و می خوانیمش
که از تاریکی های پندار برونمان آورد
به روشنایی فهم بزرگیمان بخشد
درهای مهرباني اش را برویمان برگشاید
گنجینه های دانشش را فرا رویمان بگستراند
و هوالحق .

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه
برای‌دریافت درجه کارشناسی‌ارشددررشته‌ریاضی‌کاربردی
(آنالیز عددی)

حل عددی معادلات غیرخطی وابسته به زمان شرودینگر

نگارش :
آمنه طالعی

استاد راهنما:
دکتر مهدی دهقان

استاد مشاور:
دکتر مصطفی شمسی

آبان ۱۳۸۶

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)

معاونت پژوهشی

فرم اطلاعات پایان نامه

کارشناسی ارشد و دکترا

تاریخ:

پیوست:

نام و نام خانوادگی : آمنه طالعی — دانشجوی آزا د ☒ — بورسیه ☐ — معادل ☐

شمارهٔ دانشجوئی: ۸٤۱۱۳۰۳٤ **دانشکده :** ریاضی و علوم کامپیوتر **رشتهٔ تحصیلی :** ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر مهدی دهقان

عنوان پایان نامه به فارسی: حل عددی معادلات غیرخطی وابسته به زمان شرودینگر

عنوان پایان نامه به انگلیسی: **Numerical solution of nonlinear time-dependent Schrodinger equations**

نوع پروژه : کارشناسی ارشد : ☒ — دکتری ☐ — کاربردی ☐ — بنیادی ☒ — توسعه ای ☐ — نظری ☐

تاریخ شروع :۱۳۸۵/ ۱۱/۱٤ **تاریخ خاتمه** ۹ /۸ /۱۳۸٦ **تعداد واحد :** ٦

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی: **معادله شرودینگر غیرخطی، معادله گراس پیتاوسکی، روش جداکننده گام در زمان، روش تفاضلات متناهی، روش شبه طیفی مکان-زمان، طرح فشرده، روش طیفی فوریه و نقاط چبیشف گاوس لوباتو.**

واژه های کلیدی به انگلیسی:

nonlinear Schrodinger equation; Gross-Pitaevskii equation; split-step method; finite difference method; space-time pseudospectral method; compact scheme; Fourier spectral; Chebyshev Gauss Lobbato points.

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما :

دانشجو :

امضاء استاد راهنما : **تاریخ :** ۱۳۸٦/۱۱/۱

نسخهٔ ۱ : معاونت پژوهشی

نسخهٔ ۲: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

تقدیر و تشکر

سپاس ایزد یکتا را که عنایت و توجهی خاص به بشر نمود و با ارزانی داشتن نعمتهای فراوان که از برترین آنها نعمت تعقل و تفکر است او را از تاریکی جهل به روشنایی علم هدایت نمود.

بر خود لازم می دانم از اساتید بزرگواری که در انجام این پروژه اینجانب را مدد رسانده اند خاضعانه سپاسگزاری نمایم. از استاد گرامی جناب آقای دکتر مهدی دهقان که راهنماییها و تشویقهای ایشان نه تنها در انجام پروژه بلکه در طول دوره کارشناسی ارشد برای اینجانب بسیار مفید و ارزشمند بوده است کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر مصطفی شمسی که مشاوره این پروژه را به عهده داشتند به خاطر کمکهای ارزنده و بی دریغشان سپاسگزارم.

همچنین از اساتید محترم جناب آقایان دکتر علی حاتم و دکتر عباس سعادتمندی که داوری این پروژه را به عهده داشتند تشکر می کنم.

در پایان از خانواده و تمام دوستان عزیزم که در مدت تحصیل پشتیبان و مشوق اینجانب بوده اند از صمیم قلب سپاسگزارم.

چکیده

معادلات شرودینگر غیرخطی یک مثال از مدل جامع غیرخطی است که بسیاری سیستمهای غیرخطی فیزیکی را توصیف می کند. در این رساله ابتدا به معرفی این معادلات می پردازیم. روش جداکننده گام در زمان را معرفی می‌کنیم که برای اینگونه معادلات روش موثر و پایداری است. سپس به حل عددی معادلات شرودینگر غیرخطی با دو خانواده از روشهای تفاضلات متناهی و شبه‌طیفی می‌پردازیم. در روشهای تفاضلات متناهی، برخی کارهای انجام شده را بررسی کرده‌ایم سپس بااستفاده از طرحهای فشرده سعی در بهبود دقت روش تفاضلات متناهی همراه با عملگر جداکننده گام در زمان ($SSFD$) خواهیم کرد. مطالعات بسیاری برای حل معادلات شرودینگر غیرخطی با استفاده از روشهای شبه‌طیفی انجام شده است که به برخی از آنها اشاره می‌کنیم. اما به نظر می‌رسد روش شبه‌طیفی مکان–زمان برای حل معادلات شرودینگر غیرخطی بکار نرفته است که در ادامه به بررسی این روش با استفاده از نقاط چبیشف گاوس لوباتو خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی: معادله شرودینگر غیرخطی، معادله گراس پیتاوسکی، روش جداکننده گام در زمان، روش تفاضلات متناهی، روش شبه‌طیفی مکان–زمان، طرح فشرده، روش طیفی فوریه و نقاط چبیشف گاوس لوباتو.

