دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

ماتریس‌های تقریباً علامت منظم اکید نامنفرد

استاد راهنما

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور

دکتر مسعود امان

نگارنده

سمانه عباسی

شهریور ۱۳۹۳

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس خدای را که با الطاف ربانی اش توفیق داد تا این مجموعه را به پایان رسانده و از خداوند منان توفیق و سعادت همه ی پویندگان و رهروان علم و دانش را خواهانم.

پس از حمد و ثنای الهی و شکرگزاری به درگاه خداوند متعال اکنون که حاصل همه ی تلاش ها مثمر ثمر واقع شد بر خود فرض می دانم که با بضاعت اندک در کمال ادب و احترام مراتب سپاس خالصانه و صمیمانه را از همه ی کسانی که من را در این وادی یاری نمودند ابراز دارم.

از پدر و مادر عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند، تشکر و قدردانی می کنم.

از همسرم که اسوه صبر و تحمل بوده و با عشق و محبت، مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود، تشکر می کنم.

از زحمات استاد محترم راهنما، جناب آقای دکتر مهدی پناهی که در تمام مراحل انجام این تحقیق از رهنمودها و کمک های بی دریغ ایشان بهره مند بوده ام، به ویژه به خاطر ساعت های طولانی که به بحث و تبادل نظر در مورد موضوع تحقیق بنده اختصاص داده اند که همواره برای من الهام بخش ایده های تازه نسبت به موضوع بوده است، تشکر و قدردانی می کنم. استاد بزرگواری که هرگز پرسش های بی شمارم را در طول انجام این تحقیق بی پاسخ نگذاشت و مرحله به مرحله مسیر درست حرکت را به من نشان داد، که اکنون هر چه می دانم به پاس لطف و صبوری ایشان است.

از استاد محترم مشاور جناب آقای دکتر مسعود امان که لطف زیادی نسبت به من داشتند، سپاسگزاری می نمایم.

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

به همسرم، اسطوره زندگیم پناه خستگیم و امید بودنم، که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد. او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

و تقدیم به او که آموخت مرا تا بیاموزم استاد ارجمندم جناب آقای دکتر پناهی.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

از استادان فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر اسدا... محمودزاده وزیری و سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

سمانه عباسی
شهریورماه ۱۳۹۳

چکیده

اخیراً، رده‌ی ماتریس‌های تقریباً جمعاً مثبت اکید نامنفرد مشخص‌سازی شده است. در این تحقیق رده‌ی ماتریس‌های تقریباً علامت منظم اکید، که شامل ماتریس‌های تقریباً جمعاً مثبت اکید می‌باشد، معرفی می‌شود. یک مشخص‌سازی برای این ماتریس‌ها بر حسب مینورهای غیربدیهی آن‌ها با استفاده از سطرهای متوالی و ستون‌های متوالی ارائه می‌شود. به خصوص، یک مشخص‌سازی از ماتریس‌های تقریباً علامت منظم اکید معین، بر حسب مینورهای تقریباً بدیهی مرزی ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: ماتریس‌های تقریباً علامت منظم اکید، ماتریس‌های تقریباً جمعاً مثبت اکید، مینورهای تقریباً بدیهی مرزی

تعداد صفحات پایان نامه: ۶۲

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

یک ماتریس $n \times n$، A جمعاً مثبت (اکید)، TP (STP) است، هرگاه دترمینان همه‌ی زیر ماتریس‌های آن نامنفی (مثبت) باشند. به تازگی مشاهده شده است که یک زیر رده‌ی بسیار مهم از ماتریس‌های جمعاً مثبت، رده‌ی ماتریس‌های تقریباً جمعاً مثبت اکید (ASTP) می‌باشد. این ماتریس‌ها کاربردهای مهمی در بسیاری از زمینه‌ها مانند نظریه تقریب، طراحی هندسی با استفاده از کامپیوتر و غیره دارند [۹]. به وضوح، این رده از ماتریس‌ها واسط بین ماتریس‌های جمعاً مثبت و جمعاً مثبت اکید می‌باشد. مشخص‌سازی‌هایی که برای این رده از ماتریس‌ها ارائه شده است، از میزان محاسبات بر حسب تعداد مینورها می‌کاهد [۸، ۹، ۱۲، ۱۳].

