بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

جابجاگرهای اساسی به صورت رابط ها

استاد راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

پژوهشگر:

مرضیه عطائی

اسفند ماه ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم مرضیه عطائی

تحت عنوان:

جابجاگرهای اساسی به صورت رابط ها

در تاریخ ۸۸/۱۲/۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی.......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه **دکتر علیرضا عبدالهی** با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد داور داخل گروه **دکتر علی اکبر محمدی** با مرتبه علمی استاد امضاء

۳- استاد داور خارج گروه **دکتر محمدجواد عطائی** با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

خدایا تو برای آنان که به تو توکل کنند از هر کس کاردان تری، بر نهان هایشان بینایی و به درون هایشان آگاه و بر مقدار بینش آنان دانا...

ایمان را بر کرده های نیک دلیل توان ساخت و از کردار نیک ایمان را توان شناخت. به ایمان علم آبادان است و آدمی به علم از مرگ ترسان است.

خدایا اگر در پرستش خود درمانم یا راه پرسیدن ندانم صلاح کارم را به من بنما و دلم را به آنچه رستگاری من در آن است متوجه فرما.

این مجموعه را مرهون زحمات استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر عبداللهی می دانم که در نهایت صبر و شکیبایی مرا راهنمایی نمودند. بر خود لازم می دانم که صادقانه از ایشان سپاسگزاری نمایم.

زحمات اساتید داور جناب آقای دکتر محمدی، داور داخلی و جناب آقای دکتر عطائی، داور خارجی را ارج نهاده و از ایشان تشکر می نمایم.

هم چنین از زحمات خانم ها غازی، گرامی، فرهمند و معارکه در تدوین این پایان نامه مرا یاری نموده اند سپاسگزارم.

تقدیم به

مادرم که عشق و علاقه ی او به تحصیل مرا به توفیق قدم نهادن در راه علم رهنمون

ساخت

و

تقدیم به همسرم که آرامش لحظه های زندگی را مدیون مهربانی و صبوریش هستم.

چکیده

چالز سیمز در سال ۱۹۸۷ این سؤال را مطرح کرد که: آیا برای یک گروه آزاد F، nامین جمله از سری مرکزی پایینی، $\gamma_n(F)$، منطبق بر بستار نرمال مجموعه ی تمام جابجاگرهای پایه ای از وزن n در F است. در این پایان نامه ابتدا جابجاگرهای پایه ای در یک گروه آزاد F را تعریف می کنیم سپس بررسی می کنیم که چه رابطه ای بین جابجاگرهای پایه ای از وزن کمتر از شش با سری مرکزی پایینی F وجود دارد. به بیان دیگر بررسی می کنیم که سؤال سیمز در حالتی که n کمتر از شش باشد دارای پاسخ مثبت است.

کلمات کلیدی: جابجاگر پایه ای، سری مرکزی پایینی، بستارنرمال، وزن یک جابجاگر

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

فرض کنید d, c, b, a و $a_1, \dots, a_k$ عناصری از یک گروه دلخواه G باشند. نماد b^a را برای $a^{-1}b\, a$ و $[a, b]$ را برای $a^{-1}b^{-1}a\, b$ می نویسیم. اگر A و B زیر مجموعه هایی از گروه G باشند، آن‌گاه A^G بستار نرمال A در G است و $[A, B]$ زیرگروهی از G است که توسط مجموعه‌ی تمام عناصر $[a, b]$ جایی که a عنصری از A و b عنصری از B باشد، تولید می‌شود.

$[a, b, c]$ را برای $[[a, b], c]$ می نویسیم. طبق نمادگذاری استاندارد $[d, c; b, a]$ مخففی برای $[[d, c], [b, a]]$ است و به طور کلی تر اگر $C \subseteq G$، $[C; a_1, a_2, \dots, a_k]$ مخففی برای $[C, [a_1, a_2, \dots, a_k]]$ است.

اگر F گروه آزاد[1] از رتبه‌ی $r > 1$ روی مجموعه‌ی $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ باشد، $\gamma_n(F)$ را برای n امین جمله از سری مرکزی پایینی F می نویسیم و توجه داریم که

$$\gamma_1(F) = F \quad , \quad \gamma_n(F) = [\gamma_{n-1}(F)\ ,\ F].$$

[1] رجوع کنید به [[۱۰]، صفحه‌ی ۶۴]

تعریف ۱.۰ یک جابجاگر c و وزن آن که با $wt(c)$ نشان می‌دهیم روی مجموعه‌ی $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ به صورت زیر تعریف می شود:

(الف) اگر $c_i = x_i$، $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$، آن‌گاه c_i جابجاگری از وزن ۱ است که به صورت $wt(c_i) = 1$ نشان می دهیم.

