور زحمت مطالعه این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

حامد رضایی

شهریور ۹۱

چکیده

میانگین‌پذیری توسیع‌های مدولی جبرهای باناخ دوگان

به وسیله‌ی:
حامد رضایی

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. $\mathfrak{A}$ را میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه $\{0\} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)^1\mathscr{H}$. همچنین اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ دوگان باشد، $\mathfrak{A}$ را میانگین‌پذیر کونز گوییم هرگاه برای هر $\mathfrak{A}$ -مدول باناخ دوطرفه دوگان و نرمال X، $\mathscr{H}^1_{w^*}(\mathfrak{A}, X) = \{0\}$.

ما در این پایان‌نامه میانگین‌پذیری ضعیف توسیع‌های مدولی، میانگین‌پذیری کونز توسیع‌های مدولی جبرهای باناخ دوگان و همچنین میانگین‌پذیری ضعیف کونز این دسته از جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: میانگین‌پذیری ضعیف - توسیع مدولی - میانگین‌پذیری کونز - جبر باناخ دوگان.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم میانگین‌پذیری ریشه در آغاز نظریه اندازه مدرن دارد. پس از سال ۱۹۴۰ میانگین‌پذیری به یک مفهوم مهم در آنالیز هارمونیک تبدیل شد. جانسن [۱] کسی بود که نظریه میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را ابداع کرد. اما مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف اولین بار توسط دیلز [۲] و همکارانش در [۴] برای جبرهای باناخ جابجایی معرفی شد و توسط جانسن برای حالت ناجابجایی گسترش پیدا کرد.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه باشد. $X \times \mathfrak{A}$ به‌همراه هرکدام از نرم‌های

$$\|(a,x)\|_1 = \|a\| + \|x\|$$

و

$$\|(a,x)\|_\infty = \max\{\|a\|, \|x\|\}$$

برای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in X$، تبدیل به یک فضای باناخ می‌شود. این فضاهای باناخ به همراه ضربی که برای هر $a, b \in \mathfrak{A}$ و $x, y \in X$ به‌صورت

$$(a,x)(b,y) = (ab, a\cdot y + x\cdot b)$$

تعریف می‌شود، تبدیل به جبرهای باناخ می‌شوند که آنها را توسیع‌های مدولی جبر باناخ $\mathfrak{A}$ می‌نامیم و به ترتیب با نمادهای $\mathfrak{A}\oplus_1 X$ و $\mathfrak{A}\oplus_\infty X$ نشان می‌دهیم. دیلز به‌همراه پروفسور قهرمانی و گرونبک [۳] میانگین‌پذیری ضعیف را در [۵] مورد بررسی قرار داده‌اند، ولی میانگین‌پذیری ضعیف توسیع مدولی

[۱] Johnson

[۲] Dales

[۳] Grønbæk

$X \oplus_1 \mathfrak{A}$ اولین بار در سال ۲۰۰۲ توسط ژانگ [۴] در [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفت. درواقع جبر باناخ $\mathfrak{A}$ را میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه $\mathscr{H}^1(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*) = \{0\}$. و درحالت کلی آنرا n -میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه $\mathscr{H}^1(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(n)}) = \{0\}$ ، که $\mathfrak{A}^\circ = \mathfrak{A}$ و اگر $n \geq 1$ ، $\mathfrak{A}^{(n)}$، n-امین مدول دوگان $\mathfrak{A}$ است.

میانگین‌پذیری کونز جبرهای باناخ دوگان نوع دیگری از انواع میانگین‌پذیری می‌باشد که اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط رونده [۵] معرفی شد [۱۴، بخش۴]. درواقع جبر باناخ $\mathfrak{A}$ را دوگان گوییم هرگاه یک زیر مدول بسته مانند $\mathfrak{A}_*$ از $\mathfrak{A}^*$ وجود داشته باشد به طوریکه $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_*)^*$. جبر باناخ دوگان $\mathfrak{A}$ را میانگین‌پذیر کونز گوییم هرگاه برای هر $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه دوگان و نرمال X، هر اشتقاق $w^* - w^*-$ پیوسته $D : \mathfrak{A} \longrightarrow X$ درونی باشد و یا به‌طور معادل $\mathscr{H}^1_{w^*}(\mathfrak{A}, X) = \{0\}$. و اگر هر اشتقاق w^*- پیوسته از $\mathfrak{A}$ به $\mathfrak{A}$ درونی باشد، $\mathfrak{A}$ را میانگین پذیر ضعیف کونز گوییم، [۶].

