دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکدهٔ علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض

گرایش آنالیز

عنوان

تقریب نقاط ثابت نگاشت‌های ناانبساطی در فضاهای $CAT(0)$

استاد راهنما

دکتر علی آبکار

استاد مشاور

دکتر عزیزالله عزیزی

توسط

الهه نجفی

بهمن ۱۳۹۰

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب الهه نجفی دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش آنالیز مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان تقریب نقاط ثابت [illegible] CAT(0) را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو الهه نجفی

امضاء و تاریخ Ela Najafi

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی –مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۳۰

فرم تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه/رساله

بدین وسیله گواهی میشود جلسه دفاعیه از پایان نامه کارشناسی ارشد/ دکتری ...الهه نجفی...........

دانشجوی رشته .....ریاضی محض... گرایش ..آنالیز... تحت عنوان....تقریب نقاط ثابت نگاشت‌های انبساطی [illegible]

در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۸ در دانشگاه برگزار گردید و این پایان نامه با نمره......۱۹... و درجه عالی... مورد تایید هیئت داوران قرار گرفت.

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی دانشگاهی	دانشگاه یا مؤسسه	امضا
۱	استاد راهنما	دکتر [illegible]	دانشیار	امام خمینی	
۲	استاد مشاور	دکتر عزیزی	استادیار	امام خمینی	
۳	داور خارج	دکتر حاتم		امیرکبیر	
۴	داور داخل	دکتر رازانی	دانشیار	امام خمینی	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	وحید مجیدی	استادیار	امام خمینی	

معاونت آموزشی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تقدیم

خواستم برگ سبزی را به پیشوایم علی (ع) تقدیم کنم امّا به رهاورد خود نگریستم و آن را مناسب جایگاه حضرتش ندانستم.

تنها جرأت آن را یافتم که محبتش را در وجودم ترنم نمایم...

چکیده

فرض کنید X یک فضای $CAT(0)$ کامل و C زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از آن و $T : C \longrightarrow X$ یک نگاشت ناانبساطی با $Fix(T) \neq \emptyset$ باشد.

در این پایان‌نامه، به تقریب نقطهٔ ثابت نگاشت ناانبساطی T، با استفاده از دو روش تکرار در فضای $CAT(0)$ می‌پردازیم:

ابتدا ثابت می‌کنیم $\{x_n\}$، دنبالهٔ حاصل از روش بهبود یافتهٔ ایشیکاوا، به نقطهٔ ثابت نگاشت T، Δ−همگرا است.

سپس ثابت می‌کنیم که $\{x_n\}$، دنبالهٔ تعریف شده به روش هَلپرن، به نقطهٔ ثابت T به طور قوی همگراست.

سرانجام یک نقطهٔ ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌های ناانبساطی را نیز در فضای $CAT(0)$ تقریب می‌زنیم.

تشکر و قدردانی

درود و سپاس خدایی را که قدرت تفکر و اندیشیدن را در مغز بندگان ناچیزش آفرید تا راه روشنایی‌ها و تاریکی‌ها را در این دنیای مادی و فناپذیر، همچون قضایای ریاضی استدلال کنند و علم را پلی برای رسیدن به انسانیت قرار دهند و کسانی که این چنین اند پیروزند...

اکنون که با یاری خداوند متعال، کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، بدین وسیله از استاد بزرگوار، فرزانه و فرهیخته، استاد راهنمایم جناب آقای دکتر علی آبکار که تجارب ارزشمندشان را در اختیار اینجانب قرار داده‌اند و مرا در تکمیل این پایان‌نامه یاری کرده‌اند صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. همچنین، از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر عزیزالله عزیزی که از راهنمایی‌های ایشان بهره برده‌ام، تشکر می‌کنم. از خدای منّان سلامتی و پیشرفت و توفیق روز افزون را برایشان آرزومندم.