ماتریس A (اکیداً) علامت منظم SR (SSR) است، هرگاه برای هر k ($1 \leq k \leq n$)، همه‌ی زیر ماتریس‌های $k \times k$ از A، دارای دترمینانی با علامت (اکید) یکسان باشند. این ماتریس‌ها طیف گسترده‌ای از کاربردها در بسیاری از زمینه‌ها مانند نظریه تقریب، ریاضیات، آمار، اقتصاد و غیره دارند [۱۸، ۲۱]. بسیاری از خصوصیات ماتریس‌های علامت منظم در [۲، ۶، ۷، ۱۷] ارائه شده است، که نشان می‌دهند برای تعیین علامت منظم بودن یک ماتریس، لازم نیست که علامت همه‌ی مینورهای آن بررسی شود. در دهه‌های اخیر، کاهش تعداد مینورهای بررسی شده برای تعیین علامت منظم بودن یک ماتریس، یکی از موضوعات اصلی در مطالعه‌ی این رده از ماتریس‌ها می‌باشد [۱۵].
سپس رده‌ی ماتریس‌های تقریباً علامت منظم اکید (ASSR) که واسط بین ماتریس‌های علامت منظم و اکیداً علامت منظم می‌باشد را معرفی می‌کنیم و مشخص‌سازی‌هایی را برای این رده از ماتریس‌ها بیان می‌کنیم. در این تحقیق هدف اصلی بررسی این رده از ماتریس‌ها می‌باشد.
این تحقیق به صورت زیر سازمان‌دهی شده است.

در فصل اول، نمادها، تعاریف اولیه و قضایایی که در روند تحقیق به کار گرفته شده و آشنایی با آن‌ها برای مطالعه و درک مطالب مؤثر است، رابیان می‌کنیم.

در فصل دوم، رده‌ی ماتریس‌های تقریباً علامت منظم اکید معرفی می‌شود.

در فصل سوم، یک مشخص‌سازی از این رده از ماتریس‌ها، بر حسب مینورهای غیربدیهی آن‌ها، با استفاده از سطرهای متوالی و ستون‌های متوالی ارائه می‌شود و نشان داده می‌شود که این رده از ماتریس‌ها، توسیع مناسبی از رده‌ی ماتریس‌های اکیداً علامت منظم می‌باشد.

در فصل چهارم، یک مشخص‌سازی از ماتریس‌های تقریباً علامت منظم اکید با دنباله علامت معین $\epsilon = (1, \ldots, 1, \epsilon_n)$، بر حسب مینورهای تقریباً بدیهی مرزی، ارائه شده است که این مشخص‌سازی از تعداد مینورهای بررسی شده می‌کاهد. در پایان مشاهده می‌کنیم که نتایج ما در حالت $\epsilon_n = -1$، تفاوت اندکی با حالت $\epsilon_n = 1$ دارد.

فصل ۱
تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

.

۱.۱ نمادها و تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف، نمادها و نتایج مقدماتی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم، ارائه می‌شود.

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $n \times m$ با $\mathbb{R}^{n\times m}$ و مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n با $\mathbb{R}^{n\times n}$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید $\langle n\rangle = \{۱, ۲, \dots, n\}$ و $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس همانی مرتبه‌ی n باشد.

تعریف ۱.۱.۱. ماتریس‌های $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

۱) ترانهاده‌ی B ماتریسی $m \times n$ است که آن را با B^T نشان داده و به صورت $B^T = (b_{ji})$، تعریف می‌شود.

۲) A بالا مثلثی[۱] (پایین مثلثی[۲]) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i > j$ $(j > i)$، $a_{ij} = ۰$.

۳) A منفرد نامیده می‌شود هرگاه $\det A = ۰$، در غیر این صورت آن را نامنفرد می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. برای $k, n \in \mathbb{N}$ که $k \in \langle n\rangle$، $Q_{k,n}$ به صورت مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های اکیداً صعودی از k عدد طبیعی کمتر یا مساوی n می‌باشد، یعنی

$$Q_{k,n} = \{\alpha | \alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_k), k \in \langle n\rangle, \alpha_i \in \mathbb{N} \ \forall i, ۱ \le \alpha_۱ < \alpha_۲ < \dots < \alpha_k \le n\}.$$

وقتی اعداد دنباله‌ی فوق متوالی باشند، مجموعه‌ی فوق را با $Q^{\circ}_{k,n}$ نمایش می‌دهیم.