این پایان نامه شامل ۴ فصل است. ما در فصل اول به‌طور مختصر به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصول بعد مورد نیازند.

درفصل دوم ابتدا به معرفی توسیع‌های مدولی می‌پردازیم و سپس سعی می‌کنیم اشتقاق‌های روی این رده از جبرهای باناخ را بشناسیم. به‌عنوان مثال نشان می‌دهیم که اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $D : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}^*$ یک اشتقاق پیوسته باشد، آنگاه

$$\overline{D} : \mathfrak{A} \oplus_1 X \longrightarrow (\mathfrak{A} \oplus_1 X)^* \quad ; \quad \overline{D}\big((a, x)\big) = \big(D(a), 0\big)$$

نیز یک اشتقاق پیوسته است.

در فصل سوم میانگین‌پذیری ضعیف توسیع‌های مدولی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. درواقع نشان می‌دهیم که اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه باشد، آنگاه $X \oplus_1 \mathfrak{A}$ میانگین‌پذیر ضعیف است اگروتنهااگر شرایط زیر برقرار باشند.

۱. $\mathfrak{A}$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

۲. $\mathscr{H}^1(\mathfrak{A}, X^*) = \{0\}$.

۳. برای هر همریختی $\mathfrak{A}$-مدولی دوطرفه پیوسته $\Gamma : X \longrightarrow \mathfrak{A}^*$، $x^* \in X^*$ وجود دارد به‌طوریکه برای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in X$، $a \cdot x^* = x^* \cdot a$ و $\Gamma(x) = x * x^* - x^* * x$.

۴. هر همریختی $\mathfrak{A}$-مدولی دوطرفه پیوسته $T : X \to X^*$ که برای هر $x, y \in X$ در شرط

$$x * T(y) + T(x) * y = 0$$

---

[۴] zhang

[۵] V. Runde

صدق می‌کند، صفر است.

سپس به بیان میانگین‌پذیری ضعیف حالات خاصی از توسیع مدولی $\mathfrak{A} \oplus_1 X$ می‌پردازیم که ژانگ در مقاله ای که در سال ۲۰۰۲ منتشر کرده [۱۶]، مورد بررسی قرار داده است. در این بخش نشان خواهیم داد که جبر باناخ $\mathfrak{A} \oplus_1 X$ همیشه میانگین‌پذیر ضعیف نیست.
و در فصل آخر پس از معرفی جبرهای باناخ دوگان، به بررسی میانگین‌پذیری کونز و میانگین‌پذیری ضعیف کونز توسیع‌های مدولی جبرهای باناخ دوگان خواهیم پرداخت. در اینجا نیز نشان خواهیم داد که اگر $\mathfrak{A}$ جبر باناخ دوگان و X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه دوگان و نرمال باشد، آنگاه $\mathfrak{A} \oplus_\infty X$ میانگین‌پذیر ضعیف کونز است اگروتنهااگر شرایط زیر برقرار باشند.

۱. فرض کنید $D : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ یک اشتقاق $w^* - w^*-$ پیوسته و $T : X \longrightarrow X$ یک عملگر $w^* - w^*-$ پیوسته باشند به‌طوریکه برای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in X$،

$$T(a \cdot x) = D(a) \cdot x + a \cdot T(x) \ , \ T(x \cdot a) = x \cdot D(a) + T(x) \cdot a \ .$$

در این صورت D درونی است.

۲. $\mathscr{H}^1_{w^*}(\mathfrak{A}, X) = \{0\}$

۳. فرض کنید $\Gamma : X \longrightarrow \mathfrak{A}$ یک همریختی $\mathfrak{A}$-مدولی دوطرفه $w^* - w^*-$ پیوسته باشد که برای هر $x, y \in X$، $x \cdot \Gamma(y) + \Gamma(x) \cdot y = 0$. در این صورت $\Gamma = 0$.

