بسم الله

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش جبر

گراف‌های مقسوم‌علیه صفر ماتریس‌ها روی حلقه‌های تعویض‌پذیر

استاد راهنما:

دکتر علی‌رضا نقی‌پور

استاد مشاور:

دکتر ندا آهنجیده

پژوهشگر:

مطهر جعفری مریکی

مهر ماه ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: جعفری مریکی نام: مطهر

عنوان: گراف‌های مقسوم‌علیه صفر ماتریس‌ها روی حلقه‌های تعویض‌پذیر

استاد راهنما: دکتر علی‌رضا نقی‌پور
استاد مشاور: دکتر ندا آهنجیده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهرکرد دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ماه ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۵

واژگان کلیدی: حلقه‌های تعویض‌پذیر، حلقه‌های ماتریسی، گراف‌های مقسوم‌علیه صفر.

چکیده

در این پایان‌نامه ویژگی‌های گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های ماتریس را بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از این نتایج در مورد رابطه‌ی بین قطر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی تعویض‌پذیر و حلقه‌ی ماتریس یا $M_n(R)$، بحث می‌کنیم.
علاوه بر این گراف کلی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R که با $T(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم، را معرفی و بررسی می‌کنیم. رئوس این گراف همه‌ی عناصر حلقه هستند و به‌ازای عناصر متمایز $x, y \in R$ دو رأس x و y با هم مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in Z(R)$.

تقدیم به آنان که به ما آموختند:

نیک بیاموزیم،

نیک بیاندیشیم

و نیک زندگی کنیم.

سپاس گزاری...

حمد و سپاس خدای را، آن نخستین بی‌پیشین را و آن آخرین بی‌پسین را و سپاس خداوندی را که خود را به ما شناسانید و شیوه سپاسگزاری‌اش را به ما الهام کرد و ابواب علم ربوبیت خویش را به روی ما بگشاد و ما را به اخلاص در توحید او راه نمود.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر نقی‌پور، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از سرکار خانم دکتر آهنجیده که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، جبهه می‌سایم به پیشگاه پدر و مادر از جان گرامی‌ترم بابت تمامی زحماتی که عاشقانه به پایم ریختند و با گرمی وجودشان تلخی سختی راه را برایم شیرین نمودند و تشکر می‌کنم از یاوران همیشگی‌ام در زندگی خواهران عزیزم. سلامتی و بهروزیشان را از ایزد منان مسئلت می‌نمایم.

مطهر جعفری مریکی

مهرماه ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه ویژگی‌های گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های ماتریس را بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از این نتایج در مورد رابطه‌ی بین قطر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی تعویض‌پذیر و حلقه‌ی ماتریس یا $M_n(R)$، بحث می‌کنیم.

علاوه بر این گراف کلی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R که با $T(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم، را معرفی و بررسی می‌کنیم. رئوس این گراف همه‌ی عناصر حلقه هستند و به‌ازای عناصر متمایز $x, y \in R$ دو رأس x و y با هم مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in Z(R)$.

کلمات کلیدی : حلقه‌های تعویض‌پذیر، حلقه‌های ماتریسی، گراف‌های مقسوم‌علیه صفر.

فهرست مطالب

Abstract **۸۳**

فهرست تصاویر

مقدمه

مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر اولین بار توسط بک [1] در سال ۱۹۸۸ [۹] معرفی شد، که بیشتر روی رنگ‌آمیزی گراف بود.

در سال ۱۹۹۳ تحقیق در زمینه‌ی رنگ‌آمیزی گراف توسط اندرسون [2] و نصیر [3] [۶] ادامه پیدا کرد. آن‌ها تعریفی با کمی تفاوت بیان کردند، به این صورت که همه‌ی اعضای R رئوس گراف هستند و رئوس x و y به هم متصل می‌شوند اگر و فقط اگر $xy = ۰$. این گراف را با $\Gamma_۰(R)$ نشان دادند. در $\Gamma_۰(R)$ رأس ۰ به همه‌ی رئوس متصل است اما عناصر غیرمقسوم‌علیه صفر R فقط به صفر متصل می‌شوند.

