دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (هندسه)

موضوع:
بررسی خمینه های $N(k)$- شبه اینشتین

استاد راهنما:
دکتر ابوالفضل طالشیان

استاد مشاور:
دکترماشاالله متین فر

نام دانشجو:
علی اکبر حسین زاده

تاریخ:
بهمن ماه ۸۸

چکیده

مفهومی ازیک خمینه شبه اینشتین را M. C. Chaki در مقاله [۱] معرفی کرده بود. خمینه‌ي ريماني غير تخت (M^n, g) كه $n > ۲$ است را يك خمينه‌ي شبه اينشتين ناميم هرگاه كشان ريچي S از نوع $(۰,۲)$ آن مخالف صفر باشد و در شرط

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + bA(X)A(Y) \qquad \forall\ X,\ Y \in TM$$

برای بعضی توابع دیفرانسیل پذیر a و $b \neq 0$، صدق کند. که η، ۱-فرمي غير صفرهست بطوريکه برای میدان برداری متناظر ξ داریم

$$g(X,\xi) = \eta(X), \qquad g(\xi,\xi) = \eta(\xi) = 1$$

۱- فرمی η را ۱-فرمی وابسته و میدان برداری یکه ξ را مولد خمینه نامیده می شود.

اگر $b = ۰$ باشد، آنگاه خمینه شبه اینشتین تبدیل به خمینه اینشتین می شود.

اگر مولد ξ متعلق به توزیع k- پوچی $N(k)$، برای بعضی توابع دیفرانسیل پذیر k باشد، در این صورت خمینه اینشتین یک خمینه $N(k)$- شبه اینشتین نامیده می شود[۲۲]. در مقاله [۲۲] نشان داده شد که یک خمینه شبه اینشتین تخت همدیس n- بعدی، یک خمینه $\mathrm{N}(k)$ - شبه اینشتین است و درلذا هرخمینه شبه اینشتین ۳- بعدی، یک خمینه $\mathrm{N}(k)$ - شبه اینشتین می باشد.

در مقاله [۱۹] ثابت شد که در یک خمینه $\mathrm{N}(k)$ - شبه اینشتین n- بعدی داریم $k = \frac{a+b}{n-1}$.

فصل اول

تعاریف، مفاهیم وقضایای مقدماتی

۱-۱ فضاى آفين وفضاى اقليدسى

۱-۱-۱ تعريف فضاي آفين[21]: فرض كنيم A يك مجموعه، $A \neq \varnothing$ و V يك فضاي برداري روي ميدان F باشد. اگر براي تبديل $\varphi : A \times A \longrightarrow V$ به ازاي نقاط r, p, q در A، $\varphi(p,q) = \overrightarrow{pq} \in V$، روابط زير برقرار باشد، A را يك فضاي آفين نامند.

آ) براي هر p، q و r در A، داشته باشيم $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$

ب) براي هر نقطه‌ي انتخابي p در A و بردار α در V، يك نقطه يكتاي q در A وجود دارد به قسمی كه $\overrightarrow{pq} = \alpha \in V$.

در اينجا p نقطه‌ي ابتدا و q نقطه‌ي انتها است. بعد A هميشه با بعد V برابر است. مجموعه‌ي A يك مجموعه از نقاط است. گاهي مجموعه‌ي A را يك مجموعه نقطه‌اي و فضاي آفين A را يك فضاي نقطه‌اي نامند.

۱-۱-۲ مثال: روي ميدان F اگر $V = F^n$ يك فضاي n بعدي باشد، براي تبديل $A \times A \longrightarrow V$ به ازاي هر p، $p = \alpha \in F^n$ و هر $q = \beta \in F^n$، $\overrightarrow{pq} = \beta - \alpha$، كه در آن صورت $A = F^n$ مجموعه‌اي از نقطه‌ها و $V = F^n$ يك فضاي برداري است كه $A = F^n$ يك فضاي آفين nبعدي مي‌باشد. اگر $R = F$، فضاي R^n را فضاي حقيقي nبعدي آفين و اگر $F = ¢^n$، فضاي $¢^n$ را فضاي مختلط nبعدي آفين گويند.

۱-۱-۳ تعريف [21,25]**:** اگر در فضاي برداري R^n ضرب داخلي تعريف كنيم، يعني:

$$\langle \cdot \rangle : R^n \times R^n \longrightarrow R$$

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

آن‌گاه $\left(R, \langle \, . \, \rangle\right) = \mathrm{E}^n$ را فضاي اقليدسي نامند. و با استفاده از

$$d : \mathrm{E}^n \times \mathrm{E}^n \longrightarrow R$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|x, y\| = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$$

يك متر روي E^n تعريف مي‌شود. پس E^n يك فضاي متري است.

۱-۱-۴ تعريف[21,25]: نقاط $(n+1)$ تائي را در E^n در نظر مي‌گيريم. اگر مجموعه‌ي بردارهاي $\left\{\overrightarrow{p_\cdot p_1}, \overrightarrow{p_\cdot p_2}, ..., \overrightarrow{p_\cdot p_n}\right\}$ در R^n يك پايه‌ي متعامد يك فضاي برداري R^n باشد. آنگاه نقاط $(n+1)$ تائي، $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$را ميدان n وجهي متعامد اقليدسي يا مجموعه متعامد مختصاتي گويند.

