دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
آمار ریاضی، گرایش آمار ریاضی

عنوان

مقایسه‌ی رفتار برآوردگرهای حساسیت پارامتر مقیاس

استاد راهنما

دکتر محمد آرشی

پژوهشگر

کلثوم میرابی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: میرابی نام: کلثوم

عنوان: مقایسه‌ی رفتار برآوردگرهای حساسیت
پارامتر مقیاس

استاد راهنما: دکتر محمد آرشی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار ریاضی گرایش: آمار ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۲۸

واژگان کلیدی: برآوردگر حساسیت، MVD، SF، IPA ، آمیخته مقیاس توزیع‌های نرمال

چکیده

این پایان‌نامه، به معرفی برآوردگرهای مشتق می‌پردازد، که این برآوردگرها حساسیت سیستم را نسبت به پارامتر مقیاس بدست می‌آورند. با در نظر گرفتن سیستم‌های گوسی که بسیار مهم و کاربردی می باشند برآوردگرها را بدست آورده و مقایسه‌ی آنها را بر مبنای واریانس انجام می‌دهیم. برای نشان دادن کاربرد آن به عنوان نمونه کاربرد در زمینه شبکه‌های تصادفی و نیز مالی آورده شده است.

در نهایت محاسبه و مقایسه‌ی برآوردگرها برای مدل آمیخته مقیاسی انجام می‌دهیم.

تقدیم به مقدس ترین واژه ها در لغت نامه ی دلم

پدر و مادرم

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر آرشی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده و تمام دوستانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

کلثوم میرابی

۱۳۹۲

پیش‌گفتار

در این پایان نامه، به معرفی برآوردگرهای مشتق پرداخته شده است. که این برآوردگرها حساسیت سیستم را نسبت به یک پارامتر مشخص می‌کنند.
در فصل اول مفاهیم و تعاریف لازم و اولیه بیان شده است.
در فصل دوم به معرفی برآوردگرها و چگونگی بدست آوردن آن‌ها پرداخته‌ایم.
در فصل سوم برآوردگرهای معرفی شده در فصل دو را در مورد سیستم‌های گوسی به کار برده و آن‌ها را مقایسه می‌کنیم، سپس دو مثال کاربردی در زمینه‌ی شبکه‌های تصادفی و مالی آورده شده است.
در قسمت ضمیمه کدهای برنامه نویسی که در قسمت کاربردها استفاده شده است را آورده‌ایم.
و در فصل چهارم نتایج را برای مدل آمیخته مقیاسی نرمال تعمیم داده‌ایم.
در سرتاسر این پایان‌نامه مواردی که توسط ** مشخص شده است حاصل کار نویسنده بوده است.

فهرست علایم

به ازای هر	$\forall$
قریب به یقین	a.s
فاکتوریل دوگانه	$!!$
نرم	$\|\|x\|\|$
مشتق	$'$
سوپریمم	$\sup$
همگرایی در احتمال	$\rightarrow$
هم‌توزیعی (برای دو متغیر تصادفی) و معادل بودن(برای دو اندازه)	$\sim$
پیوسته مطلق	$\prec$
حاصل ضرب دکارتی	$\otimes$
اندازه لبگ	$\mathcal{L}$
σ جبر بورل	$\mathcal{B}$
تابع مشخصه روی مجموعه A	$۱(A)$
مشتق جزیی	∂
برآوردگر عملکرد	$L(X;.)$
امیدریاضی نسبت به اندازه احتمال	$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$
σ جبر فرآیندهای تصادفی	$\mathcal{F}_t$
توزیع یکنواخت در بازه $(۰, ۱)$	$\mathcal{U}(۰, ۱)$
توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$	$Exp(\lambda)$
توزیع هندسی	$Geo(\theta)$
توزیع گاما	$\gamma(.,.)$
توزیع دوجمله‌ای منفی	$Nb(.,.)$
توزیع ماکس ول دوگانه	$\mathcal{DM}(.,.)$
توزیع نرمال	$\mathcal{N}(.,.)$
تابع چگالی نرمال یک متغیره با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$	$\Phi_{\mu,\sigma}$
تابع چگالی ماکس ول دوگانه	$\mathbf{m}_{\mu,\sigma}$
برآوردگر مشتق تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک	D_θ^{IPA}
برآوردگر تابع امتیاز	D_θ^{SF}
برآوردگر اندازه مقدار	D_θ^{MVD}
برآوردگر ترکیبی دومرحله‌ای	D_σ^{sm}