این مفهوم در سال ۱۹۹۹ توسط اندرسون [4] و لیوینگستون [5] [۴] دوباره تعریف شد. رئوس این گراف، مقسوم‌علیه‌های صفر غیرصفر R است. زمانی دو رأس به هم متصل می شوند که ضرب آن‌ها صفر شود. این گراف را با $\Gamma(R)$ نشان دادند. واضح است که $\Gamma(R)$ زیرگرافی از $\Gamma_۰(R)$ است.

ردموند [6] [۲۲] درسال ۲۰۰۲ این مفهوم را در مورد غیرتعویض‌پذیر توسعه داد و چندین تعریف از گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی غیرتعویض‌پذیر ارائه کرد.

پس از این قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های چندجمله‌ای و سری‌توانی روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر توسط اکستل [7] [۷] و همکاران در سال ۲۰۰۵ و اندرسون و مولای [8] [۵] در سال ۲۰۰۷ و لوکاس[9] [۱۸] در سال ۲۰۰۸ مطالعه شد.

در این تعاریف هم، رئوس گراف مقسوم علیه‌های غیر صفر حلقه هستند و زمانی دو رأس به هم متصل می‌شود که ضرب آنها صفر شود.

در سال ۲۰۰۹ بوزیک [10] و پترویک [11] [۱۱] در مورد گراف مقسوم‌علیه صفر ماتریس‌ها روی

---

[1] Beck
[2] D. D. Anderson
[3] Naseer
[4] D. F. Anderson
[5] Livingston
[6] Redmond
[7] Axtell
[8] Mulay
[9] Lucas
[10] Bozic

حلقه تعویض‌پذیر تحقیق کردند. آن‌ها چنین فرض کردند:

R حلقه‌ی تعویض پذیر و یکدار و $M_n(R)$ حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی R است، $\Gamma(R)$ و $\Gamma(M_n(R))$ به ترتیب به گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های R و $M_n(R)$ اشاره دارد، چون حلقه R، غیرتعویض‌پذیر است $\Gamma(R)$ گراف سودار است و منظور از $\bar{\Gamma}(R)$، گراف بی‌سوی مقسوم‌علیه صفر این حلقه می‌باشد.

موضوع این تحقیق پیدا کردن رابطه‌ی بین قطرهای گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(M_n(R))$ است. برخلاف نتایج قبلی، حالتی که آن‌ها بررسی کردند، شامل توسعه‌ی حلقه‌ی تعویض‌پذیر به حلقه غیرتعویض‌پذیر و سپس رابطه‌ی گراف‌های حلقه‌های تعویض پذیر و غیرتعویض‌پذیر است.

در سال ۲۰۰۸ اندرسون و بدوی [۱۲] [۱] در مورد گراف کلی یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر تعریفی ارائه کردند، به این صورت که گراف کلی R را با $T(\Gamma(R))$ نشان می دهد و رئوس گراف ساده، همه‌ی اعضای R است و برای هر دو عضو متمایز R مثل x, y رئوس x و y به هم متصل می‌شود اگر و فقط اگر $x + y \in Z(R)$ که $Z(R)$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R است.

فاصله‌ی بین هر دو رأس a و b را با $d(a, b)$ نشان می‌دهیم و طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها می‌گوییم. اگرهیچ مسیری بین a, b وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $d(a, b) = \infty$. قطر گراف را با $\mathrm{diam}\Gamma$ نشان می‌دهیم و برابر است با $\sup\{d(a, b) | \Gamma$ دو رأس متمایز گراف $a, b\}$ و کمر گراف را با $\mathrm{gr}(\Gamma)$ که طول کوتاه‌ترین دور در گراف است، نشان می‌دهیم. اگر در گراف دوری وجود نداشته باشد می‌نویسیم $\mathrm{gr}(\Gamma) = \infty$.