۴. فرض کنید $T : X \longrightarrow X$ یک همریختی $\mathfrak{A}$-مدولی دوطرفه $w^* - w^*-$ پیوسته باشد. در این صورت $b \in \mathfrak{A}$ وجود دارد به‌طوریکه برای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in X$، $ab = ba$ و $T(x) = x \cdot b - b \cdot x$.

مطالب این فصل برگرفته از مقاله دکتر اسحقی، دکتر حبیبیان و دکتر رجالی است که در سال ۲۰۱۰ منتشر گردیده است [۶].

فصل ۱

مقدمات

در این فصل ما تعاریف و اصطلاحات مورد نیاز را به‌طور مختصر بیان و معرفی می‌کنیم. درصورت نیاز به جزئیات بیشتر می‌توانید به [۸]، [۱۰]، [۱۳] و [۱۴] مراجعه کنید.

۱-۱ فضای باناخ

فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت یک نرم روی X تابعی است مانند $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که

۱. $\|x\| \geq ۰$ برای هر $x \in X$.

۲. $x = ۰$ اگر و فقط اگر $\|x\| = ۰$.

۳. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in X$.

۴. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ به ازای هر $x, y \in X$.

فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای باناخ گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در این فضا همگرا باشد.

فرض کنید X, Y دو فضای نرم‌دار باشند. نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گوییم هرگاه $K \geq ۰$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq K\|x\|$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y ; \text{خطی و کراندار است } T\},$$

و نرم عملگری را برای $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|; x \in X, \|x\| \leq ۱\}, \qquad (۱.۱)$$

T طولپایی خطی است هرگاه برای هر $x \in X$، $\|Tx\| = \|x\|$. قابل ذکر است که $\mathcal{B}(X,Y)$ فضائی باناخ است اگر وفقط اگر Y فضائی باناخ باشد. هرگاه X و Y یکی باشند، $\mathcal{B}(X,X)$ را با $\mathcal{B}(X)$ نمایش می‌دهیم. برای فضای نرم‌دار X، فضای باناخ $\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ را دوگان اول X نامیده و با X^* نمایش می‌دهیم.

فرض کنید X و Y فضاهایی باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. در این صورت عملگر الحاقی T که آن‌را با T^* نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \qquad , \qquad (f \in Y^*, x \in X).$$

به آسانی دیده می‌شود اگر $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ آنگاه $T^* \in \mathcal{B}(Y^*,X^*)$ و $\|T^*\| = \|T\|$.

قضیه ۱.۱.۱. **(هان-باناخ**[۱]**)** [۸، *صفحه۱۵۷*] *فرض کنید M زیرفضایی از فضای خطی نرم‌دار X باشد.*

۱) *اگر f یک تابعک خطی کراندار بر M باشد، آنگاه f را می‌توان به $F \in X^*$ به گونه‌ای توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$.*

۲) *اگر عنصر $x_\circ$ از X وجود داشته باشد به‌طوریکه $x_\circ \notin \overline{M}$، آنگاه $f \in X^*$ وجود دارد به‌طوریکه $f(x_\circ) \neq ۰$ و $f|_M = ۰$.*

فرض کنید $\mathfrak{A}_۱$ و $\mathfrak{A}_۲$ دو فضای باناخ باشند. به کمک این دو می‌توان فضاهای باناخ جدیدی ساخت. درواقع فضای $\mathfrak{A}_۱ \times \mathfrak{A}_۲$ به همراه هرکدام از نرم‌های

$$\|(a_۱, a_۲)\|_۱ = \|a_۱\| + \|a_۲\|$$

و

$$\|(a_۱, a_۲)\|_\infty = \max\{\|a_۱\|, \|a_۲\|\}$$

تبدیل به یک فضای باناخ می‌شود که آن‌ها را به ترتیب با نمادهای $\mathfrak{A}_۱ \times_۱ \mathfrak{A}_۲$ و $\mathfrak{A}_۱ \times_\infty \mathfrak{A}_۲$ نمایش می‌دهیم. شاید این سوال پیش بیاید که این دو فضای باناخ جدید چه رابطه‌ای باهم دارند؟ برای هر