(ب) اگر c_i و c_j جابجاگر باشند، آن‌گاه $c_k = [c_i, c_j]$ یک جابجاگر است و $wt(c_k) = wt(c_i) + wt(c_j)$.

تعریف ۲.۰ جابجاگرهای ساده روی مجموعه‌ی $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(الف) جابجاگرهای ساده از وزن ۱ همان جابجاگرهای از وزن ۱ هستند.

(ب) اگر جابجاگرهای ساده از وزن $n - 1$ را تعریف شده در نظر بگیریم، آن‌گاه $c = [d, x]$ یک جابجاگر ساده از وزن n است هرگاه، d یک جابجاگر ساده از وزن $n - 1$ و $x \in X$ باشد.

حال مهم ترین مفهوم این پایان نامه یعنی جابجاگر پایه‌ای را تعریف می کنیم:

تعریف ۳.۰ جابجاگرهای پایه‌ای

مجموعه‌ی الفبایی مرتب $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ را در نظر بگیرید.

۱. جابجاگرهای پایه‌ای از وزن ۱ همان حروف مجموعه‌ی X با در نظر گرفتن ترتیبشان هستند.

۲. جابجاگرهای پایه‌ای از وزن کمتر از n را تعریف شده و مرتب شده در نظر بگیرید، جابجاگرهای پایه‌ای از وزن n تمام جابجاگرهای $[c_i, c_j]$ هستند که در شرایط زیر صدق

می کنند:

(الف) c_i و c_j جابجاگرهای پایه‌ای اند که $n = wt(c_i) + wt(c_j)$.

(ب) در ترتیبی که برای جابجاگرهای پایه‌ای از وزن کمتر از n در نظر گرفته شده، $c_i > c_j$ باشد.

(ج) اگر $c_i = [c_s, c_t]$، که c_s و c_t جابجاگرهای پایه‌ای اند، آن‌گاه طبق ترتیبی که برای جابجاگرهای پایه‌ای از وزن کمتر از n در نظر گرفته شده باید $c_t \leq c_j$ باشد.

۳. جابجاگرهای پایه‌ای از وزن n نیز مانند جابجاگرهای پایه‌ای از وزن کمتر از n در ترتیبی که برای جابجاگرهای پایه‌ای از وزن کمتر از $n + ۱$ در نظر گرفته شده، صدق می‌کنند، ولی جابجاگرهای پایه‌ای از وزن n می توانند به طور دلخواه مرتب شده باشند.

منظور از یک جابجاگر پایه‌ای ساده از وزن n، یک جابجاگر پایه‌ای از وزن n است که بنا بر تعریف گفته شده ساده نیز باشد.

مثال ۴.۰ (۱) فرض کنید X مجموعه‌ی الفبایی مرتب $\{x_۱, x_۲\}$ باشد. در این صورت با انتخاب یک ترتیب دلخواه، جابجاگرهای پایه‌ای از

وزن ۱	$x_۲ > x_۱$
وزن ۲	$[x_۲, x_۱]$
وزن ۳	$[x_۲, x_۱, x_۲] > [x_۲, x_۱, x_۱]$
وزن ۴	$[x_۲, x_۱, x_۲, x_۲] > [x_۲, x_۱, x_۱, x_۲] > [x_۲, x_۱, x_۱, x_۱]$

هستند. توجه کنید که به عنوان نمونه، جابجاگرهای پایه‌ای ذکر شده از وزن ۳

به علاوه‌ی $[x_1,x_1,x_2],[x_1,x_2,x_2],[x_1,x_2,x_1]$ و $[x_2,x_2,x_1]$ تمام جابجاگرهای از وزن ۳ روی X را تشکیل می دهند.