الهه نجفی

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

ضرب داخلی x, y	$\langle x, y\rangle$
فضای اقلیدسی n بعدی	$\mathbb{E}^n$
فضای مدل k	M_k^2
کرهٔ دو بعدی	$\mathbb{S}^2$
فضای هذلولوی دو بعدی	$\mathbb{H}^2$
قطر در فضای مدل k	D_k
تصویرگر متریک روی C	P_C
مثلث ژئودزیک	$\triangle$
مثلث همسنج	$\overline{\triangle}$
$\{x_{n_k}\}$ زیردنبالهٔ $\{x_n\}$	$\{x_{n_k}\} \prec \{x_n\}$
پاره‌خط ژئودزیک واصل x و y	$[x, y]$
نقطهٔ متعلق به پاره‌خط ژئودزیک x و y	$(1 - t)x \oplus ty$
فاصلهٔ نقطهٔ $x \in X$ تا مجموعهٔ $C \subseteq X$	$dist(x, C)$ یا $d_C(x)$
همگرایی قوی	$\to$
Δ–حد	$\Delta - \lim$
مجموعهٔ نقاط ثابت نگاشت T	$Fix(T)$
مرکز مجانبی دنبالهٔ $\{x_n\}$	$A(\{x_n\})$
شعاع مجانبی دنبالهٔ $\{x_n\}$	$r(\{x_n\})$
اجتماع مرکزهای مجانبی همهٔ زیردنباله‌های $\{x_n\}$	$W_w(\{x_n\})$
اشتراک کره‌های بسته شامل D	$cov(D)$
حد باناخ دنبالهٔ $a = \{a_n\}$	$\mu(a)$ یا $\mu_n(a_n)$
فضای همهٔ دنباله‌های حقیقی کران‌دار	ℓ^∞

پیشگفتار

فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. می‌دانیم که کار در این فضا با مشکلات زیادی روبرو است؛ مثلاً جمع، ضرب و تقسیم وجود ندارد، حتی مضرب اسکالری از یک عضو به فضا تعلق ندارد؛ در نتیجه پاره‌خط واصل دو نقطه بی‌معنی است. به این دلیل زیرمجموعهٔ محدب هم معنی ندارد.

این موضوع افراد را واداشته است تا متناظر با یک فضای متریک، فضایی را در نظر بگیرند که از جنبه‌های گوناگون شناخته شده‌تر باشد و روابط را بین آن و فضای (X,d) طوری تعریف کنند که بسیاری از اعمالی که در فضای شناخته شده برقرار است، در فضای (X,d) نیز برقرار باشد. به این ترتیب فضای متریک را به فضایی خاص تبدیل کرده و آن را فضای $CAT(0)$ نام نهادند. ما در فصل اول این پایان‌نامه به تشریح آن می‌پردازیم.

در واقع در تعریف این فضا موضوع مورد مطالعه، فضاهای متریکی هستند که در آن‌ها هر جفت از نقاط توسط یک خم به هم متصل می‌شوند و این خم ایزومتریک با بازه‌ای فشرده از خط حقیقی است و اضلاع هر مثلث در این فضا در یک نامساوی خاصی به نام $CAT(0)$ صدق می‌کند. این نامساوی مفهوم انحنای نامثبت را در هندسهٔ ریمانی در بر داشته و اجازه می‌دهد همان مفهوم را در دستگاه‌های وسیع‌تر از فضای متریک ژئودزیک به کار بریم.

در سال ۱۹۹۹ بریدسون[1] و هَفلیجر[2] در کتاب خود تحت عنوان "فضاهای متریک با انحنای نامثبت" این مطلب را مطرح و مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند [۴].

در نتیجه طبیعی است که با شدت گرفتن مطالعات روی فضاهای $CAT(0)$ مفاهیمی همچون انواع همگرایی، نگاشت‌های ناانبساطی، دنباله‌های تکراری و غیره مطرح گردند و به دنبال آن نظریه‌ها و مسائلی از جمله وجود نقطهٔ ثابت نگاشت‌ها به ویژه نگاشت‌های ناانبساطی، همگرایی دنباله‌ها، بررسی شرایط کافی برای این اهداف و غیره ظهور یابند و مورد ارزیابی قرار گیرند.