۱-۱-۵ تعريف[21]: نقاط $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ $e_0 = (0,0,...,0)$ و $e_2 = (0, 1, ..., 0)$ و ... و $e_n = (0, ..., 0, 1)$ را در E^n يك ميدان n وجهي استانده متعامد يا پايه‌ي استانده نيز مي‌گويند.

۱-۱-۶ تعريف[21,25]: اگر x يك نقطه در E^n باشد آن‌گاه $\overrightarrow{e_0 x}$ بر اساس ميدان استانده n وجهي متعامد اقليدسي عبارت از $\overrightarrow{e_\cdot x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, \overrightarrow{e_\cdot e_i}$ است و $x_i : E^n \longrightarrow R$ را توابع مختصاتي اقليدسي گويند و توابع با مقدار حقيقي n تائي $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ را مجموعه مختصات اقليدسي گويند.

۱-۲ خمينه (منيفلد)

۱-۲-۱ تعريف : فرض كنيم X يك مجموعه غير تهي و τ مجموعه‌اي از زير مجموعه‌هاي باز X باشد، اگر:

۱- X و $\varnothing$ عضو τباشند.

۲- براي هر $U \in \tau$ و $V \in \tau \Leftarrow V \cap U \in \tau$

۳- براي هر i در I اگر $U_i \in \tau$ باشد، آنگاه داشته باشيم $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

دراين صورت τ را روي X يك توپولوژي و ساختمان (X, τ) را يك فضاي توپولوژي گويند.

۱-۲-۲ تعريف همانساني[15,26]: فرض كنيم X و Y دو فضاي توپولوژي باشند. اگر نگاشت

$f: X \longrightarrow Y$ پيوسته و f^{-1} وجود داشته و پيوسته باشد، آنگاه f از X به Y يك تابع همانساني (همانريختي يا همئومورفيسم) است و وقتي f از X به Y يك تابع همانساني باشد، X و Y همانسانند (همانريختند يا همئومرفند).

۱-۲-۳ فضاي هاسدورف[15]: فضاي توپولوژي (X, τ) را يك فضاي هاسدورف گويند هرگاه براي هر دو نقطه متمايز x و y يك همسايگي x مانند V و يك همسايگي y مانند U وجود داشته باشد به‌قسمي كه:

$$.V \cap U = \varnothing$$

بعنوان مثال فضاي اقليدسي E^n ، يك فضاي هاسدورف است زيرا كه اگر دو نقطه متمايز q, p در E^n اختيار كنيم، آنگاه براي p و q به ترتيب همسايگي‌هاي باز V_P و V_q وجود دارد به طوريكه

$$V_p \cap V_q = \varnothing$$

از درس آناليز رياضي۱ مي‌دانيم كه V_P و V_q را مي‌توان گوي هايي به شعاع $\left\| \frac{p-q}{4} \right\|$ بترتيب حول نقاط p و q انتخاب كرد.

۱-۲-۴ تعريف(خمينه توپولوژی)[26]**:** فرض كنيم X يك فضاي n بعدي توپولوژي باشد. اگر براي X ويژگي‌هاي زير برقرار باشد، X را يك خمينه‌ي توپولوژي گويند.

الف) X يك فضاي هاسدورف باشد.

ب) هر زير مجموعه باز از X با E^n يا با زير مجموعه‌اي از E^n همانريخت باشد.

ج) X به وسيله‌ي تعداد شمارش پذيري از مجموعه هاي باز پوشانيده شود.

۱-۲-۵ تعريف [26]**:** فرض كنيم U در E^n يك مجموعه‌ي باز باشد. اگر براي تابع f، $f: U \longrightarrow R$ پيوسته و از هر مرتبه‌اي كليه مشتق‌هاي جزيي‌اش وجود داشته باشند. تابع f را ديفرانسيل‌پذير گويند. وقتي يك تابع از هر مرتبه‌اي داراي كليه‌ي مشتق‌هاي جزئي باشد در آن صورت تابع از رده‌ي C^∞ است و مي‌نويسيم $f \in C^\infty(U, R)$.

توجه: براي ديفرانسيل‌پذيري از مرتبه‌ي K داريم: $f \in C^k(U,R)$.