---

[۱] upper triangular

[۲] lower triangular

تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q_{k,n}$ برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

و تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q^{\circ}_{k,n}$ برابر است با

$$n-(k-۱).$$

مثال ۳.۱.۱. برای $n=۴$ و $k=۱,۲$، داریم

$$Q_{۱,۴}=\{۱,۲,۳,۴\},$$
$$Q_{۲,۴}=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۴)\}$$

و

$$Q^{\circ}_{۲,۴}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}.$$

تعداد اعضای مجموعه‌های $Q_{۱,۴}$ و $Q_{۲,۴}$ به ترتیب برابراست با $۴=\binom{۴}{۱}$ و $۶=\binom{۴}{۲}$.
تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q^{\circ}_{۲,۴}$ برابر است با $۳=(۱-۲)-۴$.

تعریف ۴.۱.۱. برای یک دنباله‌ی $\alpha=(\alpha_i)\in Q_{k,n}$، عدد پراکندگی[۳] آن را با $d(\alpha)$ نشان داده و به صورت

$$d(\alpha)=\sum_{i=۱}^{k-۱}(\alpha_{i+۱}-\alpha_i-۱)=\alpha_k-\alpha_۱-(k-۱),$$

تعریف می‌کنیم، با این قرارداد که برای $\alpha\in Q_{۱,n}$، $d(\alpha)=۰$.
مشاهده می‌شود که $d(\alpha)=۰$، به این معنی است که α شامل k عدد صحیح متوالی است.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید $\alpha=(۱,۳,۵),\beta=(۲,۳,۴)\in Q_{۳,۵}$. در این صورت

$$d(\alpha)=۲, d(\beta)=۰.$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times m}$. گوییم $A\geq B$ هرگاه برای هر $i=۱,\dots,n$ و $j=۱,\dots,m$، $a_{ij}\geq b_{ij}$.

تعریف ۷.۱.۱. ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) نامیده می‌شود، هرگاه تمام درایه‌های آن نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) باشند و می‌نویسیم $A\geq ۰$ ($A>۰$، $A\leq ۰$، $A<۰$).

تعریف ۸.۱.۱. ماتریس $n\times n$ قطری[۴] D با $D=\mathrm{diag}(d_۱,d_۲,\dots,d_n)$ نشان داده می‌شود که در آن $d_۱$، $d_۲$، …، d_n درایه‌های قطری و سایر درایه‌های آن صفر هستند.

تعریف ۹.۱.۱. ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$، بالا هسنبرگی[۵] است، هرگاه $a_{ij}=۰$، به ازای هر i,j که $i>j+۱$. ترانهاده یک ماتریس بالا هسنبرگی یک ماتریس پایین هسنبرگی[۶] است، یعنی A

[۳] dispersion number
[۴] diagonal
[۵] upper Hessenberg
[۶] lower Hessenberg

پایین هسنبرگی است، هرگاه $a_{ij} = ۰$ به ازای $j > i + ۱$. یک ماتریس مربعی که هم بالا هسنبرگی و هم پایین هسنبرگی باشد سه قطری[۷] است.

تعریف ۱۰.۱.۱. ماتریس $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ که از تعویض سطرهای (یا ستون‌های) ماتریس همانی به دست می‌آید، یک ماتریس جایگشت[۸] نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس جایگشت P از چپ (از راست) در ماتریس A باعث تعویض سطرهای (ستون‌های) آن می‌شود. اگر P یک ماتریس جایگشت باشد، آن‌گاه $P^T P = I$.