اولین بار در سال ۲۰۰۳، کرک[3] قضیهٔ نقطهٔ ثابت را در فضای $CAT(0)$ مورد بررسی قرار داد. در واقع او نشان داد هر نگاشت ناانبساطی تک مقداری تعریف شده روی یک زیرمجموعهٔ محدب، بسته و کران‌دار در فضای $CAT(0)$ کامل همواره دارای نقطهٔ ثابت است [۱۸] و [۱۹]. ما در بخش ۲.۲ به مطالعهٔ این مطلب می‌پردازیم.

---

[1] Bridson
[2] Haefliger
[3] Kirk

در سال ۲۰۰۵ شهزاد[۴] به اثبات همگرایی ضعیف دنباله‌ای تکراری به روش اصلاح شدهٔ ایشیکاوا در فضای باناخ به طور یکنواخت محدب پرداخت. ما در فصل سوم این قضیه را در فضای $CAT(0)$ با استفاده از مفهوم Δ–همگرایی اثبات می‌کنیم.
همچنین در فصل چهارم، مسئلهٔ همگرایی قوی دنباله‌ای تکراری به روش هَلپرن را در فضای $CAT(0)$ بیان و اثبات می‌کنیم. این مطلب توسط شیوجی[۵] و تاکاهاشی[۶] در سال ۱۹۹۷ در فضای باناخ به اثبات رسیده بود.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است :

در فصل اول، به مفاهیم مقدماتی فضای $CAT(0)$ می‌پردازیم. تعاریف، مفاهیم پیش‌نیاز و روابطی که در این فضا برقرار است را تحت لم‌هایی بیان می‌کنیم. برای توضیح بیشتر مطلب مثال‌هایی را نیز آورده‌ایم.
در فصل دوم، به بررسی نظریهٔ نقطهٔ ثابت در فضای $CAT(0)$ می‌پردازیم و مفهوم Δ–همگرایی را در این فضا توصیف می‌کنیم.
در فصل سوم، ابتدا فضای هذلولوی به طور یکنواخت محدب و سپس ارتباط آن با فضای $CAT(0)$ را بیان می‌کنیم. و در بخش‌های دو و سه به تقریب نقطهٔ ثابت یک نگاشت ناانبساطی با استفاده از دنبالهٔ تعریف شده به روش ایشیکاوا و بهبود یافتهٔ آن در فضای $CAT(0)$ می‌پردازیم.
در فصل چهارم، در بخش اول مفهوم حد باناخ را بیان کرده و به اثبات لم‌هایی کاربردی می‌پردازیم. در بخش بعدی ابتدا به تقریب نقطهٔ ثابت نگاشت ناانبساطی با استفاده از دنبالهٔ حاصل از روش هَلپرن می‌پردازیم و سپس در بخش پایانی نقطهٔ ثابت مشترک خانواده‌ای متناهی و سپس شمارش‌پذیر از نگاشت‌های ناانبساطی را تحت شرایطی خاص در این فضا تقریب می‌زنیم.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌های زیر تهیه و تنظیم شده است:

[1] W. Laowang, B. Panyanak, "**Approximating fixed points of nonexpansive non-self mappings in CAT(0) spaces**", Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2010, Art.

[۴] Shahzad
[۵] Shioji
[۶] Takahashi

ID 367274, 2010.
[2] S. Saejung, "**Halpern's iteration in CAT(0) spaces**", Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2010, Art. ID 471781, 2010.