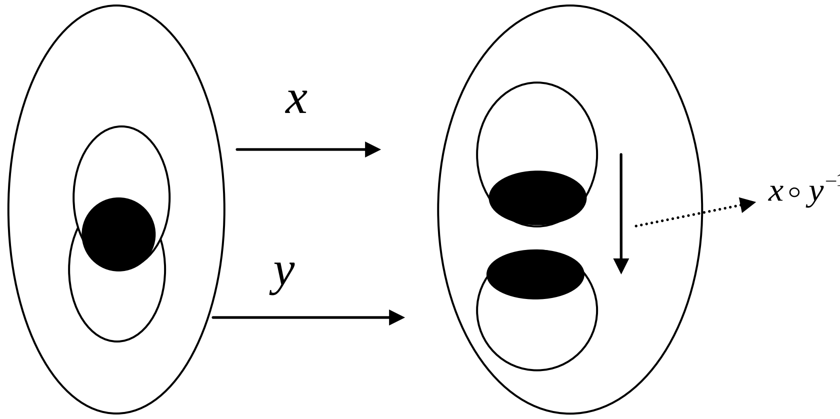
۱-۲-۶ تعريف [26]**:** فرض كنيم U و V زير مجموعه‌هاي باز فضاي اقليدسي E^n باشند. اگر براي تابع، $g: U \longrightarrow V$ ويژگي‌هاي زير صدق كند، تابع g را وابرريختي (ديفئومورفيسم) نامند و U و V وابرريختند.

۱- $g \in C^{\infty}(U,V)$

۲- $g^{-1}: V \longrightarrow U$ وجود داشته و $g^{-1} \in C^{\infty}(V,U)$

۱-۲-۷ تعريف [26] : فرض كنيم M يك مجموعه و U يك زيرمجموعه باز از M باشد، اگر برد تابع يك‌به‌يك $x: U \subset M \longrightarrow R^n$ زيرمجموعه‌ي باز R^n باشد آنگاه $\{U,x\}$ را يك نقشه‌ي n بعدي گويند و با استفاده از توابع تصويري $p_i: R^n \longrightarrow R$ يك چنين نقشه‌اي روي قلمروش U، يك مجموعه از توابع مختصاتي $x_i = p_i o x$ تعريف مي‌كند به طوريكه $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. $x(m) = (x_1(m), x_2(m), ..., x_n(m))$ يك مجموعه مختصاتي $m \in U$ در نقشه x است.

۱-۲-۸ تعريف[10]: گردايه اي از نقشه ها كه قلمروهايشان تمام مجموعه M را بپوشاند يك اطلس از M به R^n گفته مي شود و با A نمايش مي‌دهند چنين اطلسي را C^{∞} گويند اگر براي هر دو نقشه‌ي x و y از اطلس A كه اشتراك قلمروهايشان تهي نباشد $x \circ y^{-1}: R^n \longrightarrow R^n$ يك وابرريختي باشد.



شکل ۱-۱

۱-۲-۹ تعریف[21]: يك اطلس C^∞ از يك مجموعه M را كامل گويند اگر مشمول در اطلس C^∞ ديگري نباشد. يك اطلس كامل C^∞ از مجموعه‌ي M به توي R^n يك ساختار C^∞، n بعدي روي M تعيين مي‌نمايد. دراينصورت مجموعه‌ي M با ساختار C^∞ ارائه شده n بعدي، يك خمينه‌ي ديفرانسيل‌پذير (منيفلد ديفرانسل‌پذير) n بعدي ناميده مي‌شود.

۱-۲-۱۰ تعریف[26]: يك نقشه از يك اطلس كامل كه يك ساختار C^∞ را تعيين مي‌كند، يك نقشه از خمينه M ناميده مي‌شود و قلمروش، قلمروي مختصاتي خمينه است.

با يك نقشه در نقطه $m \in M$ مي‌فهميم كه يك نقشه از خمينه‌ي M با قلمروش U شامل m، يك همسايگي مختصاتي m است.

۱-۲-۱۱ تعریف[26]: فرض كنيم خمينه‌هاي ديفرانسيل‌پذير M و M' به ترتيب از بعدهاي n و n' باشد و $f : M \longrightarrow M'$ يك تابع باشد و فرضاً m نقطه‌اي از قلمروي تابع f بوده با انتخاب نقشه‌هاي x و x' به ترتيب در m و $f\left(m\right)$ تابع

$$F = x' \circ f \circ x^{-1} : R^n \longrightarrow R^{n'}$$

يك نمايشگر مختصاتي f ناميده مي‌شود.

اگر F در xm از رده‌ي C^∞ باشد، آنگاه f را در m ديفرانسيل‌پذير گويند.

$$F = x' \circ f \circ x^{-1} : R^n \longrightarrow R^{n'}$$

$$\begin{tikzcd} m \arrow[d, dotted] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & M' \arrow[d, "x'"] & fm \arrow[d, dotted] \\ xm & R^n \arrow[r, "F"] & R^{n'} & F(xm) \end{tikzcd}$$

توجه: دیفرانسیل‌پذیري f در m مستقل از انتخاب نمایشگر مختصاتي است. به فرض $G = y' \circ y^{-1}$ انتخاب نمایشگر دیگري باشد. اگر F در xm از ردهٔي C^∞ باشد آنگاه $\left(y' \circ x'^{-1}\right) \circ F \circ \left(x \circ y^{-1}\right)$ در ym از ردهٔي C^∞ است. لازم نیست که این تابع برابر G باشد اما یقیناً یك تحدید از G است و لذا خود در ym از ردهٔي C^∞ است.