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تاریخچه‌ی مختصری درباره‌ی موضوع مورد بررسی در این مجموعه بیان می‌کنیم، سپس تعاریف و قضایایی اصلی که در فصل‌های بعد استفاده می‌شوند و همچنین مفاهیم مربوط به آنالیز تابعی و نظریه اندازه و سایر قضایایی که در بدست آوردن برآوردگرهای مشتق لازم است را می‌آوریم. تعاریف ارایه شده در این بخش را می‌توان در رودین[۱](۱۹۸۷) و الن [۲] (۲۰۱۰) یافت.

۲.۱ تاریخچه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد. برآوردگر عملکرد سیستم را با $L(X;\sigma)$ نشان می‌دهیم، که تابعی از متغیر تصادفی X و یک یا چند پارامتر می‌باشد. میانگین برآوردگر عملکرد[۳] را نسبت به اندازه احتمال $\mathbb{P}$ که برابر با $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X;\sigma)]$ است را تابع عملکرد[۴] می‌نامند. تغییرات تابع عملکرد نسبت به پارامتر را حساسیت سیستم یا حساسیت تابع عملکرد می‌نامند. بنابراین می‌خواهیم حساسیت تابع عملکرد را نسبت به پارامتر مقیاس مشخص کنیم تا بدانیم چه مقدار زمان (پول)

[۱] Rudin
[۲] Allen
[۳] performance estimator
[۴] performance function

برای برآورد این پارامتر لازم است. پس در نهایت می‌خواهیم مشتق امید ریاضی (تابع عملکرد) را نسبت به پارامتر مقیاس مورد بررسی قرار دهیم.
سه روش برآورد مشتق وجود دارد: اولین روش تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک (IPA) [۵] است که یک واریانس کوچکی را نتیجه می‌دهد و توسط گلسرمن[۶] (۱۹۹۱)ارایه شد، روش تابع عددی یا نسبت درستنمایی (SF/LR) [۷]که در کاربرد بسیار آسان است توسط رابینستین و شاپیرو[۸] (۱۹۹۳) بیان شد و سومین روش که خیلی مورد مطالعه واقع نشده روش مشتق اندازه مقدار (MVD) [۹]می‌باشد که توسط پی افلاگ[۱۰] (۱۹۹۶) برای توابع پیوسته و کراندار معرفی شده است و هیدرگات و وزکیوز[۱۱] (۲۰۰۵) برای توابع $L^1(\mathbb{P})$ بیان کردند.

۳.۱ تعاریف و قضایا

در این قسمت تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول آتی آمده‌اند.

تعریف ۱.۳.۱. (قریب به یقین همگرا$(a.s)$[۱۲]**)** دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ تقریبا همه جا همگرا به X است اگر داشته باشیم

$$\mathbb{P}(lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1 \tag{1.1}$$

تعریف ۲.۳.۱. (همگرایی در احتمال) دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ در احتمال همگرا به X است، اگر داشته باشیم

$$\forall \epsilon > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([X_n - X] \geq 0) = 0 \tag{2.1}$$

[۵] Infinite Perturbation Analysis
[۶] Glasserman
[۷] Score Function
[۸] Rubinstein and Shapiro
[۹] Measure Valued Derivative
[۱۰] Pflug
[۱۱] Heidergott and Vazquez-Abad
[۱۲] almost surely

منظور از $X \to Y$ همگرایی در احتمال دو متغیر تصادفی X وY می‌باشد. هرگاه همگرایی دیگری مد نظر باشد نوع همگرایی قید می‌شود.

دو متغیر تصادفی X و Y را که هم‌توزیع هستند با رابطه ترتیبی $X \sim Y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۱. (فضای متریک) یک فضای متریک مجموعه‌ای است مانند M، به طوریکه برای هر دو نقطه$x, y \in M$ و تابع فاصله $d(.,.)$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $d(x,y) \geq ۰, \qquad d(x,y) = ۰ \iff x = y$

۲. $d(x,y) = d(y,x)$

۳. $\forall z \in M, d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

تعریف ۴.۳.۱. (فضای جداشدنی) یک فضای جداشدنی، شامل یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیر است.

