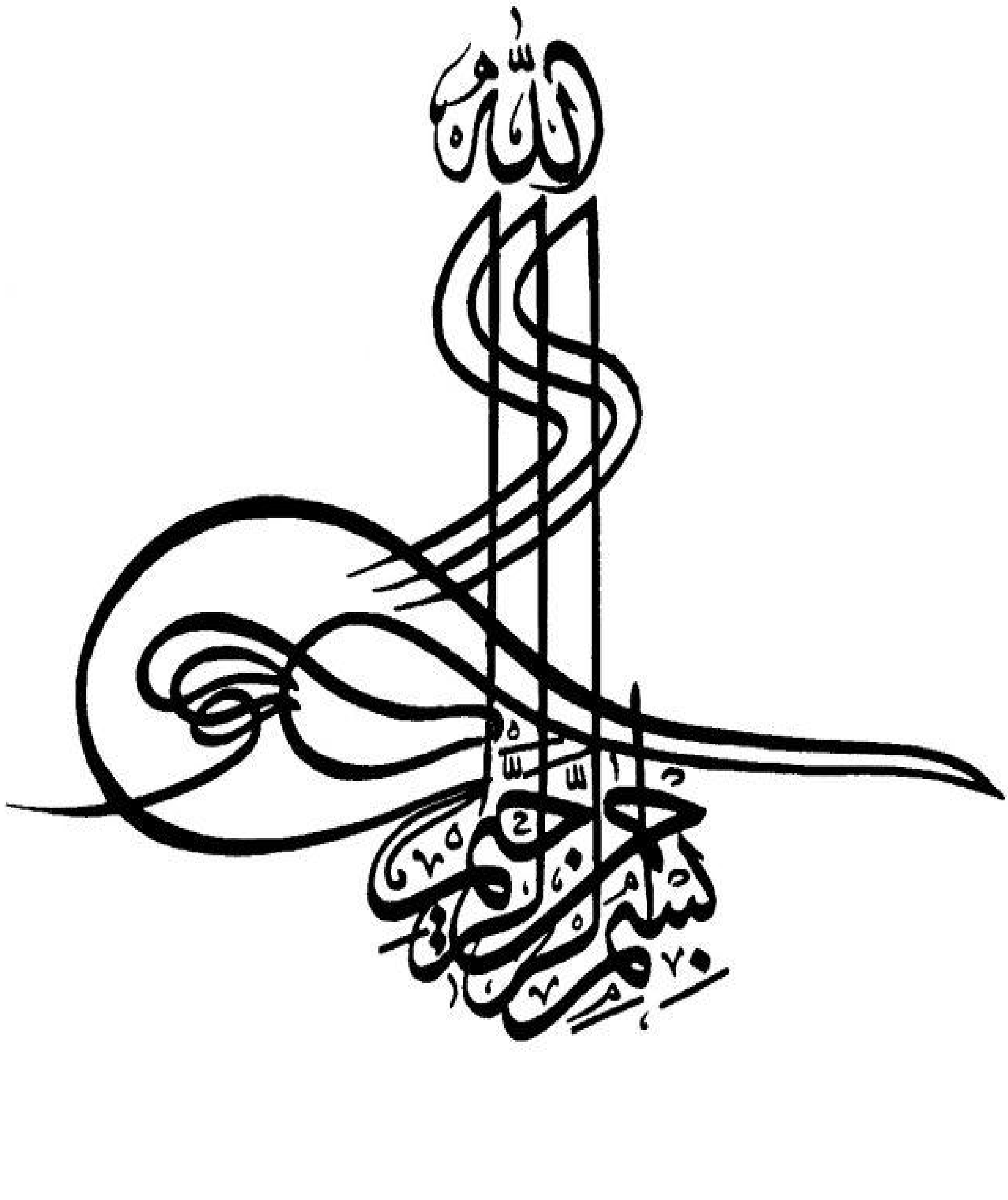
بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای علیرضا وهابی

تحت عنوان:

گروههای جبری وزندار بر روی گروه چندجمله ای های افزاینده

در تاریخ **۹۰/۷/۳۰** توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر فاطمه ابطحی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر اکرم یوسف زاده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیم به

دو بزرگ معلم زندگی ام

پدر و مادر

عزیز و بزرگوارم

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش پروردگار یکتا را که شوق آموختن را در قلبم نهاد و ذهن و اندیشه ام را به ابزاری مجهز نمود تا جهان و نظم آن را بیشتر درک کنم . و باز هم سپاس آن یکتا را که چشمه سار زلال مهربانی و عشق را با حضور خانواده و دوستان در کنارم ، به من ارزانی داشت تا وجودشان حامی و امید بخشم باشد و زندگی ام را به نور حضور اساتیدی روشن کرد که راهنما و مشوقم باشند و یاریم نمود تا در فضایی حضور یابم که برایم بهترین بود. حال که به کمک همه آنانی که همواره پشتیبان و راهنمایم بودند قدم کوچکی در راهی طولانی برداشته ام ، بر خود لازم می دانم از تمام کسانی که مرا در این مسیر یاری نمودند تقدیر و تشکر کنم .

ابتدا از دو اقیانوس بی کران محبت، عزیزترین و گرانبهاترین هدیه های آسمانی، **پدر و مادر** عزیزم که حضور گرمشان آرامبخش زندگیم ، وجودشان امید زیستنم ، نگاهشان و بودنشان امید خاطرم است، کمال سپاس و قدردانی را دارم . و از ، خواهر مهربانم سرکار خانم **نفیسه وهابی** که در تمامی این مسیر و نیز در مشقت های راه زندگی پشتیبان و امید بخش من بوده است صمیمانه سپاسگزاری می کنم . و از، دوست عزیز و مهربانم سرکار خانم **آذین باحور** که همواره با حضور گرم و مهربان خود در این مسیر مرا یاری نمود کمال تشکر را دارم .

از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای **دکتر علی رجالی** که در طول تحصیلم در این مقطع و این رساله، همواره راهنمایم بودند و فراتر از یک استاد راهنما با نهایت صبر و شکیبایی مرا از این راهنمایی های بی دریغ خود بهره مند ساختند، صادقانه نهایت تشکر را دارم و برایشان سلامتی، بهروزی و توفیق روزافزون را آرزومندم.

از سرکار خانم **دکتر فاطمه ابطحی** و سرکار خانم **دکتر یوسف زاده** که زحمت داور داخلی و داور خارجی این پایان نامه را بر عهده داشتند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از زحمتهای جبران ناپذیر دوست عزیزم جناب آقای **مهندس احسان شاکری** که مشوق و همراه دلسوز من در رسیدن به اهدافم بودند تشکر فراوان دارم.

علیرضا وهابی - مهرماه ۱۳۹۰

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

گروه‌های جبری وزن‌دار بر روی گروه چندجمله‌ای‌های افزاینده

استاد راهنما :

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

علیرضا وهابی

مهرماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم وجود خاصیت وینر را در مورد جبر گروهی وزن دار $L^1(G,\omega)$ بررسی کنیم. برای این کار ابتدا تعریفی از وزن ارائه می‌کنیم. سپس وزن هایی با شرایط خاص به ویژه وزن های زیرنمایی را معرفی می‌کنیم و با استفاده از قضایایی ارتباط بین آنها را بررسی می‌کنیم. به دنبال آن تقارن $L^1(G,\omega)$ را در حالات مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم و پس از آن محاسبات تابعی را بر روی کلیه قسمت های $L^1(G,\omega)$ گسترش می‌دهیم. نهایتا با استفاده از تقارن $L^1(G,\omega)$ و محاسبات تابعی، خاصیت وینر را در مورد $L^1(G,\omega)$، هنگامی که ω یک وزن زیرنمایی است به اثبات می‌رسانیم.

واژه های کلیدی: جبرهای گروهی وزن دار، وزن های زیرنمایی، محاسبات تابعی، تقارن، چندجمله ای های افزایشی، خاصیت وینر.