فصل ۱

آشنایی با فضاهای $CAT(0)$

در این فصل تعاریف و مفاهیم اساسی مربوط به فضاهای $CAT(0)$ را به طور مختصر مرور خواهیم کرد. این فضاها در سال ۱۹۸۷ توسط گروموف [۱] معرفی شدند. قبل از ورود به بحث متذکر می‌شویم که عبارت CAT حرف اول نام‌خانوادگی سه ریاضی‌دان برجسته به اسامی کارتان [۲]، آلکساندروف [۳] و توپونوگوف [۴] می‌باشد.
لازم به ذکر است که خواننده بایستی با مفاهیم اولیه در آنالیز ریاضی و آنالیز تابعی همچون فضای متریک، ایزومتری در این فضا، فضای برداری نرم دار و غیره، و نیز مفهوم مسیر و چند مفهوم پایه‌ای دیگر در هندسه آشنایی داشته باشد.

---

[۱] Gromov
[۲] Cartan
[۳] Alexandrov
[۴] Toponogov

۱.۱ فضاهای ژئودزیک

در ریاضیات، ژئودزیک[۵] تعمیمی از نماد خط مستقیم برای فضای خم‌هاست. در صورت وجود متر برای این فضاها، کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه را ژئودزیک می‌نامند.
در اصل ژئودزیک، کوتاه‌ترین مسیر واصل بین دو نقطه در فضای خم‌ها با نوشتن معادله خم‌ها و مینیمم کردن آن بدست می‌آید.
برای مثال کوتاه‌ترین جادهٔ واصل بین دو نقطه روی سطح کرهٔ زمین که قسمتی از یک دایرهٔ بسیار بزرگ (عظیمه) است، ژئودزیک بین آن دو نقطه می‌باشد.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $x,y \in X$. نگاشت

$$C:\ [\circ,l] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$$

را یک مسیر ژئودزیک بین x و y گوییم هرگاه

$$C(\circ)=x, \quad C(l)=y,$$

و برای هر $t_1, t_2 \in\ [\circ,l]$

$$d(C(t_1),C(t_2)) = \ |t_1 - t_2|.$$

به ویژه، C یک ایزومتری است و $d(x,y)=l$.

۲.۱.۱ تعریف. فرض کنید C یک مسیر ژئودزیک بین x و y در فضای متریک (X,d) باشد. تصویر نگاشت C را یک پاره‌خط ژئودزیک[۶] بین x و y می‌نامیم و در صورت یکتا بودن آن را با $[x,y]$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که یکی از دلایل در نظر گرفتن مسیر ژئودزیک بین دو نقطهٔ x و y در مقایسه با خط مستقیم $(1-t)x+ty$ این است که از اساس در تعریف خط مستقیم، جمع اعضا و ضرب اسکالر لحاظ شده است. بدیهی است که در فضای متریک (X,d)، ترکیب خطی بین x و y لزوماً به X تعلق نخواهد داشت، و اصولاً در فضاهای متریک، جمع اعضا و ضرب اسکالر نامفهوم می‌باشد.

[۵] Geodesic
[۶] Geodesic segment

۳.۱.۱ تعریف. فضای متریک (X,d) را فضای ژئودزیک گوییم، هرگاه بین هر دو نقطه از X مسیری ژئودزیک موجود باشد. در صورت یکتا بودن این مسیر، X را فضای به طور یکتا ژئودزیک[7] می‌نامیم.

۴.۱.۱ مثال. فضای اقلیدسی n بعدی $\mathbb{E}^n$، یک فضای به طور یکتا ژئودزیک است.
برای هر $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

نرم نیز به صورت $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود.
متر القا شده توسط این نرم را متر معمولی گویند که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ به صورت

$$d(x,y) = \ ||x - y\ ||$$

است. پاره‌خط‌های ژئودزیک در $\mathbb{E}^n$ زیرمجموعه‌هایی به صورت

$$[x, y\ ] = \{ty + (1-t)x : \quad 0 \le t \le 1\}$$

هستند.

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنید (X,d) یک فضای ژئودزیک باشد و $Y \subseteq X$. در این‌صورت گوییم Y محدب[8] است هرگاه Y شامل هر پاره‌خط ژئودزیک واصل بین هر دو نقطهٔ خودش باشد.