تعریف ۵.۳.۱. (همگرای کوشی) دنباله $\{x_n\}$ همگرای کوشی است اگر داشته باشیم

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \forall m, n \geq N_۰ \in \mathbb{N}; ||x_m - x_n|| < \epsilon$$

تعریف ۶.۳.۱. (فضای کامل) یک فضای کامل به هر دنباله همگرای کوشی که همگرا درون فضای متریک، M، است اشاره دارد.

تعریف ۷.۳.۱. (سیگما جبر[۱۳]) یک σ -جبر $\mathcal{F}$ یک گردایه از مجموعه های $A \subset \Omega$ است، به طوریکه در سه شرط زیر صدق کند:

۱. $۰, \Omega \in \mathcal{F}$

۲. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

[۱۳] σ-Algebra

۳. $(A_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

توجه: σ درσ -جبر به مفهوم اجتماعات شمارا اشاره دارد. $\mathcal{F} = \sigma(X)$ را σ -جبر تولید شده توسط متغیر تصادفی X در نظر می گیریم.

تعریف ۸.۳.۱. (تابع ساده[۱۴]) تابع ساده تابعی به صورت زیر می باشد

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$$

که در آن 1_A تابع مشخصه مجموعه A می‌باشد.

تعریف ۹.۳.۱. (فرآیند تصادفی) یک فرآیند تصادفی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است که به یک پارامتر متغیر مانند زمان وابسته است.

تعریف ۱۰.۳.۱. (پیوسته مطلق واندازه های معادل) اندازه $\mathbb{P}$نسبت به $\mathbb{Q}$ پیوسته مطلق است، اگر به ازای هر $A \in \mathscr{B}(S)$ که $\mathbb{Q}(A) = 0$ آنگاه $\mathbb{P}(A) = 0$ وبا نماد $\mathbb{P} \prec \mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم. که $\mathscr{B}(S)$ سیگما جبر بورل روی مجموعه‌ی S می باشد.

این دو اندازه (احتمال) معادلند، $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$، اگر و فقط اگر $\mathbb{P} \prec \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q} \prec \mathbb{P}$.

یک خانواده از اندازه‌های احتمال $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta\}, \theta \in \Theta$ روی $(S, \mathscr{B}(S))$ با یک اندازه، μ، معادل است؛ اگر و تنها اگر $\forall \theta \in \Theta, \mathbb{P}_\theta \sim \mu$.

تعریف ۱۱.۳.۱. (صافی[۱۵]) یک صافی یک دنباله از σ-جبرهای $\{\mathcal{F}_t\}$ برای یک فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ است اگر برای هر $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ باشد.

تعریف ۱۲.۳.۱. (فرآیند تصادفی سازگار[۱۶]) یک فرآیند تصادفی سازگار گفته می‌شود اگر X_t , $\mathcal{F}_t$ -اندازه پذیر باشد، به عبارت دیگر به ازای هر $0 \leq t \leq T$ داشته باشیم $X_t \in \mathcal{F}_t$.

[۱۴] simple function
[۱۵] Filtration
[۱۶] adapted

به طور کلی برای یک فرآیند تصادفی، $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s; \text{۰} \leq s \leq t)$ به عنوان σ- جبر انتخابی برای فرآیندهای تصادفی در نظر گرفته می‌شود.

لم ۱۳.۳.۱. **(*لم استاین*[۱۷])** *فرض کنید که X متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^{\text{۲}}$ باشد. آنگاه (با فرض وجود امیدها)*

$$\mathbb{E}(g(X)(X-\mu)) = \sigma^{\text{۲}}\mathbb{E}(g'(X)) \qquad (\text{۳.۱})$$

که در آن $g'(x)$ مشتق اول تابع g نسبت به x است.

تعریف ۱۴.۳.۱. **(حاصل‌ضرب دکارتی)** حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B را با $A \otimes B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A \otimes B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\} \qquad (\text{۴.۱})$$

تعریف ۱۵.۳.۱. **(فضای اندازه پذیر پولیش[۱۸])** یک فضای اندازه پذیر پولیش یک فضای متریک، جداشدنی و کامل است.

برای برآورد مشتق، فضایی که اندازه احتمال در آن قرار می گیرد اندازه پذیر پولیش است.