فهرست مطالب

فصل ۱

معرفی و مفاهیم مقدماتی

جبرهای گروهی وزن دار نقش مهمی را در قسمتهای مختلف آنالیز هارمونیک ایفا می‌کنند. برای گروههای آبلی بورلینگ ودمار، در [۳] و [۶] ویژگی های این گونه جبرها را بررسی کرده اند. برای گروه های غیر آبلی جزئیات به صورت پراکنده بیان شده اند.

اکنون اجازه دهید تعریفی از وزن ارائه دهیم وپس از آن نظریه جبرهای گروهی وزن دار را معرفی کنیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی آنالیز هارمونیک

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. کوچک ترین $\sigma-$ جبر مانند β در X وجود دارد به طوری که هر مجموعه باز در X متعلق به β است. اعضای β را مجموعه های بورل X گوییم. ومعمولا آن را به صورت $\beta := \beta(X)$ می نویسند.

تعریف ۲.۱. فضای اندازه پذیر (X, β) را در نظر بگیرید. هر گاه $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته از X بوده و Y یک فضای توپولوژیکی باشد. آن‌گاه به ازای هر مجموعه باز V در Y

$$f^{-1}(V) \in \beta.$$

به عبارت دیگر هر نگاشت پیوسته از X به Yاندازه پذیر بورل می‌باشد. نگاشت های اندازه پذیر بورل را اغلب نگاشت های بورل یا توابع بورل می نامند .

۲.۱ مقدمه ای بر وزن ها

تعریف ۳.۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار یا یک تابع حقیقی مقدار توسیع یافته بر یک فضای توپولوژیکی باشد. اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

گوییم f نیم پیوسته پایینی است و اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\{x : f(x) < \alpha\}$$

گوییم f نیم پیوسته بالایی است .

تعریف ۴.۱. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده باشد. یک وزن ω بر روی G یک تابع بورل است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega : G \longrightarrow [1, \infty)$$

به طوریکه برای هر $s, t \in G$

$$\omega(st) \leqslant \omega(s)\omega(t).$$

در این پایان نامه کلیه وزن ها را متقارن فرض می کنیم، یعنی برای هر $s \in G$ داریم.

$$\omega(s^{-1}) = \omega(s).$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که وزن ω همواره نیم پیوسته بالایی است. به علاوه همواره نیاز داریم که وزن ω روی یک مجموعه فشرده کراندار باشد. اگر G فشرده باشد، هر وزن ω با یک ثابت C معادل است.

۳.۱ مثال هایی از وزن ها

اکنون اجازه دهید مثال هایی از وزن ها ارائه دهیم.

مثال ۱.۱. فرض کنید (T, E) یک نمایش قویا پیوسته از گروه موضعا فشرده G روی یک فضای باناخ E باشد، در این صورت

$$\omega(s) := max\{\|T(s)\|, \|T(s^{-1})\|\}$$

$$\omega_1(s) := \|T(s)\| + \|T(s^{-1})\|$$

وزن هایی روی G هستند که نیم پیوسته بالایی نیستند.

مثال ۲.۱. تابع $\omega(s) = 1$ برای هر $s \in G$ یک وزن بدیهی بر روی G است.

مثال ۳.۱. تابع $e^{|t|} \longrightarrow t$ یک وزن بر روی $\mathbb{R}$ است. همچنین تابع $e^{\nu|t|^\alpha} \longrightarrow t$ با $0 < \alpha < 1$ و $\nu > 0$ یک وزن است.

تعریف ۵.۱. فرض کنید ω یک وزن بر روی G باشد. جبرگروهی وزن دار $L^1(G, \omega)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$L^1(G, \omega) := \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}, \|f\|_\omega = \int_G \mid f(x) \mid \omega(x)dx < \infty\}$$

به طوریکه f ها بورل اندازه پذیر باشند.

تعریف ۶.۱. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که با متریک تعریف شده به وسیله نرمش کامل باشد. (یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.)