(۲) فرض کنید X مجموعه‌ی الفبایی مرتب $\{x_1,x_2,x_3\}$ باشد. در این صورت مجدداً با انتخاب یک ترتیب دلخواه، جابجاگرهای پایه‌ای از

وزن ۱ $\quad x_3 > x_2 > x_1$

وزن ۲ $\quad [x_3,x_2] > [x_3,x_1] > [x_2,x_1]$

وزن ۳
$$[x_3,x_2,x_3] > [x_3,x_2,x_2] > [x_3,x_1,x_3] > [x_3,x_1,x_2]$$
$$> [x_3,x_1,x_1] > [x_2,x_1,x_3] > [x_2,x_1,x_2] > [x_2,x_1,x_1]$$

وزن ۴
$$[x_3,x_2,x_3,x_3] > [x_3,x_2,x_3,x_2] > [x_3,x_2,x_2,x_2]$$
$$> [x_3,x_1,x_3,x_3] > [x_3,x_1,x_3,x_2] > [x_3,x_1,x_2,x_2] > [x_3,x_1,x_1,x_3]$$
$$> [x_3,x_1,x_1,x_2] > [x_3,x_1,x_1,x_1] > [x_2,x_1,x_3,x_3] > [x_2,x_1,x_2,x_3]$$
$$> [x_2,x_1,x_2,x_2] > [x_2,x_1,x_1,x_3] > [x_2,x_1,x_1,x_2] > [x_2,x_1,x_1,x_1]$$
$$> [x_3,x_2;x_3,x_1] > [x_3,x_2;x_2,x_1] > [x_3,x_1;x_2,x_1]$$

هستند. توجه کنید که به عنوان نمونه، علاوه بر جابجاگرهای پایه‌ای ذکر شده، جابجاگرهایی به شکل $[x_1,x_3,x_1],[x_1,x_3,x_2]$ و $[x_2,x_3,x_3]$ نیز جابجاگرهای از وزن ۳ هستند و هم چنین $[x_1,x_1,x_3,x_2]$ یک جابجاگر ساده از وزن ۴ و $[x_1,x_2;x_1,x_3]$ یک جابجاگر از وزن ۴ است.

فرض کنید $\ell = \{x_1,x_2,\ldots,x_r,c_{r+1},\ldots\}$ یک دنباله از جابجاگرهای پایه‌ای باشد که با مجموعه‌ی الفبایی مرتب $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$ آغاز شده باشد. در این صورت ℓ را

یک دنباله‌ی پایه‌ای گوییم. سرتاسر این پایان نامه $\Re_n$ را برای نمایش مجموعه‌ی تمام جابجاگرهای پایه‌ای از وزن n در ℓ و N_n را برای نمایش بستار نرمال مجموعه‌ی $\Re_n$ در F به کار می بریم.

در یک دنباله‌ی پایه‌ای اندیس ها را به گونه‌ای انتخاب می کنیم که $c_i < c_j$ اگر و تنها اگر $i < j$ باشد.

ما نماد $x \equiv y$ را برای مشخص کردن تساوی $xN_n = yN_n$، در گروه خارج قسمتی F/N_n (برای یک n مشخص) به کار می بریم. به طور مشابه گزاره‌ی بدیهی بودن یا جابجایی نیز باید در گروه F/N_n در نظر گرفته شوند. (مثلاً منظور از جابجایی c_i و c_j به پیمانه‌ی N_n این است که c_iN_n و c_jN_n در گروه F/N_n با هم جابجا می‌شوند.)

در ادامه به بیان لم پایه‌ای و لم گروز[۲] [۷] می پردازیم که در فصل های بعد به آن ها نیاز داریم.

قضیه ۵.۰ اگر H و K زیرگروه هایی از یک گروه دلخواه G باشند و $H =< X >$ و $K =< Y >$، آن‌گاه $[H, K] =< [X, Y] >^{HK}$.

اثبات. رجوع کنید به [[٦]، صفحه‌ی ۱۲۴].□

نکته ٦.۰ $\gamma_n(F)$ بستار نرمال مجموعه‌ی جابجاگرهای ساده از وزن n در F است.

اثبات. F را گروه آزاد روی مجموعه‌ی $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ در نظر می‌گیریم، پس $F =< X >$. در نتیجه $\gamma_1(F) = F =< X >=< X >^F$.

حال با توجه به قضیه‌ی ۵.۰ داریم:

---

[۲] Groves

$$\gamma_2(F) = [F,F] = [X,X]^F =< [x,y] \mid x,y \in X >^F$$

به همین ترتیب اگر به عنوان فرض استقرا در نظر بگیریم:

$\gamma_n(F) =< [y_1, y_2, \ldots, y_n] \mid y_i \in X >^F$، به دست می آوریم:

$$\gamma_{n+1}(F) = [\gamma_n(F), F] =< [[y_1, y_2, \ldots, y_n], y_{n+1}] \mid y_i \in X >^F$$

و در نتیجه حکم برقرار است. $\Box$

تذکر ۷.۰ با توجه به نکته‌ی قبل تمام جابجاگرهای از وزن n در $\gamma_n(F)$ قرار دارند.