در زیر قضیه نمایش اسکورخود را ارایه می‌دهیم. نمایش اسکورخود در ارایه‌ی برآوردگر مشتق تحلیل آشفتگی بینهایت کوچک مفید است. قضیه‌ی نمایش اسکورخود تناظر بین فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و $([\text{۰},\text{۱}], \mathscr{B}([\text{۰},\text{۱}]), \mathcal{L})$ را ارایه می دهد، که $\mathcal{L}$ اندازه لبگ بوده و $\mathscr{B}$ مجموعه‌ی بورل روی بازه‌ی $[\text{۰},\text{۱}]$ است.

قضیه ۱۶.۳.۱. **(*نمایش اسکوروخود*[۱۹])** *برای هرمتغیر تصادفی اندازه پذیر $X(\omega)$ روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک متغیر تصادفی $Y(\omega)$ روی $([\text{۰},\text{۱}], \mathscr{B}([\text{۰},\text{۱}]), \mathcal{L})$ وجود دارد به طوریکه $X \sim Y$.*

[۱۷] Stein's lemma
[۱۸] Polish Measurable Space
[۱۹] Skorohod Representation

به طور مثال، می‌توان متغیر تصادفی Y را معکوس تابع توزیع در نظر گرفت

$$X(\omega) = F_x^{-1}(\omega) := sup\{x \in S : F(x) \leq u\}$$

که در آن $u \in \mathcal{U} \sim (0, 1)$ (متغیر تصادفی یکنواخت روی $[0, 1]$).

لم ۱۷.۳.۱. *با استفاده از نمایش اسکوروخود $X(\omega) = F_x^{-1}(\omega)$، تابع عملکرد می تواند به صورت زیر نمایش داده شود*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X;\theta)] &= \int L(X(\omega);\theta) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(dx) \\ &= \int_{[0,1]^n} L(X(\theta;u)) du_1 \cdots du_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

که در آن $[0, 1]^n := \bigotimes_{j=1}^{n} [0, 1]$ حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های $[0, 1]$ است.

برهان. طبق تعریف می‌توان نوشت

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(X(\theta);\theta)] = \int L(X(\omega(\theta);\theta);\theta) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(dx)$$

سپس با جایگذاری $X(\omega) = F^{-1}(\omega)$ داریم

$$\mathbb{P}(dx) = \mathbb{P}(F^{-1}(du)) = du$$

همچنین

$$L(X;\theta) = L(X(\theta);u)$$

که این (۵.۱) را نتیجه می‌دهد. □

قضیه ۱۸.۳.۱. **(*قضیه همگرایی تسلطی*[20])** *اگر $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد، بطوری که $X_n \xrightarrow{a.s} X$ همچنین داشته باشیم*

$$sup_n |X_n| < K \quad a.s \qquad (\mathbb{E}[K] < \infty)$$

[20] Dominated Convergence Theorem

آنگاه

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

تعریف ۱۹.۳.۱. (پیوسته لیپ شیتس[۲۱]) یک تابع از دستگاه متغیرهای تصادفی $L(X(\theta),\theta)$ روی $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ تقریبا همه جا پیوسته لیپ شیتس است، اگر یک متغیر تصادفی K با شرط $\mathbb{E}[K] < \infty$ وپارامترهای $\theta, \theta+\Delta\theta \in \Theta$ که Θ یک زیر مجموعه محدب در $\mathbb{R}^k$ است وجود داشته باشند، بطوریکه

$$\sup_{\theta,\theta+\Delta\theta\in\Theta} ||L(X;\theta+\Delta\theta) - L(X;\theta)|| \leq K\Delta\theta \tag{۶.۱}$$

قضیه ۲۰.۳.۱. (*رادون-نیکودیم*[۲۲]) *فرض کنید طبق تعریف ۱۰.۳.۱ برای دو اندازه احتمال* $\mathbb{P}(.)$ *و* $\mathbb{Q}$ *داشته باشیم* $\mathbb{P} \prec \mathbb{Q}$*، اگر یک تابع* $\mathbb{Q}$*-اندازه پذیر نامنفی (مشتق رادون-نیکودیم) وجود داشته باشد،* $f := \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ *یک تابع چگالی روی* $(S,\mathscr{B}(S))$ *است، بطوریکه به ازای هر* $A \in \mathscr{B}(S)$ *داشته باشیم:*

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\mathbb{Q}(dx) \tag{۷.۱}$$

عکس قضیه رادون-نیکودیم نیز برقرار است: اگر اندازه های $\mathbb{P},\mathbb{Q}$ همانند قضیه باشند آنگاه $\mathbb{P} \prec \mathbb{Q}$.