تعریف ۷.۱. گوییم فضای باناخ A یک جبر باناخ است اگر در آن یک ضرب چنان تعریف شده باشد که شروط زیر در ان برقرار باشد :

۱)برای هر $x, y \in A$

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

۲)قانون شرکت پذیری برای هر $x, y, z \in A$ برقرار باشد، یعنی

$$x(yz) = (xy)z.$$

۳)قانون پخش پذیری برای هر $x, y, z \in A$ برقرار باشد، یعنی

$$(y+z)x = yx + zx.$$

و

$$x(y+z) = xy + xz$$

۴)به ازای هر اسکالر α رابطه زیر برقرار باشد

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy).$$

تعریف ۸.۱. اگر A یک جبر باناخ باشد. یک پیچش یک نگاشت $a^* \longmapsto a$ از A به A است، هرگاه خواص زیر برای هر $a, b \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ برقرار باشد .

$$(a^*)^* = a$$

$$(ab)^* = b^* a^*$$

$$(\alpha a + b) = \overline{\alpha} a^* + b^*.$$

توجه داشته باشید که اگر A یک پیچش و یک عنصر همانی داشته باشد، آن‌گاه داریم

$$۱^*.a = (۱^*.a)^{**}$$

$$۱^*.a = (۱^*.a) = (a^*.۱)^* = (a^*)^* = a$$

و به طور مشابه داریم

$$a.۱^* = a.$$

حال چون عضو همانی یکتاست داریم

$$۱^* = ۱.$$

همچنین برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم

$$\alpha^* = \overline{\alpha}.$$

تعریف ۹.۱. یک $\mathbb{C}^*$− جبر A یک جبر باناخ A با یک پیچش است به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲$$

تذکر ۱۰.۱. اگر A یک $\mathbb{C}^*$− جبر باشد و $a \in A$ آن‌گاه داریم

$$\|a\| = \sup\{\|ax\| : x \in A, \|x\| \leq ۱\}$$

$$= \sup\{\|xa\| : x \in A, \|x\| \leq ۱\}$$

نتیجه ۱۱.۱. پس $L^۱(G, \omega)$ یک $\mathbb{C}^*$− جبر باناخ با حاصلضربهای پیچشی است.

اثبات: با توجه به تعریف داریم

$$\|f * g\|_۱ \leq \|f\|_۱\|g\|_۱$$

لذا $L^۱(G, \omega)$ یک جبر باناخ است .

لذا نامساوی نرم ها همواره برقرار است . قانون شرکت پذیری را می توان مستقیما با اعمال قضیه فوبینی تضمین کرد ولی به صورت زیر نیز میسر می‌باشد .

می‌دانیم که تبدیل فوریه $f * g$ مساوی $\hat{g}$. $\hat{f}$ است و نگاشت $f \longrightarrow \hat{f}$ یک به یک است، پس بنابر قانون شرکت پذیری اعداد مختلط به ازای هر $t \in \mathbb{R}^۱$ داریم

$$\hat{f}\ (t) \left[\hat{g}\ (t)\ \hat{h}\ (t)\right] = \left[\hat{f}\ (t)\ \hat{g}\ (t)\right]\ \hat{h}\ (t).$$

پس داریم

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

به همین ترتیب فورا معلوم می‌شودکه $f * g = g * f$. لذا $L^۱(G, \omega)$ یک جبر باناخ تعویض پذیر است .

در ابتدا خاصیت تقارن جبرهای گروهی وزن دار را برای گروههای چند جمله ای افزاینده که به صورت فشرده تولید شده اند بررسی می‌کنیم. برای گروه $G=\mathbb{Z}$ پاسخ به این سوال معادل است با بررسی خاصیت وینر بر روی سری های فوریه به صورت مطلق همگرا که نایمارک در [۲۰] پاسخ کاملی برای ان ارائه کرده است.