فهرست مندرجات

پیشگفتار ۵

۱ آشنایی با معادلات شرودینگر غیرخطی ۱۰

۱.۱ مقدمه ۱۰

۲.۱ چگالی احتمال ۱۱

۳.۱ سولیتون ۱۱

۴.۱ معادلات شرودینگر غیرخطی ۱۱

۱.۴.۱ معادله شرودینگر غیرخطی (مکعبی) (NLS) ۱۲

۲.۴.۱ معادله شرودینگر غیرخطی جفت شده $(CNLS)$ ۱۳

۳.۴.۱ معادلات شرودینگر غیرخطی تعمیم یافته $(GNLS)$ ۱۶

۴.۴.۱ معادله گراس پیتاوسکی (GP) در تراکم بوز—انیشتین ۱۶

۵.۱ اثباتی بر روابط پایستگی معادله شرودینگر غیرخطی (مکعبی) ۱۸

۶.۱ معادله شرودینگر غیرخطی مرتبه بالا($HNLS$) ۲۰

۲ روش جداکننده گام در زمان ۲۱

۱.۲ مقدمه ۲۱

۲.۲ سیستم هامیلتونی ۲۲

۱.۲.۲ فرم هامیلتونی برای معادله شرودینگر غیرخطی ۲۲

۳.۲ انتگرالگیری سیمپلکتیک ۲۳

۴.۲ ایده $Yoshida$ برای عملگر جداکننده گام در زمان ۲۴

۱.۴.۲ قضیه $Baker-Campbell-Hausdroff$: ۲۵

۲.۴.۲ انتگرالگیری سیمپلکتیک از مرتبه بالا ۲۷

۵.۲ روش عملگر جداکننده گام در زمان برای معادلات شرودینگر غیرخطی . ۳۰

۳ روشهای تفاضلات متناهی برای حل معادلات شرودینگر غیرخطی ۳۱

۱.۳ مقدمه ۳۱

۲.۳ روشهای صریح ۳۳

۱.۲.۳ طرح سه گامه صریح از نوع دیفورت فرانکل ۳۳

۲.۲.۳ طرح صریح مرتبه چهار ۳۴

۳.۳ روشهای ضمنی ۳۵

۱.۳.۳ طرح کرانک نیکلسون ۳۶
۲.۳.۳ طرح ضمنی خطی شده ۴۰

۴.۳ روشهای نیمه ضمنی ۴۲
۱.۴.۳ طرح تفاضلات متناهی همراه با عملگر جداکننده گام در زمان $SSFD$ ۴۲
۲.۴.۳ طرح تناوبی فشرده همراه با عملگر جداکننده گام در زمان $SSADICOMPACT$ ۴۵

۵.۳ طرح تفاضلات متناهی فشرده همراه با عملگر جداکننده گام در زمان $SSFDCOMPACT$ ۵۰

۶.۳ نتایج عددی ۵۲

۴ روشهای طیفی ۶۸

۱.۴ مقدمه ۶۸

۲.۴ روش طیفی فوریه همراه باعملگر جداکننده گام در زمان $SSFS$ ۷۲
۱.۲.۴ روش طیفی فوریه ۷۲
۲.۲.۴ روش $SSFS$ برای حل معادله GP در یک بعد ۷۳
۳.۲.۴ روش $SSFS$ مرتبه ۲ برای معادله GP در دو بعد و سه بعد . ۷۶
۴.۲.۴ پایستگی ۷۷

۳.۴ روش شبه‌طیفی چبیشف در مکان ۷۸
۱.۳.۴ نقاط چبیشف گاوس لوباتو و پایه متناظر با این نقاط ۷۸