گراف مقسوم‌علیه صفر در [۴] این‌گونه تعریف شد: فرض کنیم R حلقه تعویض‌پذیر و $Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R باشد، گراف $\Gamma(R)$ از R با رئوس $Z(R)^* = Z(R) - \{۰\}$، که مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر غیرصفر R است، برای هر دو عضو متمایز $x, y \in R$ رأس x به رأس y متصل است اگر و فقط اگر $xy = ۰$، بنابراین $\Gamma(R)$ گراف تهی است اگر و فقط اگر R حوزه صحیح باشد.

گراف بدست آمده با این تعریف همیشه همبند است یعنی بین هر دو رأس آن مسیری وجود دارد و قطرش از ۳ و کمر آن از ۷ کوچکتر است. همچنین ثابت می‌شود که اگر R آرتینی باشد، آن‌گاه گراف مقسوم‌علیه صفر شامل یک دور است و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر کوچکتر از ۴ است. مقاله‌های زیادی در این زمینه وجود دارد که می‌توان به [۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۱۷، ۱۸، ۲۳] اشاره کرد.

گراف‌های مقسوم‌علیه صفر ماتریس‌ها روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر در [۱۱] به همین صورت تعریف می‌شود. ثابت می‌شود که گراف آن همبند است و قطرش از ۳ کوچکتر است و ارتباط بین قطرهای $\Gamma(R)$ و $\Gamma(M_n(R))$ بررسی می‌شود. همچنین ثابت می‌شود که اگر R حوزه صحیح باشد،

[۱۱] Petrovic
[۱۲] Badawi

آن‌گاه قطر گراف آن برابر ۲ می‌شود.

هدف اصلی این پایان‌نامه بدست آوردن گراف‌های مقسوم‌علیه صفر ماتریس‌ها روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر و ارتباط آن با گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی زمینه است.

در سراسر این پایان‌نامه R حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یک‌دار، $M_n(R)$ حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$، $Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های R، $\Gamma(R)$ گراف مقسوم‌علیه صفر R و $\Gamma(M_n(R))$ گراف مقسوم‌علیه صفر ماتریس $M_n(R)$ است.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر نظریه گراف

در این فصل به بیان مفاهیم مقدماتی نظریه گراف که پیش‌نیازی برای فصل‌های بعدی است، می‌پردازیم. مطالب این فصل از [۱۰] گردآوری شده است.

تعریف ۱.۰.۱. منظور از گراف ساده‌ی G، سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ به نام رأس‌ها، مجموعه‌ی $E(G)$ به نام یال‌ها و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G، یک جفت غیر مرتب از رأس‌های G را همراه می‌کند.
اگر e یک یال و u, v رأس‌هایی باشند، به‌طوری‌که $\psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گوییم e، u را به v وصل می‌کند و رأس‌های u, v با هم مجاورند.

تعریف ۲.۰.۱. گراف ساده‌ی $n-$رأسی را که در آن هر جفت از رأس‌های متمایز به‌وسیله‌ی یک یال به هم متصل باشد، گراف کامل می‌نامیم و با K^n نشان می‌دهیم.
گراف تهی گرافی بدون یال است.

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی $(X \neq \varnothing)$ و P یک دسته از زیرمجموعه‌های X باشد، گوییم P یک افراز X است، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. به‌ازای هر $A \in P$ و $A \neq \varnothing$ داشته باشیم $A \subseteq X$.

۲. به‌ازای هر $A, B \in P$ داشته باشیم $A \cap B = \varnothing$ یا $A = B$.

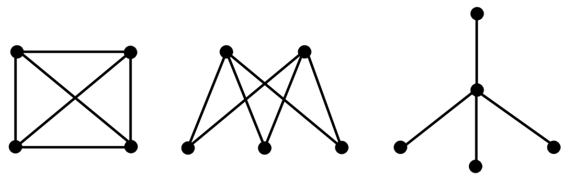
۳. $\bigcup P = \bigcup_{A \in P} A = X$.