[۱] Hahn-Banach

فضای باناخ دلخواه $\mathfrak{A}_۱$ و $\mathfrak{A}_۲$ نگاشت زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} T : \mathfrak{A}_۱^* \times_\infty \mathfrak{A}_۲^* \longrightarrow (\mathfrak{A}_۱ \times_۱ \mathfrak{A}_۲)^* \\ \qquad (a_۱^*, a_۲^*) \longmapsto T(a_۱^*, a_۲^*) : \mathfrak{A}_۱ \times_۱ \mathfrak{A}_۲ \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad\qquad T(a_۱^*, a_۲^*)(a_۱, a_۲) := a_۱^*(a_۱) + a_۲^*(a_۲) \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم این نگاشت، یکریختی طولپاست. T به وضوح خطی است. فرض کنید S^* یک عضو دلخواه از $(\mathfrak{A}_۱ \times_۱ \mathfrak{A}_۲)^*$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} a_۱^* : \mathfrak{A}_۱ \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad a_۱^*(a_۱) := S^*(a_۱, ۰) \end{cases} , \qquad \begin{cases} a_۲^* : \mathfrak{A}_۲ \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad a_۲^*(a_۲) := S^*(۰, a_۲) \end{cases}$$

درنتیجه داریم

$$\|a_۱^*\| = \sup_{\|a_۱\| \leq ۱} | a_۱^*(a_۱) | = \sup_{\|a_۱\| \leq ۱} | S^*(a_۱, ۰) | \leq \sup_{\|a_۱\| \leq ۱} \|S^*\| \|a_۱\| \leq \|S^*\|$$

و به‌همین ترتیب $\|a_۲^*\| \leq \|S^*\|$. حال برای هر $(a_۱, a_۲) \in \mathfrak{A}_۱ \times_۱ \mathfrak{A}_۲$ داریم

$$T(a_۱^*, a_۲^*)(a_۱, a_۲) = a_۱^*(a_۱) + a_۲^*(a_۲) = S^*(a_۱, ۰) + S^*(۰, a_۲) = S^*(a_۱, a_۲) \ .$$

این نشان می‌دهد که نگاشت T پوشاست و

$$\|(a_۱^*, a_۲^*)\|_\infty = \max\{\|a_۱^*\|, \|a_۲^*\|\} \leq \|S^*\| = \|T(a_۱^*, a_۲^*)\| \ .$$

و اما ازطرف دیگر

$$\begin{aligned} | T(a_۱^*, a_۲^*)(a_۱, a_۲) | &\leq \ | a_۱^*(a_۱) | + | a_۲^*(a_۲) | \\ &\leq \|a_۱^*\| \ \|a_۱\| + \|a_۲^*\| \ \|a_۲\| \\ &\leq \|(a_۱^*, a_۲^*)\|_\infty \ \|a_۱\| + \|(a_۱^*, a_۲^*)\|_\infty \ \|a_۲\| \\ &= \|(a_۱^*, a_۲^*)\|_\infty \ \|(a_۱, a_۲)\|_۱ \ . \end{aligned}$$

با گرفتن سوپریمم روی $\|(a_۱, a_۲)\|_۱ \leq ۱$ داریم

$$\|T(a_۱^*, a_۲^*)\| \leq \|(a_۱^*, a_۲^*)\|_\infty \ .$$

بنابراین T یک نگاشت خطی طولپاست و درنتیجه

$$\mathfrak{A}_۱^* \times_\infty \mathfrak{A}_۲^* = (\mathfrak{A}_۱ \times_۱ \mathfrak{A}_۲)^* \ .$$

به‌طور مشابه می‌توان نشاد داد که $\mathfrak{A}_1^* \times_1 \mathfrak{A}_2^* = (\mathfrak{A}_1 \times_\infty \mathfrak{A}_2)^*$.
فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار باشد و $x \in X$. نگاشت $\hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ را برای هر $f \in X^*$، به‌صورت $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم. نگاشت $x \longmapsto \hat{x}$ از X به X^{**} طولپا و خطی است. اگر این نگاشت پوشا نیز باشد، X را **انعکاسی** [2] می‌نامیم.