۲.۳.۴ انتگرال‌گیری عددی در گره‌های چبیشف گاوس لوباتو ۷۸
۳.۳.۴ روش شبه‌طیفی در مکان با استفاده ازنقاط چبیشف گاوس لوباتو ۷۹
۴.۳.۴ پیاده‌سازی روی معادله GP ۸۰
۵.۳.۴ روش شبه‌طیفی چبیشف با خوش حالت کننده ۸۱

۴.۴ روش شبه‌طیفی مکان—زمان ۸۳
۱.۴.۴ روش شبه طیفی مکان— زمان برای معادله GP ۸۴

۵.۴ نتایج عددی ۸۹

پیوست **۹۷**

پیشگفتار

برخی پدیده‌های فیزیکی را می‌توان با معادلات شرودینگر غیرخطی [1] توصیف و مدل کرد. معادلات شرودینگر غیرخطی یک مدل برای کلاس وسیعی از پدیده‌های فیزیکی از جمله انتشار پالسهای نوری، پالسهای لیزری، امواج آب وامواج پلاسما است. از آنجا که حل تحلیلی برای موارد خاصی از این معادلات را می‌توان یافت، لذا بسیاری مطالعات عددی روی این معادلات انجام شده که از آن جمله می‌توان به روشهای تفاضلات متناهی [2] [۶۳، ۵۰، ۴۲، ۳۶، ۳۵، ۳۴، ۲۴، ۲]، روشهای طیفی [3] [۹۱، ۶۲، ۵۸، ۵۵، ۲۹، ۱۷]، روشهای عناصرمتناهی [4] [۷۹، ۴۸، ۴۷، ۴۰، ۱۹]، روشهایی با اسپلاینها [5] [۶۷، ۶۱] و روشهای نیمه تحلیلی [۷۵، ۷۴] روی این معادلات اشاره کرد.

هنگام بررسی روشهای عددی برای حل معادلات شرودینگر غیرخطی با شرایط مرزی

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(X,t) = 0, \quad t \geq 0$$

باید دو کمیت جرم و انرژی پایسته بماند. حال این مساله مطرح است که چگونه یک روش موثر و پایدار برای حل معادلات شرودینگر غیرخطی با شرایط مرزی فوق طراحی کنیم، که پایستگی این دو کمیت را حفظ کند[۹۲، ۶۵، ۶۰، ۲۶].

همانطور که بیان شد روشهای عددی متعددی برای حل اینگونه معادلات مطرح شده که ما در اینجا به چند مورد از آن اشاره می‌کنیم.

$Taha$ و $Ablowitz$ هشت روش عددی برای معادله شرودینگر غیرخطی در یک بعد را مقایسه‌کردند[۷۶]. همچنین $Weideman$ و $Herbst$ روش شبه‌طیفی [6] با عملگر جداکننده گام در زمان [7] را پیشنهاد کردند[۸۷]. $Sanz-Serna$ و $Verwer$ در [۶۵] به طرحهای پایستار [8] و

---

[1] Nonlinear Schrodinger
[2] Finite difference
[3] Spectral
[4] Finite element
[5] Spline
[6] Pseudospectral
[7] Operator time splitting
[8] Conservative

غیرپایستار برای حل معادله شرودینگر غیرخطی پرداختند. $Gardner$ چند روش عددی که شامل روش عناصرمتناهی می‌باشد را برای معادله شرودینگر غیرخطی در یک بعد بررسی کرد[۳۱]. Wu به روش دیفورت فرانکل[۹] برای معادله شرودینگرخطی و غیرخطی پرداخت[۸۸]. حل معادله شرودینگر غیرخطی با اسپلاینهای متعامد توسط $Robinson$ مطرح شد[۶۱]. $Chang$ و همکاران هشت طرح متفاوت را برای معادله شرودینگر غیرخطی تعمیم‌یافته در یک بعد بررسی کردند[۱۶]. $Zhang$ و همکاران به بررسی معادله شرودینگر غیرخطی تعمیم‌یافته[۱۰] با تقریب اسپلاینها پرداختند[۹۲]. برای اطلاعات بیشتر روی روشهای حل عددی معادله شرودینگر غیرخطی می‌توان به مقاله مروری توسط $Faierweather$ و همکاران رجوع کرد[۲۷].