تابع $f : M \longrightarrow M'$ دیفرانسیل‌پذیر است اگر در هر نقطه از قلمرویش دیفرانسل‌پذیر باشد.

۱-۳ توابع r- خطی و ۱- فرمی ها

۱-۳-۱ تعریف[25]: دوتائي (p,v) در E^n را در نظر مي‌گیریم، p نقطه اثر و v را یك بردار مماس در نقطهٔي p از E^n نامند. مجموعهٔي بردارهاي مماس در نقطهٔي p از E^n را به صورت $T_p\left(E^n\right)$ نشان مي‌دهند و $T_p\left(E^n\right)$ را فضاي مماس E^n در نقطه p نامند.

توجه: از این پس $(v,p) \in T_p\left(E^n\right)$ را با v_p نمایش مي‌دهیم، و $T_p\left(E^n\right)$ با عمل جمع و ضرب عددي یك زیرفضاي برداري است.

$$\oplus : T_p\left(E^n\right) \times T_p\left(E^n\right) \longrightarrow T_p\left(E^n\right)$$

$$\left(v_p, u_p\right) \longrightarrow v_p \oplus u_p = (p, v+u) = (v+u)\big|_p$$

$$\odot : R \times T_p\left(E^n\right) \longrightarrow T_p\left(E^n\right)$$
$$\left(\lambda, v_p\right) \longrightarrow \lambda \cdot \left(v_p\right) = \left(p, \lambda v\right) = \lambda v_p$$

كه در اين‌جا ساختمان $\{T_p(E^n), \oplus, R, +, ., \otimes\}$ روي ميدان حقيقي R يك فضاي برداري است بنابراين اگر V فضاي برداري E^n باشد، فضاي مماس را به‌طور خلاصه به صورت زير ارائه مي كنيم

$$T_p\left(E^n\right) = \left\{\left(p, v\right) : v \in V , p \in E^n\right\}$$

۱-۳-۲ تعريف[26]: اگر $U \subseteq E^n$ و U يك مجموعه‌ي باز باشد، تابع

$$X : U \longrightarrow \bigcup_{p \in U} T_p\left(U\right)$$

با ضابطه $X\left(p\right) = X_p$ تابعي است كه نقاط p از U را به فضاي برداري X_p از $\bigcup_{p \in U} T_p\left(U\right)$ مي‌نگارد و آن را ميدان برداري روي U گويند.

حال تابع زير را مي‌توان تعريف كرد

$$\pi : \bigcup_{p \in U} T_p\left(U\right) \longrightarrow U$$
$$X_p \longrightarrow p$$

و آن را تصوير طبيعي نامند و خود $\pi o X = I : U \longrightarrow U$ يك تابع هماني است. اگر به جاي فضاي اقليدسي E^n يك خمينه مانند M در نظر گرفته شود آن‌گاه تبديل X به صورت زير است

$$X : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p\left(M\right)$$
$$p \longrightarrow X\left(p\right) = X_p \in T_p\left(M\right)$$

به طوريكه اگر

$$\pi : \bigcup_{P \in U} T_P\left(U\right) \longrightarrow U$$
$$X_P \longrightarrow P$$

تصوير طبيعي باشد و

$$\begin{aligned} \pi o X = I : M &\longrightarrow M \\ P &\longrightarrow P \end{aligned}$$

آنگاه X روي خمينه‌ي M يك ميدان برداري است.

۱-۳-۳ تعريف [21]: مجموعه ميدان‌هاي برداري روي M كه با $\chi(M)$ نشان مي‌دهند، فضاي ميدان برداري را تشكيل مي‌دهد و نماد آن عبارت‌است از

$$\chi(M)=\left\{X \,|\, X : M \longrightarrow \bigcup_{P\in M} T_P(M)\right\}$$

با توجه به تعريف جمع

$$\begin{aligned} \oplus : \chi(M)\times\chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X\,,\,Y) &\longrightarrow X \oplus Y \end{aligned}$$

براي هر p در M، $(X+Y)_p = X_P + Y_P$ و $(\chi(M),+)$ يك گروه تعويض‌پذير است.

ضرب عددي با ميدان‌هاي برداري (فضاي برداري) عبارت است از

$$\begin{aligned} \odot : R\times\chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (k,X) &= kX \\ \forall p \in M \Rightarrow (kX)_P &= k\vec{X}_P \end{aligned}$$

پس ويژگي‌هاي فضاي برداري در آن صدق مي‌كند يعني ساختمان $\{\chi(M),\oplus,R,+,.,\otimes\}$ يك فضاي برداري است. اين فضاي برداري را روي خمينه‌ي M يا فضاي اقليدسي E^n، يك فضاي ميدان برداري گويند كه به صورت $\chi(E^n)$ هم ارائه مي شود.