اثبات. با استفاده از استقرا روی n داریم؛ تمام جابجاگرهای از وزن ۱، یعنی همان حروف X، در $\gamma_1(F) = F$ قرار دارند. حال فرض کنیم که برای اعداد کمتر از n نتیجه برقرار باشد، یعنی اگر c_i جابجاگری باشد که $wt(c_i) = i < n$، آن‌گاه $c_i \in \gamma_i(F)$ باشد. پس اگر داشته باشیم $c_n = [c_i, c_j]$، که c_i و c_j جابجاگرند و $wt(c_i) = i, wt(c_j) = j$ و $i + j = n$، در این صورت با استفاده از فرض استقرا داریم که:

$$c_n = [c_i, c_j] \in [\gamma_i(F), \gamma_j(F)] \leq \gamma_{i+j}(F) = \gamma_n(F). \Box$$

لم ۸.۰ (لم پایه‌ای) F را گروه آزاد روی مجموعه‌ی الفبایی مرتب $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ با فرض $r > 1$ در نظر بگیرید. فرض کنید $n > 1$ و $\gamma_{n-1}(F) = N_{n-1}$ باشد. اگر برای هر جابجاگر پایه‌ای c از وزن $n - 1$ و هر $x \in X$ داشته باشیم $[c, x] \in N_n$، آن‌گاه $\gamma_n(F) = N_n$.

اثبات. با توجه به این که هر جابجاگر پایه‌ای از وزن n یک جابجاگر از وزن n نیز هست و طبق نکته‌ی قبل، واضح است که N_n همواره زیرگروهی از γ_n است. بنا براین کافی است نشان دهیم که $\gamma_n \subseteq N_n$. چون که طبق فرض $\gamma_{n-1}(F) = N_{n-1}$، داریم که:

$$\gamma_n(F) = [\gamma_{n-1}(F), F] = [N_{n-1}, F] = [(\Re_{n-1})^F, F] = [\Re_{n-1}, F]^F = [\Re_{n-1}, X]^F$$

که در N_n قرار دارد، زیرا $\forall c \in \Re_{n-1}\ ,\ \forall x \in X\ :\ [c,x] \in N_n$.□

لم ۹.۰ (لم گروز) فرض کنید C, B, A عناصری از گروه دلخواه G باشند.

(i) $[C,B,A] = [C,B]^{-1}[C,A]^{-1}[B,A,C]^{-1}([C,B][C,A][C,A,B])^{[B,A]}$.

(ii) اگر $[B,A,C], [C,A,B], [C,A;B,A]$ و $[C,B;C,A]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه

$[C,B,A] = [C,B;B,A]$.

(iii) اگر $[B,A,C], [C,B,B], [C,A,A], [C,A,B]$ و $[C,A,C]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه $[C,B,A], [C,B;B,A]$ در G بدیهی اند .

(iv.a) اگر $[C,B], [C,A,A]$ و $[C,A,B]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه $[B,A,C]$ نیز بدیهی است.

(iv.b) اگر $[C,B], [C,A,A]$ و $[B,A,C]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه $[C,A,B]$ نیز بدیهی است.

(iv.c) اگر $[C,B], [C,A;B,A]$ و $[B,A,C]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه $[C,A,B]$ نیز بدیهی است.

(iv.d) اگر $[C,A], [C,B;B,A]$ و $[C,B,A]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه $[B,A,C]$ نیز بدیهی است.

(v) اگر $[C,A;B,A], [C,B;B,A]$ و $[C,B;C,A]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه هر وقت که دو تا از $[C,B,A], [B,A,C]$ و $[C,A,B]$ در G بدیهی باشند، سومی نیز بدیهی است.

(vi) اگر $[C,A,C], [C,B,C], [C,A;B,A]$ و $[C,B;B,A]$ در G بدیهی باشند، آن‌گاه

$.[C,B,A]=[B,A,C]^{-۱}[C,B;C,A][C,A,B]^{[B,A]}$

اثبات.