اگر $\mathbb{Q} = \mathscr{L}$ اندازه لبگ باشد، مشتق رادون-نیکودیم با تابع چگالی احتمال یکی است.

اگر $\mathbb{Q} = \iota$ اندازه شمارشی باشد، مشتق رادون-نیکودیم برابر با جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته است.

در زیر دو نتیجه مربوط به مشتق رادون-نیکودیم آمده که برای روش تابع عددی (SF) استفاده می‌شود.

[۲۱] Lipschitz Continuity
[۲۲] Radon-Nikodym

نتیجه ۲۱.۳.۱. *فرض کنید $g(.)$ تابع $\mathbb{Q}$-اندازه پذیر روی $(S, \mathscr{B}(S))$ باشد، به ازای هر $C \in \mathscr{B}(S)$ داریم*

$$\int_A g(x)\mathbb{P}(dx) = \int_A g(x)f(x)\mathbb{Q}(dx) \tag{۸.۱}$$

که $f(x)$ مشتق رادون-نیکودیم در قضیه ۲۰.۳.۱ می باشد.

برهان. ابتدا اثبات را برای توابع مشخصه، ساده، نامنفی آورده، سپس به کمک آن‌ها برای حالت کلی توابع $\mathbb{Q}$-اندازه پذیر $g(.)$ کامل می‌کنیم.

۱. توابع مشخصه:با استفاده از قضیه ۲۱.۳.۱ برای مجموعه $\mathbb{Q}$ اندازه پذیر A داریم

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \mathbb{P}(dx) = \int_A \mathbb{Q}(dx) = \int_A f(x)\mathbb{Q}(dx)$$

۲. توابع ساده:با فرض $g(x) := \sum_{j=1}^{n} 1(A_j)$ به طوری که $(A_j)_{j=1}^{n}$ مجموعه های دو بدو مجزا هستند و با استفاده از ۱ داریم

$$\int g(x)\mathbb{P}(dx) = \sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{n}\int 1(A_j)f(x)\mathbb{Q}(dx) = \int g(x)\mathbb{Q}(dx)$$

۳. توابع نامنفی: تابع نامنفی $g(x)$ را می توان به صورت یک دنباله‌ی صعودی از توابع ساده $g_j(x)$ نمایش داد. از قضیه همگرایی یکنوا و ۲ داریم

$$\begin{aligned}\int g(x)\mathbb{P}(dx) &= \int lim_{n\to\infty}g_n(x)\mathbb{P}(dx)\\ &= \int f(x)lim_{n\to\infty}g_n(x)\mathbb{Q}(dx)\\ &= \int f(x)g(x)\mathbb{Q}(dx)\end{aligned}$$

۴. توابع $\mathbb{Q}$-اندازه پذیر کلی: تابع $g(x)$ می تواند به دو قسمت مثبت و منفی خود تجزیه شود $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ که $g^+(x) := max(g(x), 0), g^-(x) := max(-g(x), 0)$ چون g^+, g^- توابع نامنفی هستند، می‌توان ۳ را برای بدست آوردن (۸.۱) به کار برد .

□

نتیجه ۲۲.۳.۱. *اگر* $\mu \prec \mathbb{P}, \mathbb{Q}$ *و* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ *آنگاه*

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(x) = \left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mu}\frac{d\mu}{d\mathbb{Q}}\right)(x) \tag{۹.۱}$$

برهان. برای یک تابع $\mathbb{P}$ -اندازه پذیر $g(.)$ با استفاده از نتیجه‌ی ۹.۱ برای هر $A \in \mathscr{B}(S)$ داریم

$$\int_A g(x)\mathbb{P}(dx) = \int_A g(x)\frac{d\mathbb{P}}{d\mu}\mu(dx) \tag{۱۰.۱}$$

همچنین داریم

$$\int_A g(x)\mathbb{P}(dx) = \int_A g(x)\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(dx) = \int_A g(x)\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mu}\mu(dx) \tag{۱۱.۱}$$