۶.۱.۱ مثال. مجموعهٔ

$$\{x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad \langle x, x\rangle = 1\}$$

---
[7] Uniquely geodesic space
[8] Convex

را کرهٔ n بعدی می‌نامند و با $\mathbb{S}^n$ نشان می‌دهند که $\langle .,. \rangle$ همان ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۴.۱.۱ می‌باشد.
متریک زیر را در نظر می‌گیریم

$$d : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\cos d(A,B) = \langle A, B \rangle,$$

این متریک به ازای هر دو نقطهٔ $A, B \in \mathbb{S}^n$، زاویهٔ بین دو پاره‌خط، اولی از مبداء به A و دومی از مبداء به B را می‌دهد ($d(A,B) \in [0,\pi]$).
$(\mathbb{S}^n, d)$ یک فضای ژئودزیک است. برای این منظور نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$C : \ [0, \alpha\,] \longrightarrow \mathbb{S}^n$$
$$C(t) = \cos(t)A + \sin(t)u$$

که در آن $A \in \mathbb{S}^n$ و $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ چنان است که $\langle A, u \rangle = 0$، $\langle u, u \rangle = 1$ و $\alpha \in [0,\pi]$.
C یک مسیر ژئودزیک بین هر دو نقطه در $\mathbb{S}^n$ است و تصویر آن مشمول دایره‌ای است که از اشتراک $\mathbb{S}^n$ با زیرفضای تولید شده توسط A و u در $\mathbb{R}^{n+1}$ به دست می‌آید.
برای بررسی ژئودزیک بودن C، توجه کنید که به ازای هر $t_1, t_2 \in [0,1]$،

$$\begin{aligned}
d(C(t_1), C(t_2)) &= \cos^{-1}\langle C(t_1), C(t_2)\rangle \\
&= \cos^{-1}\langle \cos(t_1)A + \sin(t_1)u, \cos(t_2)A + \sin(t_2)u\rangle \\
&= \cos^{-1}(\cos(t_1)\cos(t_2)A^2 + \sin(t_1)\sin(t_2)u^2) \\
&= \cos^{-1}(\cos(t_1 - t_2)) \\
&= |t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

۷.۱.۱ تعریف. یک مثلث ژئودزیک[۹] $\triangle = \triangle(x_1, x_2, x_3)$ در فضای ژئودزیک (X,d) عبارت است از سه عضو $x_1, x_2, x_3 \in X$ به عنوان رئوس مثلث و سه پاره‌خط ژئودزیک بین x_i و x_j برای $i, j \in \{1, 2, 3\}$ به عنوان اضلاع مثلث.

۸.۱.۱ تعریف. مثلث $\overline{\triangle}$ در $\mathbb{R}^2$ یک مثلث همسنج[۱۰] برای مثلث ژئودزیک $\triangle$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i, j \in \{1, 2, 3\}$ داشته باشیم

$$d(x_i, x_j) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x_i}, \overline{x_j}),$$

که در آن $\overline{x_1}$، $\overline{x_2}$ و $\overline{x_3}$ رئوس مثلث همسنج $\overline{\triangle}$ در فضای $\mathbb{R}^2$ هستند؛

$$\overline{\triangle}(x_1, x_2, x_3) := \triangle(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}).$$

۹.۱.۱ لم. برای هر مثلث ژئودزیک $\triangle$، مثلث همسنج یکتای $\overline{\triangle}$ در $\mathbb{R}^2$ وجود دارد.