گزاره ۲.۱.۱. [۸، صفحه۱۶۰] *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. X انعکاسی است اگروتنها اگر X^* انعکاسی باشد.*

فرض کنید τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد که تحت آن نگاشت‌های جمع و ضرب اسکالر پیوسته‌اند. در این صورت X یک فضای برداری توپولوژیک نامیده می‌شود. به‌عنوان مثال هر فضای نرم‌دار یک فضای برداری توپولوژیک است.
فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. توپولوژی ضعیف یا w-توپولوژی یا $\sigma(X, X^*)$-توپولوژی، ضعیف ترین توپولوژی روی X است که در آن هر $f \in X^*$ روی X پیوسته است. اگر $\xi \in X$، مجموعه

$$U(\xi; f_1, \cdots, f_n; \epsilon) = \{\eta \in X \ : \ \mid f_i(\eta) - f_i(\xi) \mid < \epsilon \, ; \ i = 1, \cdots, n\}$$

که در آن $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ و $\{f_1, \cdots, f_n\}$ یک زیر مجموعه متناهی از X^* است، یک پایه از از همسایگی های باز ξ در w-توپولوژی روی X تشکیل می‌دهد.
توپولوژی ضعیف* یا w^*-توپولوژی یا $\sigma(X^*, X)$-توپولوژی، ضعیف ترین توپولوژی روی X^* است که در آن هر $\xi \in X$ روی X^* پیوسته است. اگر $f \in X^*$، مجموعه

$$V(f; \xi_1, \cdots, \xi_n; \epsilon) = \{L \in X^* \ : \ \mid L(\xi_i) - f(\xi_i) \mid < \epsilon \, ; \ i = 1, \cdots, n\}$$

که در آن $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ و $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ یک زیر مجموعه متناهی از X است، یک پایه از همسایگی‌های باز f در w^*-توپولوژی روی X^* تشکیل می‌دهد. از این به بعد w، نماد توپولوژی ضعیف و w^*، نماد توپولوژی ضعیف* است.
فرض کنید (x_α) یک تور در X باشد. در این صورت (x_α) به x در w-توپولوژی همگراست اگر

$$\forall f \in X^* \ ; \ f(x_\alpha) \rightsquigarrow f(x)$$

این همگرایی را به‌صورت $x_\alpha \overset{w}{\rightsquigarrow} x$ و یا به‌صورت $w - \lim x_\alpha = x$ نمایش می‌دهیم و اگر (f_α) یک تور در X^* باشد، (f_α) به f در w^*-توپولوژی همگراست اگر

$$\forall x \in X \ ; \ f_\alpha(x) \rightsquigarrow f(x) \, .$$

[2] Reflexive

این همگرایی را نیز به صورت $f_\alpha \overset{w^*}{\rightsquigarrow} f$ و یا $w^*-\lim f_\alpha = f$ نمایش می‌دهیم. اگر $\mathfrak{A}$ یک مجموعه باشد، بستار آن در w-توپولوژی با $\overline{\mathfrak{A}}^{w}$ و در w^*-توپولوژی با $\overline{\mathfrak{A}}^{w^*}$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۳.۱.۱. (***باناخ- آلاقلو***[۳]) [۸، صفحه ۱۶۹] *اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه گوی واحد بسته $B_1^* = \{f \in X^*; \|f\| \leq 1\} \subseteq X^*$، w^* - فشرده است.*

قضیه ۴.۱.۱. (***گلدشتاین***[۴]) [۳، صفحه ۸۱۸] *اگر X یک فضای باناخ باشد، آنگاه $X^{**} = \overline{\widehat{X}}^{w^*}$. به‌طور دقیق تر، برای هر $F \in X^{**}$، تور $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ در X موجود است به‌طوریکه به ازای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|F\|$ و $\hat{x}_\alpha \overset{w^*}{\rightsquigarrow} F$.*

۱-۲ جبرهای باناخ

فضای برداری $\mathfrak{A}$ روی میدان $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت ضربی $(a,b) \longmapsto ab$ از $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ به توی $\mathfrak{A}$ که برای هر $a, b, c \in \mathfrak{A}$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند، یک جبر نام دارد.

