دانشگاه تربیت معلّم تهران

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض(آنالیز)

موضوع:

قابهای وایل-هایزنبرگ(گابور)

استاد راهنما:

دکتر امیر خسروی

مؤلف:

قاسم نریمانی

شهریور ۱۳۸۰

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....
واحد ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه آقای قاسم نریمانی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

قابهای وایل ـ هایزنبرگ (قابهای گابور)

در روز چهارشنبه مورخهٔ ۸۰/۶/۲۸ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون (۱۸/۵) می‌باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر امیر خسروی	دکتر عبدالرسول پورعباس	دکتر علیرضا مدقالچی

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و
مهندسی کامپیوتر

۳۵۱۹۷

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

İthaf:

Hər nə dəyəri olmuş olsa

Ğözəl anama

Atamın ruhuna

və

Bütün yurd sevən vətəndaşlarıma

Ithaf edirəm.

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

اگر چه تبدیل فوریه در آنالیز به مدت بیش از یک قرن یکی از ابزارهای اساسی بوده و هنوز هم دارای اهمیت و کاربردهای فراوان است، دارای نقصان هایی برای آنالیز سیگنالها است. بدین ترتیب که تبدیل فوریه یک موج اطّلاعات مربوط به زمان شروع و پایان سیگنال ونیز برخی از اطلاعات دیگر را مخفی می کند. چاره این مشکل استفاده از یک نمایش دیگر است که نسبت به زمان و فرکانس متمرکز شده است که این اطلاعات از نمایش مذکور قابل حصول باشد.

در سال ۱۹٤٦ د. گابور این خلاء را پر کرد و شیوه ای را پایه گذاری کرد که به وسیله آن می توان سیگنال را به سیگنالهای مقدماتی تجزیه کرد. با شیوه گابور بلافاصله یک دوره نو برای آنالیز طیفی مربوط به روشهای زمان-فرکانس شروع شد. امروزه، ایده های گابور در مرکز کاربردهای قابهای گابور(وایل-هایزنبرگ) قرار دارند. گابور به خاطر کارها و موفقیاتش در این زمینه موفق به دریافت جایزه نوبل در سال ۱۹۷۱ شد.

قابها برای فضاهای هیلبرت به طور صوری به وسیله دوفین و شیفر در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه برخی مسایل جدی در زمینه آنالیز فوریه غیر هارمونیک تعریف شدند. اساساً دوفین و شیفر ایده اصلی گابور را برای پردازش سیگنالها به شکل مجرد در آوردند. با وجود این به نظر نمی رسید که ایده های دوفین و شیفر در خارج از زمینه سریهای فوریه غیر هارمونیک به کار گرفته شوند تا اینکه مقاله اساسی دابچیز، گراسمان و میر در سال ۱۹۸٦ منتشر شد. بعد از انتشار این مقاله مهم، مقوله قابها به طور گسترده ای مورد بررسی قرار گرفت که حاصل آن تشکیل گروه های تحقیقاتی و انتشار مقالات فراوان در این زمینه و کاربردهای آن است.

ما در این پایان نامه بنا به اهمیت موضوع دو مورد از جدیدترین مقالات را مورد مطالعه قرار داده ایم.

در فصل ۱ ، برخی از مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها را آورده ایم ونیز نمادهای به کـار رفتـه در پایان نامه را تثبیت کرده ایم.

در فصل ۲ ، در مورد قابها در فضاهای هیلـبرت بحـث کـرده ایـم. قابـها در فضاهـای هیلـبرت مجموعه هایی از بردارهای غیر مستقل خطی هستند اما با وجود این با استفاده از این بردارها می توان هر بردار فضا را به راحتی و به شکل کاملاً صریحی نمایش داد.

در فضای $L^2(\mathbf{R})$ دو نوع مهم از قابها وجود دارند که عبـارتند از قابـهای موجکـی وقابـهای وایل-هایزنبرگ، که موضوع بحث این پایان نامه در مورد قابهای وایل-هایزنبرگ است.

در فصل ۳ ، در مورد قابهای وایل-هایزنبرگ در حالت کلی بحث کرده ایم. در ایـن فصـل دنبـال جواب برای سؤال اصلی در مورد قابهای وایل-هایزنبرگ هستیم که این سؤال عبارت است از این کـه: بـه ازای کدام a,b و g هر تابع f را می توان با استفاده از ضربهای داخلـی $<f,E_{mb}T_{na}g>$ مشـخص کرد که $a,b\in\mathbf{R}$ ، $m,n\in\mathbf{Z}$ ، $f,g\in L^2(\mathbf{R})$ و

$$T_{na}g(x)=g(x-na),\quad E_{mb}g(x)=e^{2\pi imbx}g(x)$$

در فصل ٤ ، شرایط کافی برای اینکه $(E_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbf{Z}}$ یک قاب بـرای $\overline{\mathbf{span}}(E_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbf{Z}}$ باشد ارایه شده است که در حالت کلی $\overline{\mathbf{span}}(E_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbf{Z}}$ یک زیر فضای $L^2(\mathbf{R})$ است. شرایط ارایه شده در این فصل برای اینکه $(E_{mb}T_{na}g)_{m,n\in\mathbf{Z}}$ یک قاب برای $L^2(\mathbf{R})$ باشد، تا اندازه قابل ملاحظـه ای از شرایط ارایه شده در فصل قبل ضعیف تر است.