مثال ۱۱.۱.۱. فرض کنید ماتریس جایگشت P و ماتریس A به صورت

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۵ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix},$$

باشند. در این صورت

$$AP = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{pmatrix},\ PA = \begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید l، k، m و n اعداد طبیعی باشند و $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. در این صورت

۱) اگر $k \le n$، $l \le m$، $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_k) \in Q_{k,n}$ و $\beta = (\beta_۱, \beta_۲, \dots, \beta_l) \in Q_{l,m}$، آن‌گاه زیرماتریس $k \times l$ از A شامل سطرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$،...، α_k و ستون‌های $\beta_۱$، $\beta_۲$،...، β_l را با $A[\alpha|\beta]$ نمایش می‌دهند. برای $k \le \min\{n, m\}$، دترمینان زیرماتریس مرتبه‌ی $k \times k$ از A شامل سطرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$،...، α_k و ستون‌های $\beta_۱$، $\beta_۲$،...، β_k را یک مینور[۹] A می‌نامند.

۲) اگر $k \le \min\{n, m\}$ و $\gamma = (\gamma_۱, \dots, \gamma_k) \in Q_{k,\min\{n,m\}}$، آن‌گاه زیرماتریس $A[\gamma|\gamma]$ را به اختصار با $A[\gamma]$ نشان می‌دهند و آن را یک زیرماتریس اصلی A می‌نامند. $\det A[\gamma]$ یک مینور اصلی[۱۰] A نامیده می‌شود.

۳) زیرماتریس اصلی $A[۱, ۲, \dots, k]$، $k = ۱, ۲, \dots, \min\{n, m\}$، زیرماتریس اصلی پیشرو A نامیده می‌شود. یک مینور اصلی پیشرو[۱۱] از مرتبه‌ی k برای A، مینوری به صورت $\det A[۱, ۲, \dots, k]$ می‌باشد.

---

[۷] tridiagonal
[۸] permutation matrix
[۹] minor
[۱۰] principal minor
[۱۱] leading principal minor

۴) یک مینور ستون-اول[۱۲] $k \times k$ از A، مینوری به شکل $\det A[\alpha|1,2,\ldots,k]$ می‌باشد که $\alpha \in Q^{\circ}_{k,n}$، $k = 1,2,\ldots,\min\{n,m\}$. یک مینور سطر-اول[۱۳] A به شکل $\det A[1,2,\ldots,k|\beta]$ است که $\beta \in Q^{\circ}_{k,m}$، $k = 1,2,\ldots,\min\{n,m\}$.

مثال ۱۳.۱.۱. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$\alpha = (1,2,4)$، $\beta = (2,3)$ و $\gamma = (1,2,3)$. در این صورت

$$A[\alpha|\beta] = A[1,2,4|2,3] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

یک زیرماتریس 3×2 از A،

$$A[\alpha] = A[1,2,4] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

یک زیر ماتریس اصلی 3×3 از A و

$$A[\gamma] = A[1,2,3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

یک زیرماتریس اصلی پیشرو 3×3 از A نامیده می‌شود.

مثال ۱۴.۱.۱. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha = (2,3)$ و $\beta = (3,4,5)$. در این صورت مینورهای ستون-اول $\det A[\alpha|1,2]$ و سطر-اول $\det A[1,2,3|\beta]$، به ترتیب برابرند با

$$\det A[\alpha|1,2] = \det A[2,3|1,2] = \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 22,$$

[۱۲] column-initial minor
[۱۳] row-initial minor

$$\det A[۱,۲,۳|\beta] = \det A[۱,۲,۳|۳,۴,۵] = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۶ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۸ \end{pmatrix} = ۶.$$

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $\epsilon = (\epsilon_۱, \epsilon_۲, \ldots, \epsilon_n)$ یک دنباله علامت با $|\epsilon_i| = ۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، باشد. در این صورت

۱) اگر برای هر $k \in \langle n\rangle$ و $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$،

$$\epsilon_k \det A[\alpha|\beta] \geq \circ (> \circ),$$

آن‌گاه A یک ماتریس علامت منظم (اکیداً علامت منظم) با علامت ϵ نامیده می‌شود و آن را با SR (SSR)[۱۴] نشان می‌دهند. به بیان دیگر ماتریس A علامت منظم (اکیداً علامت منظم) است، هرگاه برای هر $k \in \langle n\rangle$، همه‌ی مینورهای از مرتبه‌ی kی آن علامت (اکید) یکسان داشته باشد.