(۱) $a(bc) = (ab)c$

(۲) $(a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$

(۳) $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$.

اگر ضرب تعریف شده در بالا جابجایی باشد، یعنی $ab = ba$ برای هر $a, b \in \mathfrak{A}$، آنگاه $\mathfrak{A}$ را یک جبر جابجایی می‌نامیم. عنصر e در جبر $\mathfrak{A}$ را عنصر همانی گوییم، هرگاه $e \neq 0$ و برای هر $a \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$ea = ae = a.$$

عنصر همانی در صورت وجود یکتاست. جبر $\mathfrak{A}$ را یکدار گوییم، هرگاه دارای عنصر همانی باشد.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر و $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت نرم $\|\cdot\|$ روی $\mathfrak{A}$ یک نرم جبری نام دارد اگر $C_{\mathfrak{A}} \in \mathbb{R}^+$ موجود باشد که

$$\|ab\| \leq C_{\mathfrak{A}} \|a\| \|b\| \quad , \quad (a, b \in \mathfrak{A}).$$

[۳] Banach Alaoglu

[۴] Golstine

در این صورت $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ یک **جبر نرم‌دار** نامیده می‌شود. لازم به تذکر است که در اکثر کتابها، $C_{\mathfrak{A}}$ برابر با ۱ فرض می‌شود. درواقع به کمک نرم به‌کار رفته در تعاریف بالا می‌توان نرم جدیدی تعریف کرد که با نرم گفته شده در این کتابها معادل می‌شود.

$(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ را یکدار نامیم هرگاه $\mathfrak{A}$ یکدار بوده و ۱ $= \|e\|$. جبر نرم‌دار $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ را یک **جبر باناخ** گوییم هرگاه تحت نرم $\|\cdot\|$ یک فضای باناخ باشد.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد. زیرفضای I را یک ایده‌آل چپ (راست) $\mathfrak{A}$ گوییم هرگاه برای هر $a \in \mathfrak{A}$ و هر $x \in I$، $ax \in I$ ($xa \in I$). I را یک ایده‌آل دوطرفه گوییم، هرگاه هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست باشد.

اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو جبر باناخ باشند، نگاشت $T : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ را یک همریختی گوییم، هرگاه T یک نگاشت خطی باشد که ضرب را نیز حفظ نماید. یعنی

$$T(ab) = T(a)T(b), \quad (a, b \in \mathfrak{A}).$$

هنگامی که $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$، دسته‌ای مهم از همریختی‌ها روی $\mathfrak{A}$ به دست می آید که به آن‌ها تابعک‌های خطی ضربی می گوییم.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر نرم‌دار باشد. تور $(e_\alpha) \subseteq \mathfrak{A}$ را یک همانی تقریبی چپ (راست) برای $\mathfrak{A}$ گوییم هرگاه برای هر $a \in \mathfrak{A}$ ، $e_\alpha a \overset{\|\cdot\|}{\rightsquigarrow} a$ ($ae_\alpha \overset{\|\cdot\|}{\rightsquigarrow} a$). اگر (e_α) هم یک همانی تقریبی چپ و هم یک همانی تقریبی راست باشد آنرا همانی تقریبی نامند. همانی تقریبی (e_α) را کراندار گوییم هرگاه به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathfrak{A}$ کراندار باشد. در این حالت همانی تقریبی (e_α) را یک همانی تقریبی کراندار نامند.

قضیه ۱.۲.۱. [۲ ، صفحه ۵۹] *اگر $\mathfrak{A}$ دارای یک همانی تقریبی راست کراندار و یک همانی تقریبی چپ کراندار باشد، آنگاه $\mathfrak{A}$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است.*

یک همانی تقریبی ضعیف چپ برای $\mathfrak{A}$ توری مانند $(e_\gamma) \subseteq \mathfrak{A}$ است که برای هر x، $e_\gamma x \overset{w}{\rightsquigarrow} x$. به‌طور مشابه می‌توان همانی تقریبی ضعیف راست و همانی تقریبی ضعیف دوطرفه تعریف کرد.