تعریف ۴.۰.۱. گراف دوبخشی گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن را بتوان به دو زیر مجموعه‌ی $V_۱$ و $V_۲$ به طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در $V_۱$ و یک انتها در $V_۲$ باشد. چنین افراز $(V_۱, V_۲)$ را دوبخشی کردن گراف می‌نامیم.

تعریف ۵.۰.۱. گراف دوبخشی کامل، یک دوبخشی ساده با افراز $(V_۱, V_۲)$ است که در آن هر رأس $V_۱$ به هر رأس $V_۲$ متصل است. در صورتی که $|V_۱| = \alpha$ و $|V_۲| = \beta$ گراف دوبخشی را با $K^{\alpha,\beta}$ نشان می‌دهیم.

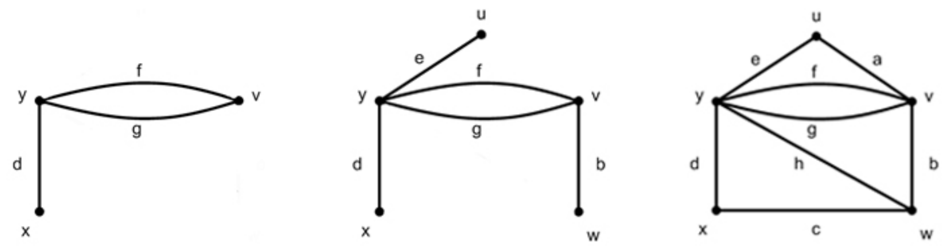
تعریف ۶.۰.۱. گراف ستاره، گراف دوبخشی کامل است به‌طوری‌که $|V_۱| = ۱$ و $|V_۲| = n$. گراف ستاره را با $K^{۱,n}$ نشان می‌دهیم.

شکل زیر نمونه‌ای از گراف ستاره یا $K^{۱,n}$، گراف کامل دوبخشی $K^{۲,۳}$ و گراف کامل $K^۴$ است.



شکل ۱.۱: گراف ستاره، گراف $K^{۲,۳}$ و گراف $K^۴$

تعریف ۷.۰.۱. گراف H زیرگراف G است اگر $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H تحدید ψ_G به $E(H)$ باشد. همچنین اگر V' زیرمجموعه‌ی ناتهی V باشد، در این‌صورت زیرگراف G را که مجموعه رأس‌هایش V' است و مجموعه یال‌هایش مجموعه‌ای از آن یال‌های G است که هر دو انتهایش در V' است، زیرگراف القاشده به‌وسیله‌ی V' می‌نامیم.
شکل ۲.۱ گراف G را همراه با زیرگراف و زیرگراف القایی آن نشان می‌دهد.



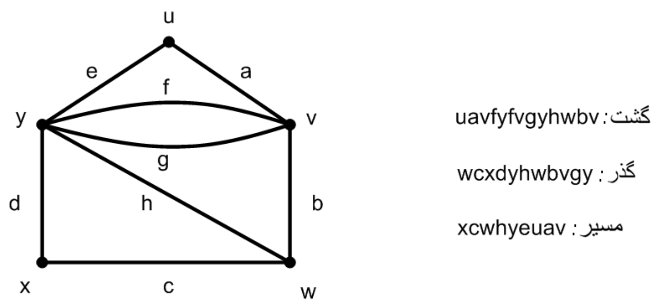
شکل ۲.۱: گراف G، زیرگراف G، زیرگراف القایی به‌وسیله‌ی $\{x, y, v\}$

تعریف ۸.۰.۱. درجه رأس v در گراف G، تعداد یال‌های G است که v در آن واقع است و با $d_G(v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۰.۱. گشت در گراف G دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... e_k v_k$ است، که جمله‌ها به طور متناوب رأس‌ها و یال‌ها هستند به‌طوری‌که به‌ازای $1 \leq i \leq k$ دو انتهای e_i، v_{i-1} و v_i هستند.

تعریف ۱۰.۰.۱. اگر یال‌های $e_1, e_2, ..., e_k$ در گشت W مجزا باشند، W را گذر می‌گوییم. اگر رأس‌های $v_0, v_1, ..., v_k$ مجزا باشند، W را مسیر می‌گوییم.