۲) اگر برای هر $k \in \langle n\rangle$ و $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$،

$$\det A[\alpha|\beta] \geq \circ (> \circ),$$

آن‌گاه A یک ماتریس جمعاً مثبت[۱۵] (جمعاً مثبت اکید) [۱۶] نامیده می‌شود و آن را با TP (STP) نشان می‌دهند. به بیان دیگر ماتریس A جمعاً مثبت (جمعاً مثبت اکید) است، هرگاه همه‌ی مینورهای آن نامنفی (مثبت) باشند.

مثال ۱.۱.۱۶. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & -۳ \\ -۴ & -۵ & -۶ & -۴ \\ -۵ & -۶ & -۶ & -۳ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. چون همه‌ی درایه‌های A منفی هستند، پس مینورهای مرتبه‌ی یک آن منفی می‌باشند. با یک محاسبه‌ی ساده می‌توان بررسی نمود که همه‌ی مینورهای مرتبه‌ی دو A نیز منفی هستند. در نتیجه A اکیداً علامت منظم با علامت‌های $\epsilon_۱ = \epsilon_۲ = -۱$ می‌باشد. برای $\alpha = (۱,۲,۳)$ و $\beta = (۲,۳,۴)$، $\det A[\alpha|\beta] > \circ$ و برای $\alpha = (۱,۲,۳)$ و $\beta = (۱,۲,۳)$، $\det A[\alpha|\beta] < \circ$، پس A اکیداً علامت منظم از مرتبه‌ی سه نیست.

مثال ۱.۱.۱۷. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ -۳ & -۴ & -۵ \\ -۵ & -۶ & -۶ \end{pmatrix},$$

SSR با علامت‌های $\epsilon_۱ = \epsilon_۲ = \epsilon_۳ = -۱$ می‌باشد.

شرط لازم برای اکیداً علامت منظم بودن یک ماتریس این است که آن ماتریس مثبت یا منفی باشد.

[۱۴] strictly sign regular
[۱۵] totally positive
[۱۶] strictly totally positive

مثال ۱.۱.۱۸. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۱ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. چون همه‌ی درایه‌های A مثبت هستند، پس مینورهای مرتبه‌ی یک آن مثبت می‌باشند. با یک محاسبه‌ی ساده می‌توان بررسی نمود که همه‌ی مینورهای مرتبه‌ی دو A نیز مثبت هستند. بعلاوه $\det A = ۶ > ۰$، پس A، STP است.

ماتریس‌های STP همگی SSR با علامت‌های $\epsilon_i = +۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$ می‌باشند، اما هر ماتریس SSR لزوماً STP نمی‌باشد، به عنوان مثال ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -۲ & -۱ \\ -۵ & -۴ \end{pmatrix},$$

SSR با علامت‌های $\epsilon_۱ = \epsilon_۲ = -۱$ بوده، اما STP نمی‌باشد.

به هر قضیه یا شروط معادلی که عضویت یک ماتریس در رده‌ی ماتریسی خاصی را مشخص می‌کند، یک مشخص‌سازی[۱۷] می‌گوییم. نتیجه‌ی زیر یک مشخص‌سازی برای ماتریس‌های علامت منظم نامنفرد بیان می‌کند. این نتیجه جهت به دست آوردن نتایجی برای رده‌ی جدیدی از ماتریس‌ها، که شامل ماتریس‌های SR نیز هستند، به کار گرفته می‌شود.

لم ۱.۱.۱۹. *ماتریس نامنفرد* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، *علامت منظم با دنباله علامت* $\epsilon = (\epsilon_۱, \ldots, \epsilon_n)$ *است، اگر و فقط اگر برای هر* $k \in \langle n \rangle$،

$$\epsilon_k \det A[\alpha|\beta] \geq ۰, \quad \forall \alpha, \beta \in Q_{k,n}, \quad d(\alpha) = ۰.$$