(i) با توجه به این که $BA = AB[B,A]$ و $[x,yz] = [x,z][x,y]^z$؛ داریم که

$$[C,A][C,B]^A=[C,BA]=[C,AB[B,A]=[C,[B,A]][C,AB]^{[B,A]}$$

$$=[C,[B,A]][C,B]^{[B,A]}[C,A]^{B[B,A]}$$

بنابر این:

$$[C,A][C,B]^A=[C,[B,A]][C,B]^{[B,A]}[C,A]^{B[B,A]}$$

$$\Longrightarrow [C,A][C,B]^A=C^{-۱}[B,A]^{-۱}C[B,A][B,A]^{-۱}[C,B][B,A][B,A]^{-۱}$$
$$B^{-۱}[C,A]B[B,A]$$

$$\Longrightarrow [C,B]^A=[C,A]^{-۱}C^{-۱}[B,A]^{-۱}C[C,B]B^{-۱}[C,A]B[B,A]$$

$$\Longrightarrow [C,B]^{-۱}[C,B]^A=[C,B]^{-۱}[C,A]^{-۱}C^{-۱}[B,A]^{-۱}C[C,B]B^{-۱}[C,A]B[B,A]$$

$$\Longrightarrow [C,B,A]=[C,B]^{-۱}[C,A]^{-۱}(C^{-۱}[B,A]^{-۱}C[B,A])$$
$$[B,A]^{-۱}[C,B]B^{-۱}[C,A]B[B,A]$$

$$\Longrightarrow [C,B,A]=[C,B]^{-۱}[C,A]^{-۱}[B,A,C]^{-۱}$$
$$([C,B][C,A][C,A]^{-۱}B^{-۱}[C,A]B)^{[B,A]}$$

$$\Longrightarrow [C,B,A]=[C,B]^{-۱}[C,A]^{-۱}[B,A,C]^{-۱}([C,B][C,A][C,A,B])^{[B,A]}.$$

(ii) با قرار دادن $[B,A,C]=۱$ و $[C,A,B]=۱$ در تساوی (i) داریم:

$$[C,B,A]=[C,B]^{-۱}[C,A]^{-۱}([C,B][C,A])^{[B,A]}$$

و چون که $[C,B;C,A]=۱$ و $[C,A;B,A]=۱$ به دست می آوریم:

$$[C,B,A]=[C,B]^{-1}[C,A]^{-1}[C,A][C,B]^{[B,A]}$$

$$=[C,B]^{-1}[C,B]^{[B,A]}=[C,B;B,A]$$

(iii) ابتدا توجه کنید که چون $[C,A,B]=1$, $[C,A,A]=1$ لذا $[C,A;B,A]$ نیز بدیهی است وهم چنین چون $[C,A,B]=1$, $[C,A,C]=1$، لذا $[C,B;C,A]=1$، بنابر این طبق قسمت (ii) داریم:

$$[C,B,A]=[C,B;B,A]=[C,B;(B^{-1}A^{-1}B)A]$$

$$\Longrightarrow [C,B,A]=[C,B,A][C,B,B^{-1}A^{-1}B]^{A}$$

$$\Longrightarrow 1=[C,B,B^{-1}A^{-1}B]^{A}$$

$$\Longrightarrow 1=[C,B,B^{-1}A^{-1}B]$$

حال از آن جا که $[C,B,B]=1$ پس $[C,B]$ با B و با B^{-1} جابجا می شود، لذا $[C,B,A^{-1}]=1$ و بنا بر این $[C,B;B,A]=1$ و $[C,B,A]=1$.

$(iv.a)$ چون که $[C,B]=1$ لذا $[C,B,A]=1$. طبق قسمت اول لم گروز داریم:

$$1=[C,A]^{-1}[B,A,C]^{-1}([C,A][C,A,B])^{[B,A]}$$

حال از آن جا که $[C,A,B]=1$ و $[C,A,A]=1$ به دست می آوریم:

$$1=[C,A]^{-1}[B,A,C]^{-1}[C,A]^{[B,A]}=[C,A]^{-1}[B,A,C]^{-1}[C,A]$$

$$\Longrightarrow 1=([B,A,C]^{-1})^{[C,A]}$$

$$\Longrightarrow 1=[B,A,C].$$

$(iv.b)$ چون که $[C,B]=1$ و $[B,A,C]=1$، طبق قسمت (i) داریم:

$$1=[C,B,A]=[C,A]^{-1}([C,A][C,A,B])^{[B,A]}$$

حال از آن جا که $([C,A][C,A,B])^{[B,A]} = [C,A]^{B[B,A]} = [C,A]^{A^{-١}BA}$، به دست می‌آوریم:

$$١ = [C,A]^{-١}[C,A]^{A^{-١}BA} = [C,A]^{-١}A^{-١}B^{-١}A[C,A]A^{-١}BA$$

و چون که $[C,A]$ با A جابجا می شود، داریم:

$$١ = A^{-١}[C,A]^{-١}B^{-١}[C,A]BA = [C,A,B]^{A}$$

$$\Longrightarrow ١ = [C,A,B].$$

$(iv.c)$ مشابه حالت قبل با استفاده از قسمت (i) داریم:

$$١ = [C,A]^{-١}([C,A][C,A,B])^{[B,A]}.$$

حال از آن جا که $[C,A;B,A] = ١$، می بینیم که $[C,A]$ با $[B,A]$ جابجا می شود. پس به دست می آوریم:

$$١ = [C,A]^{-١}[C,A][C,A,B]^{[B,A]}$$

$$\Longrightarrow ١ = [C,A,B]^{[B,A]}$$

$$\Longrightarrow ١ = [C,A,B].$$

$(iv.d)$ چون که $[C,A] = ١$ و $[C,B,A] = ١$، تساوی قسمت (i) به صورت

$$١ = [C,B]^{-١}[B,A,C]^{-١}[C,B]^{[B,A]}$$

ساده می شود و چون که $[C,B;B,A]$ نیز بدیهی فرض شده، داریم:

$$١ = [C,B]^{-١}[B,A,C]^{-١}[C,B] = ([B,A,C]^{-١})^{[C,B]}$$

$$\Longrightarrow ١ = [B,A,C].$$

(v) با توجه به این که $[C,A;B,A] = ١$ و $[C,B;B,A] = ١$، با استفاده از قسمت (i)

داریم: $[C,B,A]=[C,B]^{-1}[C,A]^{-1}[B,A,C]^{-1}[C,B][C,A][C,A,B]^{[B,A]}$

اگر $[B,A,C]$ و $[C,A,B]$ بدیهی باشند، آن‌گاه $[C,B,A]=[C,B;C,A]=1$.

اگر $[C,B,A]$ و $[B,A,C]$ بدیهی باشند، آن‌گاه $[C,B;C,A][C,A,B]^{[B,A]}=1$ و در نتیجه $[C,A,B]=1$.

اگر $[C,B,A]$ و $[C,A,B]$ بدیهی باشند، آن‌گاه

$$[B,A,C]=[C,B][C,A][C,B]^{-1}[C,A]^{-1}=[C,B;C,A]^{([C,B][C,A])^{-1}}=1$$

(vi) چون که $[C,B]$ با $[B,A]$ و با C جابجا می شود، در نتیجه با $[B,A,C]$ جابجا می‌شود و چون که $[C,A]$ با $[B,A]$ و با C جابجا می شود، در نتیجه با $[B,A,C]$ جابجا می شود، لذا طبق (i) داریم:

$$\begin{aligned}
[C,B,A]&=[C,B]^{-1}[C,A]^{-1}[B,A,C]^{-1}[C,B][C,A][C,A,B]^{[B,A]}\\
&=[C,B]^{-1}[B,A,C]^{-1}[C,A]^{-1}[C,B][C,A][C,A,B]^{[B,A]}\\
&=[B,A,C]^{-1}[C,B]^{-1}[C,A]^{-1}[C,B][C,A][C,A,B]^{[B,A]}\\
&=[B,A,C]^{-1}[C,B;C,A][C,A,B]^{[B,A]}.\square
\end{aligned}$$

تعریف ۱۰.۰ برای یک گروه دلخواه G و عناصر x و y و z در G، $W(x,y,z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$W(x,y,z)=[z,y]^{-1}[z,x]^{-1}[y,x]^{-1}[z,y][z,x][y,x]$$

$W(x,y,z)$ را به شکل های گوناگونی می توان نوشت، اما ما به دنبال شکلی هستیم که یک مرجع مختصر برای مراجعات بعدی به دست آوریم.

قضیه ۱۱.۰ (قضیه W) اگر G یک گروه دلخواه باشد و x و y و z عناصری از G باشند، آن‌گاه:

$$[z,y,x] = ([y,x,z]^{-1})^{[z,x][z,y]} W(x,y,z)[z,x,y]^{[y,x]}$$

$$W(x,y,z) = [z,y;z,x][z,y;y,x]^{[z,x]}[z,x;y,x]$$

$$W(x,y,z) = [z,x;y,x]^{[z,y]}[z,y;y,x][z,y;z,x]^{[y,x]}$$

اثبات. این روابط با جایگذاری و حذف کردن در گروه آزاد روی $\{x,y,z\}$ به دست می‌آیند.$\square$