با مقایسه و مرتب سازی معادلات بالا، (۹.۱) نتیجه می شود. □

تعریف ۲۳.۳.۱. **(اندازه متناهی[۲۳]،اندازه معین[۲۴])** یک اندازه معین، یک مجموعه توابع حقیقی مقدار $\mu : A \to \mathbb{R}, A \in \mathscr{B}(S)$ است، بطوریکه دارای دو ویژگی زیر باشد:

۱. $\mu(\varnothing) = ۰$

۲. اگر $(A_i)_{i=۱}^{\infty}$ گردایه ای از مجموعه های دو بدو مجزا باشد، آنگاه $\mu(\cup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(A_i)$ (اجتماع شمارا).

یک اندازه متناهی یک اندازه با ویژگی $sup_{A\in\mathscr{B}}|\mu(A)| = K < \infty$ می باشد.

تعریف ۲۴.۳.۱. **(پیوستگی ضعیف اندازه، مشتق پذیری ضعیف اندازه)**

[۲۳] Finite Measure
[۲۴] Signed Measure

یک خانواده از اندازه های احتمال، $\mathscr{P} = \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$، روی $(S, \mathscr{B}(\mathbb{S}))$ پیوسته ضعیف است اگربه ازای هر $\mathbb{P}_\theta(.)$ توابع $\mathbb{P}_\theta$-اندازه پذیر $g \in L^1(S)$، (به عبارت دیگر $\infty > (\int_s |g(x)|\mathbb{P}(dx)$) و پارامترهای $\theta, \theta + \Delta\theta \in \Theta$ وجود داشته باشند به طوریکه وقتی $\Delta\theta \to 0$ داشته باشیم

$$\int_S g(x)\mathbb{P}(dx;\theta + \Delta\theta) \to \int_S g(x)\mathbb{P}(dx;\theta)$$

یک خانواده از اندازه های احتمال مشتق پذیر ضعیف است اگر به ازای هر $\mathbb{P}_\theta(.)$ توابع $\mathbb{P}_\theta$ -اندازه پذیر $g \in L^1(\mathbb{P})$ و $\theta, \theta + \Delta\theta \in \Theta$ وجود داشته باشند به طوریکه:

$$lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{1}{\Delta\theta}\Big[\int_S g(x)\mathbb{P}_{\theta+\Delta\theta}(dx) - \int_S g(x)\mathbb{P}_\theta(dx)\Big] \to \int_S g(x)\mathbb{P}'_\theta(dx)$$

که در آن $\mathbb{P}_\theta$ یک اندازه معین متناهی است.

تجزیه یک اندازه معین متناهی به صورت تفاضل دو اندازه احتمال یکتا نیست. هرچند همیشه وجود داشته که در زیر بوسیله قضیه تجزیه جردن-هان ارایه می‌شود.

قضیه ۲۵.۳.۱. (تجزیه جردن-هان[۲۵]) *یک اندازه معین ν در یک فضای پولیش S می تواند به صورت تفاضل دو اندازه $\nu = \nu^+ - \nu^-$ تجزیه شود که مجموعه S می تواند بوسیله یک اجتماع مجزا از دو مجموعه $S = S^+ \cup S^-$ نشان داده شود بطوریکه برای هر مجموعه ν اندازه پذیر $A \subset S^+$ ، $\mu^+(A) \geq 0$ و $\mu^-(A) = 0$. به طور مشابه برای یک مجموعه ν اندازه پذیر $B \subset S^-$ ، $\mu^-(B) \geq 0$ و $\mu^+(B) = 0$.*

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۲۵.۳.۱ یک اندازه معین متناهی $\theta \in \Theta; \nu_\theta$ می‌تواند به صورت

$$\nu_\theta := c_1(\theta)\dot{\mathbb{P}}_\theta - c_2(\theta)\ddot{\mathbb{P}}_\theta$$

نمایش داده شود ($\dot{\mathbb{P}}, \ddot{\mathbb{P}}$ اندازه احتمال می باشند)، زیرا $sup_{A\in\mathbb{B}(S^+)}\nu^+(A) = K^+$.

نمایش برای اندازه $\nu^-(.)$ نیز مشابه است.

---
[۲۵] Jordan-Hahn Decomposition