برهان. به [۱] رجوع شود. □

مثال ۱.۱.۲۰. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۰ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. به ازای $k = ۱$ با فرض $\epsilon_۱ = ۱$، برای هر $\alpha \in Q^{\circ}_{۱,۳}$، به وضوح داریم

$$\epsilon_۱ \det A[\alpha|\beta] \geq ۰.$$

[۱۷] characterization

قرار می‌دهیم $k = ۲$ و $\epsilon_۲ = ۱$. چون

$$\epsilon_۲ \det A[۱,۲|۱,۲] = ۵, \quad \epsilon_۲ \det A[۱,۲|۱,۳] = ۰,$$

$$\epsilon_۲ \det A[۱,۲|۲,۳] = ۰, \quad \epsilon_۲ \det A[۲,۳|۱,۲] = ۴,$$

$$\epsilon_۲ \det A[۲,۳|۱,۳] = ۳, \quad \epsilon_۲ \det A[۲,۳|۲,۳] = ۹,$$

پس برای هر $\alpha \in Q^{\circ}_{۲,۳}, \beta \in Q_{۲,۳}$،

$$\epsilon_۲ \det A[\alpha|\beta] \geq ۰.$$

همچنین برای $k = ۳$ و $\epsilon_۳ = ۱$،

$$\epsilon_۳ \det A[۱,۲,۳|۱,۲,۳] = ۱۵.$$

بنابراین ماتریس نامنفرد A، SR با علامت‌های $\epsilon_۱ = \epsilon_۲ = \epsilon_۳ = ۱$ می‌باشد.

نتیجه‌ی زیر مشخص‌سازی‌هایی را به ترتیب برای ماتریس‌های SSR و STP بیان می‌کند. این مشخص‌سازی‌ها تا حدود زیادی از میزان محاسبات برای بررسی SSR بودن و یا STP بودن یک ماتریس می‌کاهند.

قضیه ۲۱.۱.۱. *اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $\epsilon = (\epsilon_۱, \ldots, \epsilon_n)$ یک دنباله علامت باشد، آن‌گاه*

۱) A *اکیداً علامت منظم با علامت ϵ است، اگر و فقط اگر برای هر $k \in \langle n\rangle$،*

$$\epsilon_k \det A[\alpha|\beta] > ۰, \quad \forall \alpha, \beta \in Q^{\circ}_{k,n}.$$

۲) A *جمعاً مثبت اکید است، اگر و فقط اگر برای هر $k \in \langle n\rangle$،*

$$\begin{cases} \det A[\alpha|۱,\ldots,k] > ۰, & \forall \alpha \in Q^{\circ}_{k,n}, \\ \det A[۱,\ldots,k|\beta] > ۰, & \forall \beta \in Q^{\circ}_{k,n}. \end{cases}$$

برهان. به ترتیب به [۱] و [۱۰] رجوع شود. □

مثال ۲۲.۱.۱. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ -۳ & -۴ & -۵ \\ -۵ & -۶ & -۶ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. به ازای $k = ۱$ با فرض $\epsilon_۱ = -۱$، برای هر $\alpha, \beta \in Q^{\circ}_{۱,۳}$، به وضوح داریم

$$\epsilon_۱ \det A[\alpha|\beta] > ۰.$$

قرار می‌دهیم $k = ۲$ و $\epsilon_۲ = -۱$. چون

$$\epsilon_۲ \det A[۱,۲|۱,۲] = ۲, \epsilon_۲ \det A[۲,۳|۱,۲] = ۲,$$

$$\epsilon_۲ \det A[۱,۲|۲,۳] = ۲, \epsilon_۲ \det A[۲,۳|۲,۳] = ۶,$$

پس برای هر $\alpha, \beta \in Q^{\circ}_{۲,۳}$،

$$\epsilon_۲ \det A[\alpha|\beta] > ۰.$$

همچنین برای $k = ۳$ و $\epsilon_۳ = -۱$،

$$\epsilon_۳ \det A[۱,۲,۳|۱,۲,۳] = ۲ > ۰.$$

بنابراین A یک ماتریس SSR با علامت‌های $\epsilon_۱ = \epsilon_۲ = \epsilon_۳ = -۱$ می‌باشد.

مثال ۲۳.۱.۱. ماتریس تعریف شده در مثال ۱۸.۱.۱ را در نظر بگیرید. از قضیه ۲۱.۱.۱، برای $k = ۱$، $\det A[۱] = ۴ > ۰$، $\det A[۲|۱] = ۳ > ۰$ و $\det A[۳|۱] = ۱ > ۰$. برای $k = ۲$ داریم

$$\det A[۱,۲|۱,۲] = \begin{pmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix} = ۷,$$
$$\det A[۲,۳|۱,۲] = \begin{pmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix} = ۵,$$

که هر دو مثبت هستند. همچنین $\det A[۱,۲,۳] = ۶ > ۰$. به همین ترتیب مینورهای سطر-اول آن نیز مثبت می‌باشند. بنا به قسمت دوم قضیه ۲۱.۱.۱، ماتریس A جمعاً مثبت اکید است.