۱-۳-۴ تعريف (دوگان فضاي مماس)[7]: دوگان فضاي مماس $T_p(E^n)$ را با $T_p^*(E^n)$ نشان مي‌دهيم و هر عضو $T_p^*(E^n)$ در نقطه p در E^n دوگان يك بردار مماس نامند به عبارتی در مجموعه

$$T_p^*(E_n)=\left\{V_p^* \,\middle|\, V_p^* : T_p(E^n)\to R\right\}$$

V_p^*دوگان بردار مماس است.

۱-۳-۵ تعریف (۱- فرمي)[7]: فرض کنید $T_p^*\left(E^n\right)$ دوگان فضاي مماس در نقطه p در E^n باشد

اگر تابع زير

$$\psi : E^n \to \bigcup_{p\in E^n} T_p^*\left(E^n\right)$$

طوري تعريف شود كه عبارت

$$\pi : \bigcup_{p\in E^n} T_p^*\left(E^n\right) \to E^n$$

$$\pi o \psi = I \; : E^n \to E^n$$

برقرار باشد آنگاه تابع ψرا يك، ۱_ فرمي گويند.

مجموعه‌ي همه ۱- فرمي ها در E^n را با $\chi^*\left(E^n\right)$نمايش مي‌دهند كه $\chi^*\left(E^n\right)$ دوگان فضاي ميدانهاي برداري است. بطور متشابه مي‌توان نشان داد كه ساختمان$\{\chi^*(E^n),\oplus,R,+,.,\otimes\}$ يك فضاي برداري ۱- فرمي‌ها است.

۱-۳-۶ مثال: $n+1$وجهي $\{p_{.},p_{۱},...,p_n\}$ در E^n مفروض است. مختصات اقليدسي كه به وسيله‌ي مجموعه نقاط$\{p_{.},p_{۱},...,p_n\}$ معلوم مي‌گردد به صورت $\{x_{۱},...,x_n\}$ نشان مي‌دهيم.

مجموعه‌ي برداري $\{\overrightarrow{p_{.}p_{۱}},...,\overrightarrow{p_{.}p_n}\}$ در E^nدرواقع يك پايه‌ي فضاي برداري E^n است.

اكنون $v_i=\overrightarrow{p_0p_i}$ را درنظر مي‌گيريم در آن‌صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : E^n \longrightarrow \bigcup_{p\in E^n} T_P\left(E^n\right)$$

$$p \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (p, v) = v_p$$

مي‌توان گفت كه $\frac{\partial}{\partial x_i}$ يك ميدان برداري در E^n است. به طور مشابه براي هر i، $1 \le i \le n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : E^n \longrightarrow \bigcup_{p \in E^n} T_P\left(E^n\right)$$
$$p \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \left\{p, \overrightarrow{p.p_۱}\right\}$$

مي‌توان ارائه كرد.

۱-۳-۷ تعريف [21]: در هر نقطه p در E^n، nتا بردار مماس به‌صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_۱}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_۱}(p) = (۱,۰,...,۰)\Big|_p$$
$$\frac{\partial}{\partial x_۲}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_۲}(p) = (۰,۱,...,۰)\Big|_p$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_n}(p) = (۰,۰,...,۱)\Big|_p$$

وجود دارد. بنابراين در E^n، n تا بردار به دست مي‌آيد. مجموعه ميدان برداري $\left\{\frac{\partial}{\partial x_۱},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$

را پايه‌ي طبيعي در E^n و يا به طور خلاصه ميدان برداري طبيعي نامند. در واقع مفهومش اين

است كه براي هر $1 \le i \le n$ ميدان برداري $\frac{\partial}{\partial x_i}$ مثبت بوده و در جهت محور x_i، ميدان برداري

يكه است. اگر $Y \in \chi\left(E^n\right)$ را در نظر بگيريم با توجه به تعريف، پايه $\{y_i\}_{i=۱}^n$ به صورت

$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ارائه مي‌شود. در اين‌جا $y_i : E^n \longrightarrow R$ ، $1 \le i \le n$ توابع مختصاتي اقليدسي

ميدان برداري Y است.

۱-۳-۸ تعريف (توابع r- خطي): فرض كنيد $V_1, \ldots\ldots\ldots, V_r$ روي ميدان R، r تا فضاي برداري باشند، آنگاه تابع $f : V_1 \times V_2 \times \ldots\ldots\ldots \times V_r \to R$ را يك تابع r- خطي ناميم اگر به ازاي هر i، $1 \le i \le r$، v_i در V_i و b,a در R باشند بطوريكه

$$f\left(v_1, \ldots\ldots, v_{i-1}, av_i + bv_i, v_{i+1}, \ldots\ldots, v_r\right) =$$
$$af\left(v_1, \ldots\ldots, v_i, \ldots\ldots, v_r\right) + bf\left(v_1, \ldots\ldots v_i, \ldots\ldots, v_r\right)$$

وقتي f، r- خطي باشد آنگاه به ازاي هر V_i ، خطي است.

اگر $r = 2$ آنگاه f را يك تابع دو خطي نامند يعني $f : V_1 \times V_2 \to R$ يك تابع دو خطي هست هر گاه به ازاي هر $v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V_1$, $v_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j \in V_2$

آنگاه $f\left(v_1, v_2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j f\left(x_i, y_j\right)$

كه $\{x_i\}$ پايه‌اي براي V_1 و $\{y_j\}$ پايه‌اي براي V_2 خواهند بود.