قضیه ۲.۲.۱. [۲ ، صفحه ۵۹] *هرگاه جبرباناخ $\mathfrak{A}$ دارای یک همانی تقریبی چپ ضعیف کراندار باشد آنگاه $\mathfrak{A}$ دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار است. مطلبی مشابه در مورد همانی تقریبی راست ضعیف و دوطرفه ضعیف برقرار است.*

جبرباناخ $\mathfrak{A}$ را یک $*-$ جبر باناخ گوییم هرگاه نگاشت $a^* \longrightarrow a$ روی $\mathfrak{A}$ موجود باشد که برای هر $a, b \in \mathfrak{A}$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$، در شرایط

$$(۱)\ (a+b)^* = a^* + b^* \qquad (۲)\ (ab)^* = b^* a^*$$
$$(۳)\ (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^* \qquad (۴)\ (a^*)^* = a$$

صدق کند. $*$ -جبرباناخ $\mathfrak{A}$ را که برای هر $a \in \mathfrak{A}$ در شرط $\|aa^*\| = \|a\|^۲$ صدق کند را یک C^* -جبر گوییم. به‌عنوان مثال اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ به همراه نگاشت $T^* \longrightarrow T$ تبدیل به یک C^* -جبر یکدار می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. [۱۰، صفحه ۷۸] *هر C^* -جبر دارای همانی تقریبی کراندار است. بعلاوه هر ایده‌آل بسته از یک C^* -جبر نیز دارای یک همانی تقریبی کراندار است.*

۱-۳ ضرب تانسوری

فرض کنید X, Y, Z فضاهای خطی و نرم‌دار باشند. نگاشت $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ یک نگاشت دوخطی نامیده می‌شود هرگاه،

(۱) برای هر $y \in Y$، نگاشت $\phi_y : X \longrightarrow Z$ با ضابطه $\phi_y(x) = \phi(x, y)$ خطی باشد.

(۲) برای هر $x \in X$، نگاشت $\phi^x : Y \longrightarrow Z$ با ضابطه $\phi^x(y) = \phi(x, y)$ خطی باشد.

نگاشت دو خطی $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ کراندار نامیده می‌شود، هرگاه ثابت $M > ۰$ موجود باشد به‌طوری که

$$\|\phi(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\| \quad (x \in X, y \in Y).$$

هرگاه ϕ نگاشت دو خطی کراندار باشد آنگاه نرم عملگری ϕ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x, y)\| \ , \ \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\}.$$

مجموعه همه نگاشت‌های دوخطی کراندار از $X \times Y$ بتوی Z را با $\mathcal{B}(X, Y; Z)$ نمایش می‌دهیم که یک فضای برداری نرم دار است. برای $x \in X, y \in Y$، عنصر $x \otimes y \in \mathcal{B}(X^*, Y^*; \mathbb{C})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \otimes y(x^*, y^*) = x^*(x) y^*(y) \quad (x^* \in X^*, y^* \in Y^*).$$

ضرب تانسوری جبری X و Y را که با $X\otimes Y$ نمایش می‌دهیم، زیر فضای تولید شده توسط

$$\{x\otimes y : x\in X, y\in Y\}$$

در $\mathcal{B}(X^*,Y^*;\mathbb{C})$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر هر عضو $X\otimes Y$ به‌صورت ترکیبات خطی متناهی از عناصر به فرم $x\otimes y$ است که $x\in X, y\in Y$.

قضیه ۱.۳.۱. [۲، صفحه ۲۳۲] *فرض کنید $\tau : X\times Y \longrightarrow X\otimes Y$ یک نگاشت دوخطی باشد که برای هر $x\in X, y\in Y$، به‌صورت $\tau(x,y)=x\otimes y$ تعریف می‌شود در این صورت برای هر فضای برداری Z و هر نگاشت دوخطی $\phi : X\times Y\longrightarrow Z$، یک نگاشت خطی یکتا مانند $\sigma : X\otimes Y\longrightarrow Z$ موجود است که $\phi=\sigma\circ\tau$.*

فرض کنید X, Y فضاهایی نرم‌دار باشند. نگاشت

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\| \quad ; \quad u=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\right\} \quad (u\in X\otimes Y)$$

یک نرم است که به آن **نرم تانسوری تصویری** می‌گوییم و بعلاوه

$$\|x\otimes y\|_\pi = \|x\|\|y\| \quad (x\in X, y\in Y).$$

تتمیم $(X\otimes Y, \|\cdot\|_\pi)$ را با $X\otimes_\pi Y$ یا $X\hat{\otimes}Y$ نمایش می‌دهیم که **ضرب تانسوری تصویری** X و Y نامیده می‌شود.