شرط لازم برای STP بودن یک ماتریس، مثبت بودن آن می‌باشد.

۲.۱ ماتریس‌های تقریباً جمعاً مثبت اکید

در این بخش رده‌ای از ماتریس‌ها را که واسط بین ماتریس‌های TP و STP هستند، معرفی می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. ماتریس TP، $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$، تقریباً جمعاً مثبت اکید (ASTP)[۱۸] است، هرگاه در دو شرط زیر صدق کند [۹].

۱) هر مینور A با سطرهای متوالی و ستون‌های متوالی مثبت باشد، اگر و فقط اگر درایه‌های قطری آن مینور مثبت باشند.

۲) در حالتی که A یک سطر یا ستون صفر داشته باشد، سطرها یا ستون‌های بعدی هم به ترتیب صفر باشند.

[۱۸] almost strictly totally positive

تبصره ۲.۲.۱. *چون ماتریس‌های جمعاً مثبت نامنفرد (NTP) [۱۹] در شرط (۲) صدق می‌کنند، پس یک ماتریس جمعاً مثبت نامنفرد A، $ASTP$ است هرگاه در شرط (۱) صدق کند. هر ماتریس جمعاً مثبت اکید A به طور بدیهی $ASTP$ است.*

مثال ۳.۲.۱. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. A جمعاً مثبت نامنفرد است اما STP نمی‌باشد. با یک محاسبه‌ی ساده می‌توان نشان داد که هر مینور از A با سطرهای متوالی و ستون‌های متوالی مثبت می‌باشد، اگر و فقط اگر درایه‌های قطری آن مینور مثبت باشند. بنابراین، بنا به تبصره ۲.۲.۱، ماتریس فوق ASTP است.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

به وضوح ماتریس A جمعاً مثبت نامنفرد است. چون دترمینان زیرماتریس A تشکیل شده از سطرهای ۳و۴ و ستون‌های ۲و۳، یعنی

$$\det \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix},$$

صفر می‌باشد، اما درایه‌های قطری آن مثبت هستند، بنابراین، بنا به تبصره ۲.۲.۱، ماتریس فوق ASTP نمی‌باشد.

مثال ۵.۲.۱. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۱ \end{pmatrix},$$

STP بوده و در نتیجه، بنا به تبصره ۲.۲.۱، ASTP است.

قضیه ۶.۲.۱. *اگر A یک ماتریس $ASTP$ باشد، آن‌گاه هر مینور A مثبت است اگر و فقط اگر درایه‌های قطری آن مینور مثبت باشند.*

برهان. به [۹] رجوع شود. □

[۱۹] nonsingular totally positive

تبصره ۱.۲.۷. *بنا به قضیه ۱.۲.۶، ماتریس جمعاً مثبتی که تنها در شرط (۱) تعریف ۱.۲.۱، صدق کند، $ASTP$ نمی‌باشد. به عنوان مثال ماتریس*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

جمعاً مثبت است و در شرط (۱) تعریف ۱.۲.۱ صدق می‌کند. اما دترمینان زیرماتریس A با سطرهای ۱و۳ و ستون‌های ۱و۳، یعنی

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

صفر می‌باشد و درایه‌های قطری آن مثبت هستند، بنابراین، بنا به قضیه ۱.۲.۶، ماتریس فوق $ASTP$ نیست.