۱-۳-۹ تعريف: فضاي X را فضاي ضرب داخلي ناميده مي‌شود هرگاه ضرب داخلي روي X كه با نگاشت $\begin{cases} g : X \times X \to R \\ g(x, y) = \langle x, y \rangle \end{cases}$ معرفي مي‌شود داراي خواص زير باشد

۱. $\langle x, y \rangle > 0$ براي هر $0 \ne x \in X$, $\langle 0, 0 \rangle = 0$.

۲. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ براي هر $x, y \in X$.

۳. $< \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y > = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$.

براي هر $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ و هر $x_1, y_2, y \in X$

و نیز داریم $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{۱}{۲}}$.

اگر $\|x\| = ۱$ یعنـي $\langle x, x \rangle = ۱$ ، آنگاه بـردار $x \in X$ را بـردار واحد نامند و يك زيـر مجموعـهي غير تهي $\{x_۱, ..., x_n\}$ از X را مجموعه متعامد نامند هرگاه دو شرايط زير برقرار باشد.

الف- $\|x_i\| = ۱$ يعني $\langle x_i, x_j \rangle = ۱$ براي همه $i = j$

ب- $\langle x_i, x_j \rangle = ۰$ براي همه $i \neq j$

۱-۴ مشتق سويی و مشتق همورد

۱-۴-۱ ديفرانسيل گيري نسبي و مشتق: به فرض كه x يك نقشه با قلمروي U از يك خمينه ي ديفرانسيل‌پذير M باشد. نسبت به اين نقشه و نقشه هماني روي R ، يك تابع ديفرانسيل‌پذير $f : M \to R$ با قلمروي V داراي نمايش مختصاتي F است بطوريكه روي $U \cap V$ ، $f = F \circ x$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & R \\ x\downarrow & & \downarrow i \\ R^n & \xrightarrow{F} & R \end{array}$$

$F : R^n \to R$ يك تابع ديفرانسيل‌پذير است. پس بنابراين داراي مشتق نسبي $F_{,i}\ (i = ۱, ۲, ... n)$ است (مشتق نسبت به مولفه ي i ام). اكنون $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_{,i} \circ x : M \to R$ را تعريف كنيم. اينها تابع‌هاي ديفرانسيل‌پذير با قلمرو $U \cap V$ هستند.

اگر $x : M \to R^n$ يك نقشه باشد آنگاه اينگونه نگاشت ها، توابع مشتق‌هاي نسبي هستند. نقشه هماني روي R را معمولاً با t نمايش مي دهند. پس اگر $f : R \to R$ يك تابع ديفرانسيل‌پذير باشد، $\frac{\partial f}{\partial t}$ همان مشتق معمولي $\frac{df}{dt}$ است، بطور كلي توابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ درست شبيه مشتق‌هاي نسبي عمل مي كنند.

۱-۴- ۲ قضيه [26]: اگر g, f دو تابع ديفرانسيل‌پذير در M باشند، اگر $\alpha, \beta \in R$ آنگاه:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial g}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)=\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

۱-۴-۳ تعريف مشتق سويي [21]: فرض كنيم $f:E^n\to R$ يك تابع ديفرانسيل‌پذير باشد و $v_p\in T_p\left(E^n\right)$، $\vec{v}_p=\overrightarrow{pq}$. دراين صورت

$$\overrightarrow{v_p}[f]=\frac{d}{dt}\left[f\left(p_۱+t(q_۱-p_۱),p_۲+t(q_۲-p_۲),\ldots p_n+t(q_n-p_n)\right)\right]\Big|_{t=۰}$$

را مشتق f در جهت(سوي) v_p نامند.

۱-۴-۴ قضيه : اگر $f:E^n\to R$ يك تابع ديفرانسيل‌پذير و $v=(v_۱,v_۲..v_n)$ باشد دراينصورت:

$$v_p[f]=\sum_{i=۱}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p.$$

۱-۴-۵ مثال [26]: اگر $f(x)=f(x_۱,x_۲,x_۳)=x_۱^۲x_۲x_۳$ و $v=(۱,۳,۴)$ و $p=(۱,۱,۰)$ مفروض باشند، طبق قضيه $v_p[f]$ را بدست مي‌آوريم

$$\frac{\partial f}{\partial x_۱}\Big|_p=(۲x_۱x_۲x_۳)\big|_p=۰$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_۲}\Big|_p=(x_۱^۲x_۳)\big|_p=۰$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_۳}\Big|_p=(x_۱^۲x_۲)\big|_p=۱$$
$$v_p[f]=\frac{\partial f}{\partial x_۱}\Big|_p v_۱+\frac{\partial f}{\partial x_۲}\Big|_p v_۲+\frac{\partial f}{\partial x_۳}\Big|_p v_۳=۰\times۱+۰\times۳+۱\times۴=۴$$
$$v_p[f]=۴$$

اگر M يك خمينه ديفرانسيل‌پذير از بعد n باشد مجموعه‌ي توابع ديفرانسيل‌پذير $f:M\to R$ كه قلمروشان شامل يك نقطه ارائه شده $m\in M$ باشند با $F(m)$ نمايش مي‌دهيم. تركيبات R-خطي چنين توابع نيز متعلق به $F(m)$ مي باشند.