بالاخره در فصل ٥ ، قضایایی را در مورد رده بندی قابهای وایل-هایزنبرگ تنگ ارایه کرده ایم.

قدردانی

ابتدا خداوند متعال را شاکرم که توفیق داد تا از عهده کار این پایان نامه برآیم. سپس از خانواده ام تشکر می کنم که بدون یاری آنها انجام این مشکل امکان پذیر نبود. از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر امیر خسروی (استاد راهنمای این پایان نامه) سپاسگزارم که در طول مدتی که من بر روی این پایان نامه کار می کردم مرا مورد لطف قرار دادند و در برخورد با انواع مشکلات مرا راهنمایی کردند. از استاد عزیز جناب آقای دکتر علیرضا مدقالچی که علاوه بر قبول زحمت داوری این پایان نامه، در طول دوره کارشناسی ارشد همواره مرا مرهون عنایات خود کرده اند و از نعمت مشورت با ایشان برخوردار بوده ام تشکر و قدر دانی می کنم. امیدوار و آرزومندم که در آینده هم بتوانم از محضر این اساتید استفاده کنم. از استاد گرامی جناب آقای دکتر عبدالرسول پورعباس که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شده اند سپاسگزارم. بدین وسیله فرصت را غنیمت شمرده از کمک ها و راهنمایی های ایشان در دوره کارشناسی قدر دانی می کنم. علاوه بر اینها افراد دیگری نیز در این کار سهیم هستند که قدردانی از آنها را وظیفه خود می دانم. از آقای مهندس هادی اصغر نژاد خویی که همیشه از مصاحبت و مشورت ایشان در موضوع و کاربردها لذت برده ام نهایت تشکر را دارم. همچنین از خانم کارگر، مسؤول کتابخانه دانشکده به خاطر کمک هایشان تشکر می کنم.

فهرست

فصل یک

پیشنیازها

نمادگذاری و تعاریف

مجموعـه اعـداد مختـلط را با $\mathbf{C}$ و مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbf{R}$ نشان می دهیم و در صورتی که یـک گزاره برای هر کدام از این مجموعه ها برقرار باشد از نماد $\mathbf{\Phi}$ به جای آنها استفاده می کنیم. قـدر مطلـق عـدد $\alpha \in \mathbf{\Phi}$ را با $|\alpha|$ و مزدوج آن را با $\overline{\alpha}$ نمایش می دهیم. برای نشان دادن محور فرکانس از نماد $\hat{\mathbf{R}}$ استفاده می کنیم. مجموعه اعداد صحیح را با $\mathbf{Z}$ نشان می دهیم.

گروه چنبره $\mathbf{T}$ عبارت است از دایره یکه در $\mathbf{C}$. یعنی

$$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$$

ما $\mathbf{T}$ را با بازه $[0,1)$ با متناظر گرفتن عدد $t \in [0,1)$ با $e^{2\pi i t} \in \mathbf{T}$ یکی می گیریم.

برای دنباله ها و سری ها اگر حدود اندیس گذاری و جمع بندی مشخص نشده باشد ، روی $\mathbf{Z}$ در نظر گرفته شده است. نیز اگر برای انتگرال ها حدود انتگرال گیری ذکر نشده باشد، روی $\mathbf{R}$ در نظر گرفته شده است.

در سرتاسر این پایان نامه تمامی انتگرال ها نسبت به اندازه لبگ می باشد. اندازه لبگ مجموعه E را با $\mu(E)$ نشان می دهیم. همه توابع روی $\mathbf{R}$ و یا روی زیر مجموعه ای از آن تعریف شده و مقادیر آنها در $\mathbf{C}$ است، مگر این که خلاف آن ذکر شود.