برهان. برای مشاهدهٔ اثبات به منبع [۴] مراجعه کنید. □

۱۰.۱.۱ تبصره. برای عدد حقیقی k فضای مدل[۱۱] M_k^2 به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:
(۱) فرض کنید $k = 0$ در این صورت $M_k^2 := \mathbb{R}^2$؛
(۲) فرض کنید $k > 0$ در این صورت $M_k^2 := \mathbb{S}^2$ کرهٔ دو بعدی است با متریک ضرب شده در $\frac{1}{\sqrt{k}}$؛
(۳) فرض کنید $k < 0$ در این صورت $M_k^2 := \mathbb{H}^2$ فضای هذلولوی است با تابع فاصلهٔ ضرب شده در عامل $\frac{1}{\sqrt{-k}}$.
پس برای $k \leq 0$ قطر در فضای مدل M_k^2 را $D_k := \infty$ و برای $k > 0$ قطر $D_k := \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ تعریف می‌شود. لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه به دلیل این‌که مطالعات برای $k = 0$ انجام می‌پذیرد تنها به

---
[۹] Geodesic triangle
[۱۰] Comparison triangle
[۱۱] Model space

فضای مدل $\mathbb{R}^2$ نیاز است از این رو دیگر به توصیف فضای سایر مدل‌ها نپرداخته‌ایم. خوانندهٔ علاقه‌مند برای آشنایی بیشتر می‌تواند به منبع [۴] مراجعه کند.
بریدسون و هَفلیجر در منبع [۴] ثابت کردند که اگر x_1 و x_2 و x_3 نقاطی در فضای متریک (X,d) باشند و

$$d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_1, x_3) < 2D_k$$

آن‌گاه سه نقطهٔ $\overline{x_1}$ و $\overline{x_2}$ و $\overline{x_3}$ متناظر با x_1 و x_2 و x_3، در M_k^2 به طور یکتا موجودند که به ازای هر $i,j \in \{1,2,3\}$،

$$d(x_i, x_j) = d_{M_k^2}(\overline{x_i}, \overline{x_j}).$$

۲.۱ فضاهای $CAT(0)$

حال بعد از مقدمات لازم بیان شده در بخش قبل، به بیان نامساوی $CAT(0)$[12] می‌پردازیم که رابطه‌ای است بین فضای متریک (X,d) و فضای شناخته شدهٔ $\mathbb{R}^2$.

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای ژئودزیک و $\triangle(x_1,x_2,x_3)$ یک مثلث ژئودزیک در X باشد. گوییم $\triangle$ در نامساوی $CAT(0)$ صدق می‌کند هرگاه برای هر $x,y \in \triangle$ و هر $\overline{x},\overline{y} \in \overline{\triangle}$ داشته باشیم

$$d(x,y) \le d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x},\overline{y}).$$

۲.۲.۱ تعریف. فضای ژئودزیک (X,d) را فضای $CAT(0)$ گوییم، هرگاه هر مثلث ژئودزیک در آن در نامساوی $CAT(0)$ صدق کند. به عبارت دیگر، فضای متریک (X,d) فضایی $CAT(0)$ است هرگاه به طور ژئودزیک محدب باشد و هر مثلث ژئودزیک در آن حداکثر به چاقی مثلث همسنج خود در $\mathbb{R}^2$ باشد.

[12] CAT(0) inequality

۳.۲.۱ مثال. **فضای اقلیدسی n بعدی $\mathbb{E}^n$ که در قبل معرفی شد، یک فضای $CAT(0)$ می‌باشد. بنابر مثال ۴.۱.۱، فضای $\mathbb{E}^n$ به طور یکتا ژئودزیک است. فرض کنیم $\triangle(x,y,z)$ مثلثی در $\mathbb{E}^n$ باشد در این صورت بنابر لم ۹.۱.۱، $\overline{\triangle} := \triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ در $\mathbb{R}^2$ موجود است. فرض کنیم $a,b \in \triangle$، در این صورت دو حالت وجود دارد:**
در حالت اول، a و b متعلق به یک ضلع $\triangle$ باشند (مثال: $a,b \in [x,y]$)؛ در حالت دوم، a و b هر کدام متعلق به دو ضلع مختلف باشند (مثال $a \in [x,y]$ و $b \in [x,z]$). در هر حالت با محاسبهٔ $d(a,b)$ و بنابر همسنج بودن $\overline{\triangle}$ برای $\triangle$، می‌توان نامعادلهٔ $CAT(0)$ را بدست آورد.