۱-۴-۶ تعریف[26]: يك تابع R - خطي $\wedge : F(m) \rightarrow R$ روي $F(m)$ يك عملگر روي $F(m)$ ناميده مي شود.

۱-۴-۷ قضيه[16] : اگر $\wedge : F(m) \rightarrow R$ يك عملگر خطي باشد و اگر $f, g \in F(m)$ روي بعضي از همسايگي‌هاي m توافق داشته باشند (منطبق باشند)، آنگاه $\wedge f = \wedge g$.

۱-۴-۸ تعريف(فضاي مماس) [26]: مجموعه همه مشتق‌هاي $F(m)$ داراي يك ساختار R - خطي و يك فضاي برداري حقيقي مي‌باشد كه آن را فضاي مماس $T_m(M)$ در m مي ناميم. هر مشتق روي $F(m)$ يك عضو از اين فضا است و يك بردار مماس در m ناميده مي شود.

۱-۴-۹ قضيه : اگر x نقشه اي از M باشد كه قلمرويش شامل يك نقطه ارائه شدهٔ m باشد بردارهاي

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

براي $T_m(M)$ تشكيل يك پايه مي دهند.

۱-۴-۱۰ تعريف[21]: اگر براي هر p در E^n و $X \in \chi(E^n)$ و $F \in C(E^n, R)$، $(XF)(P) = X_p[F]$ باشد، آنگاه تابع $X[F]$ در $C(E^n, R)$ را مشتق F در جهت ميدان برداري X نامند.

طبق تعريف اخير، بر اساس تساوي $(XF)(p) = X_p[F]$، X يك نگاشت است به قسمي كه $X : C(E^n, R) \rightarrow C(E^n, R)$ يك ميدان برداري، درعين حال يك ساختار $C(E^n, R)$ و بر روي خودش يك تبديل خواهد بود.

۱-۴-۱۱ قضيه[7]: اگر براي هر دو ميدان برداري $X, Y \in \chi(E^n)$ و $\forall f, g, h \in C(E^n, R)$ و

$\forall a,b\in R$ و هر P در E^n، $fX\left(P\right)=f\left(P\right)X_p$، در این صورت

۱- $\left(fX+gY\right)\left[h\right]=fX\left[h\right]+gY\left[h\right]$

۲- $X\left(af+bg\right)=aX\left[f\right]+bX\left[g\right]$

۳- $X\left(fg\right)=X\left[f\right]g+bX\left[g\right]$

۱-۴-۱۲ تعریف : فرض کنیم $I\subset R$ يك بازهٔ باز باشد، تابع ديفرانسيل‌پذير $\alpha:I\to E^n$ را يك خم گويند. اگر $\{x_1,...x_n\}$ توابع مختصاتي اقليدسي باشند كه $i=1,.....,n$، آنگاه $\alpha_i=x_i\circ\alpha$ توابعي ديفرانسيل‌پذير از I به R هستند.

۱-۴-۱۳ تعریف (خم ژئودرزي)[7]: اگر بردارهاي مماس از يك خم مانند γ، در امتداد γ موازي باشد، آنگاه γ را يك خم خود موازي يا يك ژئودرزي نامند.

۱-۴-۱۴ تعریف(مشتق همورد[1])[21]: مشتق تابع $f:E^n\to R$ در طول خم $\alpha:I\to E^n$ را مشتق همورد نامند و با نماد $\alpha'(t)\left[f\right]=D_{\alpha'(t)}f$ ارائه مي‌كنند.

۱-۴-۱۵ قضیه : اگر α در E^n يك خم و f يك تابع ديفرانسيل‌پذير با مقدار حقيقي باشد.

$$\alpha'(t_0)\left[f\right]=\frac{d\left(f\left(\alpha\right)\right)}{dt}\Big|_{t_0}=\frac{d}{dt}\left(f\circ\alpha\right)\Big|_{t_0}$$

اثبات : اگر $\alpha\left(t_0\right)$ در دامنه f باشد

$$\alpha'(t_0)=\left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t_0),...,\frac{d\alpha_n}{dt}(t_0)\right)$$

$$\alpha'(t_0)\left[f\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\alpha\left(t_0\right)\right)\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}\Big|_{t_0}$$