تعریف:

(۱) محمل تابع با مقادیر مختلط f ، که با نماد $\operatorname{supp}(f)$ نشان داده می شود. به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbf{R} : f(x) \neq 0\}}$$

(۲) سوپریموم اساسی تابع با مقادیر حقیقی f به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \inf\{\lambda \in \mathbf{R} : f(x) \leq \lambda \ a.e.\}$$

و اینفیموم اساسی آن به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \sup\{\lambda \in \mathbf{R} : f(x) \geq \lambda \ a.e.\}$$

(۳) تابع مشخصه مجموعه $E \subseteq \mathbf{R}$ عبارت است از

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

(٤) دلتای کرونیکر عبارت است از

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

تعریف: به ازای $1 \leq p < \infty$، فضای لبگ $L^p(\mathbf{R})$ عبارت است از

$$L^p(\mathbf{R}) = \{f : \|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

وبرای $p = \infty$

$$L^{\infty}(\mathbf{R}) = \{f : \|f\|_{\infty} = \mathbf{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}}|f(x)| < \infty\}$$

می دانیم که به ازای $1 \le p \le \infty$ ، $L^p(\mathbf{R})$ یک فضای باناخ با نرم $\|\cdot\|_p$ و $L^2(\mathbf{R})$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$$

می باشد. نامساوی کوشی-شوارتس بیان می کند که

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

دنباله ها در فضاهای هیلبرت

تعریف: فرض کنیم $\mathbf{H}$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle \cdot,\cdot \rangle$ و نرم $\|\cdot\|$ باشد و (x_n) یک دنباله از عناصر $\mathbf{H}$ باشد

(۱) می گوییم (x_n) به $x \in \mathbf{H}$ همگرا است و می نویسیم $x_n \to x$ ، هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 .$$

(۲) می نویسیم $\sum x_n = x$. و می گوییم $\sum x_n$ به x همگرا است هرگاه $S_N \to x$ که $S_N = \sum_{-N}^{N} x_n$.

(۳) می گوییم سری $\sum x_n$ به طور نامشروط همگرا است ، هرگاه به ازای هر جایگشت σ از اعداد صحیح سری $\sum x_{\sigma(n)}$ به یک عنصر از $\mathbf{H}$ همگرا باشد.

(٤) سری $\sum x_n$ را مطلقاً همگرا گوییم هرگاه $\sum\|x_n\|$ همگرا باشد.

(۵) زیرفضای تولید شده به وسیله (x_n) عبارت است از مجموعه تمام ترکیب های خطی متناهی از x_nها. یعنی

$$\mathbf{span}(x_n)=\left\{\sum_{-N}^{N}c_nx_n : N>0, c_n\in\mathbf{C}\right\}.$$

(٦) دنباله (x_n) متعامد است هرگاه به ازای هر $m,n\in\mathbf{Z}$ که $m\neq n$

$$\langle x_m,x_n\rangle=0\ .$$

(٧) دنباله (x_n) متعامد یکه (یکامتعامد) است، هرگاه متعامد بوده وبه ازای هر $n\in\mathbf{Z}$

$$\|x_n\|=1\ .$$

(٨) دنباله های (x_n) و (y_n) را دو متعامد یکه می نامیم هرگاه به ازای هر $m,n\in\mathbf{Z}$

$$\langle x_m,y_n\rangle=\delta_{mn}\ .$$

(٩) دنباله (x_n) کامل است، هرگاه $\mathbf{span}(x_n)$ در $\mathbf{H}$ چگال باشد، ویا به طور معادل هرگاه

$$(x_n)^{\perp}=\{x\in\mathbf{H}:\langle x,x_n\rangle=0,\ n\in\mathbf{Z}\}=\{0\}\ .$$

١-١.قضیه: برای دنباله متعامد یکه (e_n) در فضای هیلبرت $\mathbf{H}$ ، احکام زیر معادل هستند:

(١) (e_n) کامل است.

(٢) به ازای هر $x\in\mathbf{H}$

$$\sum\left|\langle x,e_n\rangle\right|^2=\|x\|^2\ .$$

(٤) به ازای هر $x\in\mathbf{H}$

$$x=\sum\langle x,e_n\rangle e_n\ .$$

برهان: رجوع کنید به [٢٥].

///

تعریف: یک دنباله متعامد یکه که در یکی از شرط های معادل قضیه فوق صدق کند، یک پایه متعامد یکه نامیده می شود.

از حکم (۳) قضیه فوق نتیجه می شود که ضرایب $\langle x, e_n \rangle$ منحصر به فرد هستند. یعنی هیچ $x \in \mathbf{H}$ را نمی توان به صورت دیگری به شکل $x = \sum c_n x_n$ نوشت.

تعریف: دنباله (x_n) را در فضای هیلبرت $\mathbf{H}$ یک پایه ریتس می نامیم هرگاه

$$\overline{\mathbf{span}}(x_n) = \mathbf{H}$$

و

$$\forall (c_i)_{i\in I} \in l^2(I), \exists A, B > 0: \quad A\sum |c_i|^2 \le \|\sum c_i x_i\|^2 \le B\sum |c_i|^2$$

در صورتی که (x_n) یک پایه ریتس برای $\overline{\mathbf{span}}(x_n)$ باشد، آن را یک دنباله ریتس می نامیم.