یکی از معادلات شرودینگر غیرخطی با شرایط مرزی تناوبی، معادله گراس پیتاوسکی است که اخیراً بررسیهای عددی بیشماری روی این معادله صورت گرفته‌است[۸۶، ۲۳، ۶]. برای معادله گراس پیتاوسکی، $Muruganandam$ و $Adhikari$ یک روش شبه‌طیفی با پایه‌های هرمیت[۱۱] را پیشنهاد کردند[۵۶]. $Perez - Garcia$ و Liu یک روش طیفی فوریه[۱۲] را بررسی کردند[۵۹]. $Cerimele$ و همکاران یک روش تفاضلات متناهی رابرای این معادله بیان کردند[۱۳]. Lai وهمکاران یک طرح از نوع دیفورت فرانکل را برای معادله گراس پیتاوسکی پیشنهاد کردند[۵۱]. $Dion$ و همکاران روش طیفی گلرکین با توابع پایه هرمیت را مطرح کردند[۲۵]. همچنین Bao و $Shen$ روش شبه‌طیفی هرمیت و لاگور[۱۳] با عملگر جداکننده در زمان از مرتبه چهار را برای این معادله مطرح کردند[۹].
در بین روشهای انجام شده به نظر می‌رسد روشهایی با عملگر جداکننده در زمان امتیازهایی مخصوصاً برای برخی مسائل پیچیده را دارد[۱۰ – ۳]. زیرا که روشهای سیمپلکتیک برای رفتار عددی بلند مدت بسیار خوب عمل کرده، همچنین ویژگی پایستگی را نیز حفظ

[۹] Dufort-Frankel
[۱۰] generalized nonlinear Schrodinger
[۱۱] Hermit
[۱۲] Fourier spectral
[۱۳] Laguerre

می‌کند[۷۳، ۷۲، ۵۲، ۳۸، ۱۸]. از اینرو در فصل دو به معرفی برخی از این روشها خواهیم پرداخت.

در این رساله با در نظر گرفتن روشهای تفاضلات متناهی و شبه‌طیفی ابتدا به بررسی برخی کارهای انجام شده پرداخته و سپس برخی ضعفها را بهبود خواهیم داد.
در فصل سه از این رساله به بررسی روش‌های تفاضلات متناهی در حل معادلات شرودینگر غیرخطی خواهیم پرداخت.
در روشهای تفاضلات متناهی بیشتر طرحهای صریح متداول برای مثال طرح اولر پیشرو برای معادله شرودینگر، ناپایدار نامشروط است حال این پرسش مطرح می‌شود که آیا طرحهای صریح پایدار برای این نوع معادلات وجود دارد یا خیر؟ زیرا که با مقایسه طرحهای صریح و ضمنی درمی‌یابیم که طرحهای صریح معمولاً دارای این ویژگی است که پیاده‌سازی ساده‌تر و زمان کمتر برای اجرا بخصوص در بعدهای بالاتر و همچنین معادلات غیرخطی را دارد.
طرحهای صریح با پایداری نامشروط، برای معادله شرودینگر خطی مورد بررسی قرارگرفته است[۲۱، ۲۰]. در سال ۱۹۹۶ این طرح برای معادله شرودینگر غیرخطی نیز مطرح شد، که Wu به بحث پایستگی و همچنین با استفاده از روشهای انرژی به بحث پایداری این روش پرداخت[۸۸] اما در سال ۱۹۹۹ طی مقاله‌ای که توسط $Ivanauskas$ و $Radziunas$ منتشر شد به بحث جامعی راجع به پایستگی و پایداری روش دیفورت فرانکل در پیاده‌سازی معادله شرودینگر غیرخطی پرداخته شد[۴۵] که این روش، روشی با پایداری و سازگاری مشروط می‌باشد. همچنین طرح صریح مرتبه چهار که توسط $Ismail$ اخیراً روی معادله شرودینگر غیرخطی جفت شده[۱۴] اعمال شده است نیز طرحی صریح اما پایدار مشروط می‌باشد[۴۱].
به موازات طرحهای صریح برای حل اینگونه معادلات (با توجه به اینکه طرحهای صریح متداول نیز معمولاً ناپایدار یا پایدارمشروط بودند)، روشهای ضمنی از جمله طرح کرانک نیکلسون مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفت. در [۹۳، ۳۳، ۳۲، ۱۵] به بحث راجع به پایستگی و پایداری و همگرایی این طرح پرداخته شد. این طرح پایدار نامشروط است اما مشکلی

[۱۴] Coupled nonlinear Schrodinger

که برای این طرح در پیاده‌سازی روی معادلات غیرخطی وجود دارد این است که، چون طرح ضمنی است منجر به حل سیستم غیرخطی می‌شود. اخیراً طرح ضمنی خطی شده که دقت آن مشابه با طرح ضمنی کرانک نیکلسون است توسط $Ismail$ و $Taha$ مطرح شده است. این طرح یک طرح سه گامه می‌باشد که در گام نخست نیاز داریم از روشهایی با دقت مشابه استفاده کنیم.