برای گروههای چند جمله ای افزاینده و وزن های چند جمله ای، تقارن $L^{1}(G,\omega)$ به وسیله پیتلینگ در [۲۲] نشان داده شده است. دشوار ترین حالت از تقارن L^{1}- جبر ها اخیرا به وسیله لوزرت در [۱۶] اثبات شده است که نتیجه ان به صورت مفصل در قضیه‌ای برای گروههای چند جمله‌ای افزاینده به کار رفته است.

نمادگذاری ۱.۱. در یک گروه موضعا فشرده G عضو خنثی را با e و $|U|$ را اندازه هار چپ روی مجموعه بورل $U\subset G$ نمادگذاری می کنیم.

تعریف ۱۲.۱. گروه موضعا فشرده و به صورت فشرده تولید شده G دارای خاصیت چند جمله‌ای افزاینده است، اگر یک همسایگی متقارن و فشرده مانند $U\subset G$ و یک ثابت مانند $C>0$ و$D\in\mathbb{N}$ موجود باشد به طوریکه :

$$G:=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^{n}$$

و برای هر $k\in\mathbb{N}$ داشته باشیم :

$$|U^{k}|\leq Ck^{D}$$

کلاس کلیه گروههای موضعا فشرده و به صورت فشرده تولید شده از چندجمله‌ایهای افزاینده را با $[PG]$ نمایش می‌دهیم. و همچنین گوییم G به صورت محض خاصیت چندجمله ای‌افزاینده دارد، هر گاه یک همسایگی متقارن $U\subset G$ و ثابت های $C_{1},C_{2}>0$ و $D>0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $k\in\mathbb{N}$:

$$C_1 k^D \leq |U^k| \leq C_2 k^D$$

تبصره ۱.۱. در تعریف بالا کوچکترین D درجه رشد G گفته می‌شود.

توجه داشته باشید که اگر $G \in [PG]$، آن‌گاه G به صورت فشرده تولید می‌شود. که این کار با عوض کردن U با یک توان مناسب از خودش انجام می گیرد.
در تعریف بالا درون U یا $(intU)$ یک همسایگی متقارن از e است که G را تولید می‌کند یعنی :

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} int(U)^n.$$

برای اختصار ما یک همسایگی باز و متقارن و فشرده از عنصر همانی که G را تولید می‌کند یک همسایگی مولد G می‌گوییم.

تعریف ۱۳.۱. برای یک همسایگی مولد U داده شده تابع $\tau_U : G \longrightarrow [1, \infty)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم .
برای هر $x \neq e$ داریم :

$$\tau_U(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} | x \in U^n\}$$

و

$$\tau_U(e) = 1.$$

بنابراین τ_U یک وزن بر روی G ایجاد می‌کند و تابع $\omega_U(x) = 1 + \tau_U(x)$ یک وزن طبیعی بر روی G است. (برای اثبات این نکته به [۱۹], [۱۰] مراجعه فرمائید.)
یک وزن دلخواه بر روی G همواره در نامساوی زیر صدق می‌کند. یعنی برای هر $x \in G$ داریم

$$\omega(x) \leq e^{C\tau_U(x)}.$$

جایی که $C = Ln(\sup \omega(x))$. علاوه بر این برای هر α دلخواه که $0 \leq \alpha < 1$ و برای هر $C > 1$ تابع $\omega(x) = e^{C\tau_U(x)^\alpha}$، برای هر $x \in G$ یک وزن بر روی G است.

مثال ۴.۱. فرض کنید G یک گروه همبند و پوچ توان لی باشد. فرض کنید G_1 گروه مشتق شده G باشد،یعنی زیر گروه بسته تولید شده به وسیله عنصرهایی به فرم زیر باشد.

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

(برای هر $x, y \in G$.)

و فرض کنید U یک همسایگی مولد در G باشد و $V = U \cap G_1$ همسایگی متناظر از e در G_1 باشد آن‌گاه برای هر $x \in G_1$:

$$(1 + \tau_{U|G_1}(x)) \leq k(1 + \tau_U(x))^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

برای برخی از ثابت های مثبت k.