شکل ۳.۱، گشت، گذر و مسیر را در گراف G نمایش می‌دهد.



شکل ۳.۱: گراف G

تعریف ۱۱.۰.۱. دو رأس u و vی G را همبند گوییم، هرگاه مسیری از u به v در G موجود باشد و گراف G همبند است اگر بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۱۲.۰.۱. فاصله‌ی بین هر دو رأس u و v را با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم و طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها می‌گوییم. اگرهیچ مسیری بین u و v وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $d(u,v) = \infty$.

تعریف ۱۳.۰.۱. قطر گراف G را با $\mathrm{diam}G$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\mathrm{diam}G = \sup\{d(u,v) | u,v \text{ دو رأس متمایز گراف } G\}$$

و کمر گراف را با $\mathrm{gr}(G)$ که طول کوتاه‌ترین دور در گراف است، نشان می‌دهیم. اگر در گراف دوری وجود نداشته باشد، می‌نویسیم $\mathrm{gr}(G) = \infty$.

تعریف ۱۴.۰.۱. دو زیرگراف G_1 و G_2 از گراف G را مجزا گوییم هرگاه G_1 و G_2 دارای رئوس مشترک نباشد و هیچ رأس G_1 (یا G_2) متصل به هیچ رأسی که در G_2 (یا G_1) واقع است، نباشد.

تعریف ۱۵.۰.۱. دو گراف G و H را یک‌ریخت می‌گوییم و می‌نویسیم $G \cong H$، هرگاه دوسوییهای $\theta : V(G) \to V(H)$ و $\phi : E(G) \to E(H)$ موجود باشند به‌طوری‌که $\psi_G(e) = uv$ اگر و فقط اگر $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. چنین جفت (θ, ϕ) از نگاشت‌ها را یک یک‌ریختی بین G و H می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۰.۱. فرض کنیم G گراف بی‌سو باشد. به‌ازای رأس‌های متمایز a و b از گراف G تعریف می‌کنیم $a \leq b$، هرگاه a و b مجاور نباشند و هر رأس از گراف G که با رأس b مجاور است با رأس a نیز مجاور باشد.

تعریف ۱۷.۰.۱. رأس a را هم ارز رأس b می‌نامیم و آن را با نماد $a \sim b$ نمایش می‌دهیم، هرگاه $a \leq b$ و $b \leq a$ باشد. بنابراین $a \sim b$ است اگر و فقط اگر رئوس a و b با رئوس یکسانی مجاور باشند. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی گراف G است.

تعریف ۱۸.۰.۱. به‌ازای رئوس متمایز a و b از گراف G، تعریف می‌کنیم $a < b$، هرگاه $a \leq b$ باشد به‌طوری‌که رئوسی از گراف G موجود باشند که با رأس a مجاور هستند ولی با رأس b مجاور نیستند.

تعریف ۱۹.۰.۱. منظور از گراف سودار D، سه‌تایی مرتب $(V(D), A(D), \psi_D)$ متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(D)$ به نام رأس‌ها، مجموعه‌ی $A(D)$ به نام کمان‌ها، مجزا از $V(D)$ و تابع وقوع ψ_D است

که با هر کمان D، یک جفت مرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های D را همراه می‌کند.
اگر a یک کمان باشد و u,v رأس‌هایی باشند، به‌طوری‌که $\psi_D(a)=(u,v)$، آن‌گاه می‌گوییم a ،u را به v وصل می‌کند، u ابتدا و v انتهای این کمان است.

تعریف ۲۰.۰.۱. گشت سودار در گراف D دنباله‌ی ناتهی متناهی $W=v_۰a_۱v_۱a_۲v_۲...a_kv_k$ است که جمله‌ها به طور متناوب رأس‌ها و کمان‌ها هستند به‌طوری‌که به‌ازای $۱\leq i\leq k$ کمان a_i دارای ابتدا در $v_{i-۱}$ و انتها در v_i باشند. یک گذر سودار یک گشت سودار است که یک گذر است. مسیرهای سودار و دورهای سودار به طور مشابه تعریف می‌شوند.