---

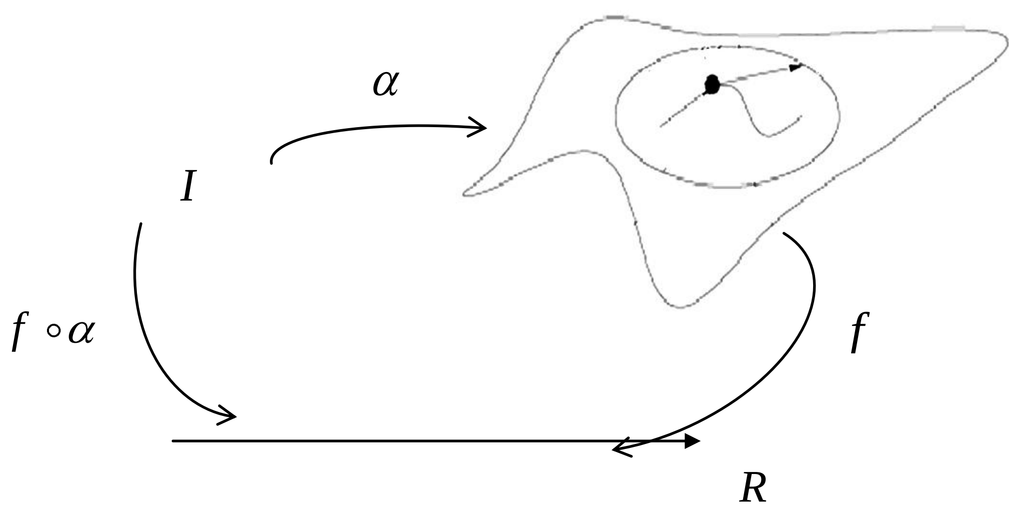
[1]-covariant derivative

ازطرفي طبق تعريف تابع مركب

$$f\left(\alpha(t_{.})\right)=(f\circ\alpha)(t_{.})$$
$$=f\left(\alpha_{1}(t_{.}),\alpha_{2}(t_{.}),\ldots,\alpha_{n}(t_{.})\right)$$

و با استفاده از قاعده زنجيري

$$\frac{df(\alpha)}{dt}(t_{.})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\alpha(t_{.})\right)\frac{d\alpha_i}{dt}(t_{.})=\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_{t_{.}}$$



اكنون دو ميدان برداري را در نظر ميگيريم و مشتق همورد يكي از ميدانهاي برداري در جهت ميدان برداري ديگر را تعريف ميكنيم.

۱-۴-۱۶ تعریف: $X,Y\in\chi\left(E^n\right)$ و P در E^n مفروض است.

$$X_p=\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)\Big|_p\in T_p\left(E^n\right)\qquad\forall p\in E^n$$

وميدان برداري Y، $Y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$ ميباشد. اگرتوابع مختصاتي $y_i:E^n\to R$ از ردهي C^∞ باشند، دراين صورت

$$D_{X_p}Y=\left(X_P[y_1],X_P[y_2],\ldots X_p[y_n]\right)$$

را مشتق همورد Yدر جهت X نامند.[30]

توجه : $D_{X_p}Y$ خود يك بردار مماس است اگر ميدانهاي برداري Y,X دريك ناحيه $U \subset E^n$ از ردهي C^∞ باشند، D_XY نيز در اين ناحيه ازردهي C^∞ خواهد بود. براي تفهيم بهتر اين مطلب به مثال زير توجه كنيد.

بردارهاي $Y = \left(xy^{۲} + ۴z , y^{۶} - x , x + z^{۳}\right)$ و $X = (\lambda,\eta,\delta)$ مفروض‌اند. D_XY را بدست مي‌آوريم

$$g_i = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_{۱}}, \frac{\partial Y_i}{\partial x_{۲}}, \frac{\partial Y_i}{\partial x_{۳}}\right) \quad i = ۱,۲,۳$$

$$\begin{aligned} D_XY &= \left[\langle X , g_{۱}\rangle, \langle X , g_{۲}\rangle, \langle X , g_{۳}\rangle\right] \\ &= \left(\lambda y^{۲} + ۲\eta xy + ۴\delta, \lambda + ۲\eta y , \lambda + ۳\delta z^{۲}\right) \\ &= \left(\langle x , \left(y^{۲}, ۲xy , ۴\right), \langle x , \left(-۱, ۲y , ۰\right)\rangle, \langle x , \left(۱, ۰, ۳z^{۲}\right)\rangle \right) \end{aligned}$$

۱-۴-۱۷ قضيه [27]: فرض كنيم U,X در E^n دو ميدان برداري و Y ، Z دو ميدان برداري از ردهي C^∞ باشند در اين صورت براي p در E^n , $f \in C^\infty\left(E^n, R\right)$ ويژگي‌هاي زير برقرارند

۱) $D_{X+U}Y = D_XY + D_UY$

۲) $D_X(fY) = X[f]Y + fD_XY$

۳) $D_{f(p)X}Y = f(p)D_XY$

۴) $D_X(Y + Z) = D_XY + D_XZ$.

۱-۵ گراديان و نگاشت مشتق

۱-۵-۱ تعريف[21]: فرض كنيم V روي ميدان F يك فضاي برداري باشد. اگر براي تبديل

$$f = [\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow V$$

ويژگي‌هاي زير صدق كند آنگاه f را روي V يك عملگر لي نامند.