در نتیجه اگر ω یک وزن بر روی G باشد، آن‌گاه برای برخی از ثابت های C :

$$\omega|_{G_1}(x) \leq e^{C\tau_U(x)^{\frac{1}{2}}}.$$

(برای مشاهده روند اثبات نامساوی (۱) به [۲] مراجعه فرمائید.)

تعریف ۱۴.۱. برای هر وزن ω و هر همسایگی مولد U یک وزن $\nu_U^\omega : Z \longrightarrow [1, \infty[$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\nu_U(k) = \nu_U^\omega(k) = \sup\{\omega(y) \mid y \in U^{|k|}\}.$$

۴.۱ وزن ها با خواص ویژه

تعریف ۱۵.۱. اکنون برخی از خواص وزن ها را به صورت زیر بیان می کنیم :

الف) گوییم یک وزن ω شرط $Gelfand.Naimark.Rikov$ را برآورده می کند، هر گاه برای هر $x \in G$ داشته باشیم

$$\lim_k \omega(x^k)^{\frac{1}{k}} = 1.$$

ب) گوییم یک وزن ω شرط (S) را برآورده می کند هر گاه:

$$\lim_k \nu_U^{\omega}(k)^{\frac{1}{k}} = 1$$

ج) گوییم یک وزن ω زیرنمایی از بیشترین درجه α است $(0 < \alpha < 1)$، هرگاه $C > 0$وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x \in G$ داشته باشیم :

$$\omega(x) \leq e^{C\tau_U(x)^{\alpha}}.$$

۵.۱ اشاره ای مختصر به قضایای اساسی پایان نامه

در این پایان نامه، ما به دنبال اثبات جزئیات زیر هستیم .

قضیه ۱.۱. فرض کنید $G \in [PG]$. اگر وزن ω شرط S را برآورده کند، آن گاه $L^1(G, \omega)$متقارن است.

برای وزن های شعاعی یعنی وزن هایی که فقط به τ_U وابسته‌اند . برای برخی از همسایگی های U این صحبت را بر روی گروههای چند جمله‌ایهای افزاینده محض مطرح می‌کنیم. در واقع

این مبحث برای کلاسهای بزرگی از وزن ها به وجودآامده است که در ادامه به تعریف آان می‌پردازیم.

تعریف ۱۶.۱. یک وزن $\omega : G \longrightarrow [1, \infty)$ بر روی $G \in [PG]$، تعدیل شده گفته می‌شود، هر گاه یک دنباله $\varepsilon_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ با این شرط که $\lim_k \varepsilon_k = 1$ و یک همسایگی مولد U به طوریکه برای هر $k \in \mathbb{N}$:

$$\omega(x) \geq \varepsilon_k \sup\{\omega(y) \mid y \in U^k\}$$

برای هر $x \in G \setminus U^{|k|}$ برقرار باشد.

با این شرایط قضیه ای را که در زیر آمده است در فصل ۳ ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲.۱. فرض کنید G در شرایط تعریف بالا صدق کند. بعلاوه G گروه چند جمله‌ایهای افزاینده محض و ω تعدیل شده باشد. اگر $L^1(G, \omega)$متقارن باشد، آن‌گاه ω شرط (S) را برآورده می کند.

نکات اصلی در اثبات این قضیه ساختار اصلی گروههای چند جمله‌ای افزاینده لوزرت است. پس از ان برای وزن های زیر نمایی در فصل ۴ توابع حسابی $(F.C)$ را روی کلیه قسمت های $L^1(G, \omega)$ توسعه می‌دهیم. نهایتا با استفاده از این توابع حسابی و نیز تقارن $L^1(G, \omega)$ که درفصل ۳ به ان می پردازیم . در فصل ۵ به اثبات خاصیت زیر که به خاصیت وینر معروف است می پردازیم .

۶.۱ معرفی خاصیت وینر

قضیه ۳.۱. (خاصیت وینر):فر ض کنید $\omega, G \in [PG]$ یک وزن زیرنمایی بر روی G باشد آن گاه $L^1(G, \omega)$ دارای خا صیت وینر است یعنی برای هر ایده‌آل بسته و دو طرفه I از $L^1(G, \omega)$