۱.۳ ماتریس‌های جمعاً مثبت داخلی

در این بخش، رده‌ی ماتریس‌های جمعاً مثبت داخلی[۲۰] (ITP) معرفی می‌شود و یک مشخص‌سازی برای این رده از ماتریس‌ها ارائه می‌گردد، سپس با استفاده از آن، مشخص‌سازی برای ماتریس‌های ASTP نامنفرد[۲۱] (NASTP) بیان می‌شود. برای این منظور ابتدا نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم.
دنباله‌ی $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ یک دنباله‌ی پلکانی[۲۲] است، هرگاه نانزولی باشد و برای هر i، $\gamma_i \geq i$.
فرض کنید ρ و γ دنباله‌های پلکانی باشند. برای ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$، اگر $a_{ij} = 0$ زمانی‌که $i > \gamma_j$ یا $j > \rho_i$، آن‌گاه A یک ماتریس ρ، γ-پلکانی است.
علاوه بر این مینور $\det A[\alpha|\beta]$ با $\alpha = (\alpha_i), \beta = (\beta_i) \in Q_{k,n}$ یک مینور داخلی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $i = 1, 2, ..., k$،

$$\alpha_i \leq \gamma_{\beta_i} \text{ و } \beta_i \leq \rho_{\alpha_i},$$

و یک مینور خارجی[۲۳] نامیده می‌شود، هرگاه برای بعضی مقادیر $i = 1, 2, \ldots, k$، $\alpha_i > \gamma_{\beta_i}$ یا $\beta_i > \rho_{\alpha_i}$. اگر $\det A[\alpha|\beta]$ یک مینور خارجی باشد، آن‌گاه مقدار آن صفر می‌باشد و اگر $\det A[\alpha|\beta]$ یک مینور داخلی باشد مقدار آن می‌تواند صفر یا غیرصفر باشد.

تعریف ۱.۳.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ جمعاً مثبت داخلی نامیده می‌شود، هرگاه همه‌ی مینورهای داخلی A مثبت باشند [۸].

[۲۰] inner totally positive
[۲۱] nonsingular almost strictly totally positive
[۲۲] staircase sequence
[۲۳] outer minor

مثال ۲.۳.۱. ماتریس

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. با فرض $\rho=(۱,۲,۳,۴,۵)$ و $\gamma=(۲,۵,۵,۵,۵)$، واضح است که A یک ماتریس ρ، γ-پلکانی می‌باشد. به ازای $\alpha=(۴,۵),\beta=(۲,۳)\in Q_{۲,۵}$، مینور $\det A[۴,۵|۲,۳]$ در شرایط

$$\begin{cases} ۴\leq\gamma(۲)=۵ \\ ۵\leq\gamma(۳)=۵ \end{cases},\quad \begin{cases} ۲\leq\rho(۴)=۴ \\ ۳\leq\rho(۵)=۵ \end{cases}$$

صدق می‌کند، بنابراین یک مینور داخلی است، اما مقدار آن صفر است. در نتیجه بنا به تعریف ۱.۳.۱، A جمعاً مثبت داخلی نمی‌باشد.

نتیجه‌ی زیر یک مشخص‌سازی برای ماتریس‌های جمعاً مثبت داخلی بیان می‌کند. این مشخص‌سازی تا حدود زیادی از میزان محاسبات برای بررسی جمعاً مثبت داخلی بودن یک ماتریس می‌کاهد.

لم ۳.۳.۱. *فرض کنید $A=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس ρ، γ-پلکانی باشد. در این صورت A جمعاً مثبت داخلی است، اگر و فقط اگر همه‌ی مینورهای داخلی*

$$\det A[\alpha|\beta]>۰,\ \ \forall\, k\in\langle n\rangle,\ \ \alpha,\beta\in Q^{\circ}_{k,n}.$$

برهان. به [۸] رجوع شود. □

مثال ۴.۳.۱. ماتریس

$$A=\begin{pmatrix} ۶ & ۴ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. با فرض $\rho=(۴,۴,۴,۴)$ و $\gamma=(۱,۳,۴,۴)$، واضح است که A یک ماتریس ρ، γ-پلکانی است. برای $k=۱$ و هر $\alpha,\beta\in Q^{\circ}_{۱,۴}$، مینورهای داخلی

$$\det A[۱|۱]=۶,\ \det A[۱|۲]=۴,\ \det A[۲|۲]=۳,$$

$$\det A[۲|۳]=۴,\ \det A[۳|۳]=۳,\ \det A[۳|۲]=۱,$$

$$\det A[۳|۴]=۴,\ \det A[۴|۴]=۳,\ \det A[۴|۳]=۱,$$