در ادامه برای بیان نمونه‌هایی دیگر از فضای $CAT(0)$ ابتدا تعاریف و لم‌هایی را بیان می‌کنیم که ما را در شناخت ماهیت این فضاها یاری می‌کند.
مثال زیر از یک فضای $CAT(0)$، تحت عنوان درخت متریک[۱۳] می‌باشد.
درخت‌های متریک در سال ۱۹۷۷ توسط جی. تیتز[۱۴] معرفی شدند. این نوع فضاها علاوه بر کاربرد در ریاضیات، در سایر علوم مانند زیست‌شناسی، داروشناسی و علوم کامپیوتر نیز کاربرد دارند.

۴.۲.۱ تعریف [۲۰]. فضای متریک (X,d) را یک درخت متریک نامیم، هرگاه
(۱) X یک فضای به طور یکتا ژئودزیک باشد؛
(۲) اگر x و y و z در X باشند که $[x,y] \cap [y,z] = \{y\}$ آن‌گاه

$$[x,y] \cup [y,z] = [x,z];$$

(۳) اگر $x,y,z \in X$ آن‌گاه $w \in X$ موجود است که

$$[x,y] \cap [x,z] = [x,w].$$

۵.۲.۱ مثال. اگر 0 و d به ترتیب بیانگر مبداء و متر اقلیدسی در $\mathbb{R}^2$ باشند، متر شعاعی را به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_r(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \exists\lambda \in \mathbb{R}: \ x = \lambda y, \\ d(x,0) + d(0,y) & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

فضای $\mathbb{R}^2$ با متر شعاعی بالا یک درخت متریک می‌باشد.

[۱۳] R-tree
[۱۴] J.Tits

۱.۲.۶ لم [۴]. فرض کنید X یک فضای به طور یکتا ژئودزیک باشد، در این صورت برای هر $x, y, z \in X$ داریم

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$$

اگر و تنها اگر

$$[x,z\,] \cup \,[z,y\,] = \,[x,y\,].$$

همچنین، اگر $z \in \,[x,y\,]$ آن‌گاه $[x,z\,] \subset \,[x,y\,]$.

برهان. ما در اینجا یک طرف لم را ثابت می‌کنیم، طرف دیگر به وضوح برقرار است.
فرض می‌کنیم $d(x,y) = l'$ و $d(x,z) = l$. پس طبق فرض $d(z,y) = l' - l$.
چون X فضای ژئودزیک است، بنابراین مسیری ژئودزیک بین x و z موجود است که آن را با C و مسیر ژئودزیک بین y و z موجود را با C' نشان می‌دهیم.
خم C'' را از x به y به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C'' : \,[0, l'\,] \longrightarrow X$$

برای $0 \leq t \leq l$، $C''(t) = C(t)$ و برای $l \leq t \leq l'$، $C''(t) = C'(t)$.
واضح است که $C''(0) = x$ و $C''(l') = y$. نیز برای $t_1, t_2 \in \,[0, l'\,]$ داریم
اگر $t_1, t_2 \in \,[0, l\,]$ یا $t_1, t_2 \in \,[l, l'\,]$ آن‌گاه

$$d(C''(t_1), C''(t_2)) = |t_1 - t_2|;$$

و اگر $t_1 \in \,[0, l\,]$ و $t_2 \in \,[l, l'\,]$ یا برعکس، پس

$$\begin{aligned} d(C''(t_1), C''(t_2)) &= d(C(t_1), C'(t_2)) \\ &= d(C(t_1), C(l)) + d(C'(l), C'(t_2)) \\ &= |t_1 - l| + |l - t_2| \\ &= |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

در نتیجه C'' مسیری ژئودزیک بین x و y می‌باشد که تصویر آن در X از اجتماع تصاویر مسیرهای ژئودزیک C و C' تشکیل شده است. بنابراین