تعریف: دو پایه (x_n) و (y_n)را در فضای هیلبرت $\mathbf{H}$ معادل می نامیم، هرگاه هر دو همگرا و یا هر دو واگرا باشند.

۱-۲.قضیه: دو دنباله (x_n) و (y_n) در فضای هیلبرت $\mathbf{H}$ معادل هستند اگر وفقط اگر یک عملگر وارون پذیر کراندار $T: \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر n داشته باشیم:

$$Tx_n = y_n .$$

برهان: رجوع کنید به (قضیه۷ ،بخش ۱ در [۲۶]).

///

۱-۳.قضیه: فرض کنید $\mathbf{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت گزاره های زیر معادل هستند:

(۱) دنباله (x_n) یک پایه ریتس برای $\mathbf{H}$ است.

(۲) **یک دنباله متعامد یکه در $\mathbf{H}$ موجود است که با (x_n) معادل است.**

(۳) دنباله (x_n) در $\mathbf{H}$ کامل است و ماتریس گرام

$$((x_i, x_j))_{i,j\in Z}$$

یک عملگر وارون پذیر کراندار روی $\mathbf{H}$ تولید می کند.

برهان: رجوع کنید به (قضیه۹ ،بخش ۱ در [۲۶]).

///

تبدیلات فوریه

در این زیر بخش خواص تبدیل فوریه توابع تعریف شده روی $\mathbf{R}$ را یاد آوری می کنیم.

تعریف(تبدیل فوریه روی $L^1(\mathbf{R})$):هرگاه $f \in L^1(\mathbf{R})$ می نویسیم

$$f^{\wedge}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i\xi x} f(x)dx$$

$$f^{\vee}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\xi x} f(x)dx$$

بنا به تعریف $f^{\wedge}$ را تبدیل فوریه تابع f و $f^{\vee}$ را وارون تبدیل فوریه f می نامیم. این انتگرال ها ، فقط و فقط وقتی معنی دار هستند که $f \in L^1(\mathbf{R})$، زیرا $\left|e^{-2\pi i\xi x}\right| = 1$. قضیه ارزشمند زیر رفتار عمومی $f^{\wedge}$ را توصیف می کند:

۱-٤.قضیه: اگر $f \in L^1(\mathbf{R})$ ، آنگاه $f^{\wedge}$ در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) $f^{\wedge}$ روی $\mathbf{R}$ پیوسته و کراندار است.

(۲) تبدیل فوریه عملگری خطی و پیوسته از $L^1(\mathbf{R})$ به $L^{\infty}(\mathbf{R})$ است و

$$\left\|f^{\wedge}\right\|_{\infty} \le \|f\|_1 .$$

(۳) داریم

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \left|f^{\wedge}(\xi)\right| = 0$$

برهان: رجوع کنید به (قضیه ۱۷-۱-۳در [١٤]).

///

۱-۵.گزاره: فرض کنید $f, g \in L^1(\mathbf{R})$.در این صورت $f.g^{\wedge}$ و $f^{\wedge}.g$ در $L^1(\mathbf{R})$ هستندو

$$\int f(x)g^{\wedge}(x)dx = \int f^{\wedge}(x)g(x)dx .$$

برهان: رجوع کنید به (قضیه ۱۷-۱-٤در [١٤]).

///

تبصره: وارون تبدیل فوریه در خاصیت های قضیه و گزاره فوق صدق می کند.

تعریف می کنیم

$$f_\sigma(x) = f(-x)$$
$$(T_a f)(x) = f(x-a)$$

و

$$(E_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x)$$

با این تعاریف گزاره زیر را داریم:

۱-۶.گزاره: برای $f \in L^1(\mathbf{R})$ روابط زیر برقرار است:

(۱) $\overline{f^\wedge(x)} = (\overline{f})^\vee(x)$

(۲) $(f^\wedge)_\sigma = f^\vee = (f_\sigma)^\wedge$

(۳) $(T_a f)^\wedge = E_{-a} f^\wedge$

(٤) $(T_a f^\wedge)(\xi) = (E_a f)^\wedge(\xi)$

(٥) $(E_a f)^\wedge = T_a f^\wedge$

(٦) اگر $g(x) = f(\lambda x)$ $(\lambda \neq 0)$ ، آنگاه

$$g^\wedge(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} f^\wedge(\frac{\xi}{\lambda}) .$$

برهان: رجوع کنید به(۱۷-۲-٤و۱۷-۲-۳در [١٤]).

///

تعـریف(فضای $\mathbf{S(R)}$):گوییم تابع $f:\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ سریعاً نزولی است. هرگاه به ازای هر $p \in \mathbf{N}$ داشته باشیم

$$\lim_{|x|\to\infty} \left| x^p f(x) \right| = 0 .$$