قضیه زیر را از [۱۴] داریم.

قضیه ۲۱.۰.۱. *اگر گراف G شامل یک دور باشد، آن‌گاه* $\mathrm{gr}(G)\leq ۲\mathrm{diam}(G)+۱$.

فصل ۲
مقدمه‌ای بر جبر

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مهم در زمینه‌ی جبر و جبر خطی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌پردازیم. مطالب این فصل از مراجع [۱۳]، [۲۴] و [۱۶] گردآوری شده است.

۲.۲ تعاریف و نکات مقدماتی

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. مشخصه‌ی حلقه R به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{char}R = \min\{n \in \mathbb{N} | nR = 0\}$$

و اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $nR \neq 0$، قرار می‌دهیم $\mathrm{char}R = 0$.

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای یک‌دار باشد و $\mathrm{char}R = n > 0$. در این‌صورت:*

$$\mathrm{char}R = \min\{n \in \mathbb{N} | n1_R = 0\}$$

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای یک‌دار باشد. گوییم عنصر $a \in R$ وارون چپ دارد، هرگاه $b \in R$ چنان موجود باشد که $ba = 1$. همچنین گوییم عنصر $a \in R$ وارون راست دارد، هرگاه $c \in R$ چنان موجود باشد که $ac = 1$. عنصر $a \in R$ را وارون‌پذیر یا یکال گوییم، هرگاه وارون

چپ و وارون راست داشته باشد. مجموعه‌ی همه‌ی یکال‌های R را که با $U(R)$ نمایش داده می‌شود تحت عمل ضرب،تشکیل گروه می‌دهد که موسوم به گروه یکال‌های R است.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای یک‌دار باشد به‌طوری‌که $1_R \neq 0$. در این‌صورت حلقه‌ی R را حلقه‌ی بخشی یا تقسیم گوییم، هرگاه $U(R) = R - \{0\}$. به عبارت دیگر هر عنصر غیر صفرش وارون‌پذیر باشد. حلقه‌ی بخشی تعویض‌پذیر را میدان گوییم.

تعریف ۵.۲.۲. عنصر e از حلقه‌ی R را خودتوان گوییم، هرگاه $e^2 = e$.

تعریف ۶.۲.۲. عنصر a از حلقه‌ی R را پوچ‌توان گوییم، هرگاه به‌ازای $n \geq 1$ داشته باشیم $a^n = 0$.

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ را مقسوم‌علیه صفر چپ گوییم، هرگاه عنصر $b \in R$ و مخالف صفر موجود باشد به‌طوری‌که $ab = 0$. همچنین عنصر $a \in R$ را مقسوم‌علیه صفر راست گوییم، هرگاه عنصر $c \in R$ و مخالف صفر موجود باشد به‌طوری‌که $ca = 0$. مقسوم‌علیه صفر عنصری است که هم مقسوم‌علیه صفر چپ و هم مقسوم‌علیه صفر راست باشد. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R را با نماد $Z(R)$ نمایش می‌دهیم و $Z^*(R) = Z(R) - \{0\}$ را مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر غیر صفر حلقه می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای یک‌دار باشد به‌طوری‌که $1_R \neq 0$. در این‌صورت:

۱. R را حوزه گوییم، هرگاه مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R برابر با $\{0\}$ باشد.

۲. هر حوزه‌ی تعویض‌پذیر را یک حوزه صحیح گوییم.

قضیه ۹.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای یک‌دار باشد به‌طوری‌که $1_R \neq 0$. در این‌صورت R را حوزه صحیح می‌گوییم اگر و فقط اگر به‌ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $ab = 0$ نتیجه می‌دهد $a = 0$ یا $b = 0$.*

قضیه ۱۰.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای یک‌دار و p عددی اول باشد به‌طوری‌که $|R| = p$. در این‌صورت $R \cong \mathbb{Z}_p$.*