طبق [۲، گزاره ۶.۴۲.۱۲]، فضای $X\widehat{\otimes}Y$ را می‌توان به عنوان زیر فضای خطی از $\mathcal{B}(X^*,Y^*;\mathbb{C})$، شامل همه عناصر به شکل

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\otimes y_n$$

درنظر گرفت که در آن $\Sigma_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\|y_n\|<\infty$. بعلاوه

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\|y_n\| : u=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\otimes y_n\right\}.$$

۱-۴ مدول‌های باناخ

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. فضای باناخ X را یک **$\mathfrak{A}$-مدول باناخ چپ** گوییم هرگاه نگاشت دوخطی

$$\mathfrak{A}\times X\longrightarrow X \quad ; \quad (a,\xi)\longmapsto a\cdot\xi \qquad (۲.۱)$$

وجود داشته باشد به‌طوریکه خواص زیر برقرار باشد.

i) برای هر $a,b\in\mathfrak{A}$ و هر $\xi\in X$ داشته باشیم $(ab)\cdot\xi=a\cdot(b\cdot\xi)$.

ii) نگاشت (۲.۱) کراندار (پیوسته) باشد. یعنی

$$\exists C_{\mathfrak{A},X}\in\mathbb{R}^+\ ,\ \forall a\in\mathfrak{A}\ ,\ \forall\xi\in X\ \ ;\ \ \|a\cdot\xi\|\le C_{\mathfrak{A},X}\,\|a\|_{\mathfrak{A}}\,\|\xi\|_X$$

$\mathfrak{A}$-مدول باناخ راست نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود. فضای باناخ X را یک **$\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه** گوییم هرگاه X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ چپ و راست باشد و

$$(a\cdot\xi)\cdot b=a\cdot(\xi\cdot b)\quad;\quad(a,b\in\mathfrak{A},\xi\in X)$$

در اینجا نیز می‌توان با استفاده از نرم فوق، نرم جدیدی معادل با نرم قبل تولید کرد که دراین‌صورت تعریف دیگری از یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ، معادل با تعریف ما بدست می‌آید که در آن $C_{\mathfrak{A},X}$ برابر با ۱ است. فرض کنید X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ چپ باشد. در این صورت X^* با عمل مدولی

$$(f\cdot a)(x)=f(a\cdot x)\quad,\quad(a\in\mathfrak{A},x\in X,f\in X^*)$$

یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ راست می‌شود. و اگر X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ راست باشد آنگاه X^* با عمل مدولی

$$(a\cdot f)(x)=f(x\cdot a)\quad,\quad(a\in\mathfrak{A},x\in X,f\in X^*)$$

یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ چپ می‌شود. بنابراین اگر X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه باشد X^* نیز یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ دوطرفه می‌باشد.

اکنون فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ جبرهایی باناخ باشند. فضای باناخ X را یک **$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$-مدول باناخ دوطرفه** گوییم هرگاه X یک $\mathfrak{A}$-مدول باناخ چپ و یک $\mathfrak{B}$-مدول باناخ راست باشد و

$$(a\cdot\xi)\cdot b=a\cdot(\xi\cdot b)\quad;\quad(a\in\mathfrak{A},b\in\mathfrak{B},\xi\in X)$$

فرض کنید X,Y دو $\mathfrak{A}-$ مدول باناخ دوطرفه باشند. نگاشت خطی $T:X\longrightarrow Y$ را یک همریختی $\mathfrak{A}-$ مدولی دوطرفه گوییم هرگاه برای هر $x\in X$ و $a\in\mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$T(a\cdot x)=a\cdot T(x)\quad,\quad T(x\cdot a)=T(x)\cdot a\ .$$