دسته سوم از روشهای تفاضلات متناهی روشهای نیمه ضمنی است. این روشها را می‌توان طوری طراحی کرد که تا حدودی سادگی و مزایای روشهای صریح و در عین حال پایدار نامشروط بودن از روشهای ضمنی را داشته باشد.
این گروه از روشها بخصوص برای معادلات غیرخطی می‌توان بسیار مفید باشد.

یکی از این طرحها، طرح کرانک نیکلسون با عملگر جداکننده در زمان می باشد که ابتدا توسط $Weideman$ و $Herbst$ در سال ۱۹۸۶ مطرح شد[۸۷]. در سال ۲۰۰۵ $H.Wang$ برای معادلات شرودینگر غیرخطی متعددی این طرح را مورد بررسی قرار داد[۸۵].

این طرح ، طرحی آسان برای استفاده و پایدار نامشروط می‌باشد و همچنین قوانین پایستگی را حفظ می‌کند امااین طرح دقتی از مرتبه دو در مکان دارد که ما با استفاده از طرحهای فشرده[۱۵] از مرتبه چهار سعی در بهبود دقت این طرح بدون هزینه بیشتر کرده‌ایم.
در فصل چهار به بررسی روشهای شبه‌طیفی خواهیم پرداخت.
در روشهای شبه‌طیفی نیز ابتدا به بررسی برخی روشهای مناسب در این زمینه پرداخته‌ایم، که روش شبه طیفی فوریه با عملگر جداکننده در زمان، یکی از روشهای مناسب برای حل معادله شرودینگر غیرخطی با شرایط مرزی تناوبی است. روشهای طیفی و بخصوص شبه‌طیفی بسیاری روی این معادله اعمال شده‌است اما به نظر می رسد تنها طرحی که در هر دوبعد، مکان و زمان از روش طیفی استفاده شود طرحی است که توسط $Shen$ و $Wang$ در سال ۲۰۰۶ مطرح شد[۶۹]. آنها در مقاله خود به این نکته اشاره داشتند که با وجود اینکه در معادلات با

[۱۵] compact scheme

مشتقات جزئی وابسته به زمان بعد زمان هموار می‌باشد اما در عمل روشهای طیفی مرتبه بالا در مکان معمولاً با یک طرح تفاضلات متناهی در زمان جفت شده‌است که، منجر به اشتباه در دقت می‌شود. با توجه به این موضوع سعی کرده‌ایم با استفاده از روش شبه‌طیفی در مکان و زمان با نقاط چبی‌شف گاوس لوباتو[۱۶] روی معادلات شرودینگر غیرخطی به یک دقت طیفی در مکان و زمان دست یابیم.

[۱۶] Chebyshev Gauss Lobbato

فصل ۱

آشنایی با معادلات شرودینگر غیرخطی

۱.۱ مقدمه

در مکانیک کلاسیک برای بررسی حرکت ذره ابتدا معادله حرکت آن ذره را یافته، بر اساس آن، در مورد چگونگی حرکت بحث می‌کنند. در حالت کلاسیک، بطورکلی این معادله با استفاده از لاگرانژین مربوط به حرکت ذره حاصل می‌گردد. در مکانیک کوانتومی، بر اساس نظریه‌ی دوبروی در مورد ذرات دو دیدگاه موجی و ذره‌ای در نظر گرفته می‌شود و اصل مکملی نور مانع از این می‌شود که این دو تصویر را به صورت همزمان بکاربریم. اما برای توصیف کامل حرکت، هر دو دیدگاه باید در نظر گرفته شوند. بر این اساس معادله‌ای که به حرکت این ذرات کوانتومی حاکم است، معادله شرودینگر نامیده می شود که ساده‌ترین حالت آن به فرم $i\psi_t = \psi_{xx}$ است.
معادله شرودینگر در سال ۱۹۲۶ توسط اروین شرودینگر فیزیکدان اتریشی به ثبت رسید. این معادله، اساسی‌ترین معادله غیرنسبیتی در مکانیک کوانتومی برای توصیف تحول حالت یک ذره است.
بااستفاده از حل معادله شرودینگر مشخصه‌های سیستم از قبیل ترازهای انرژی، اندازه حرکت خطی و اندازه حرکت زاویه‌ای سیستم مشخص می شود. در واقع از حل معادله شرودینگر، تابع موج منتسب به هر سیستم فیزیکی بدست می آید.
با استفاده از تابع موج می‌توان چگالی احتمال را محاسبه نموده و حرکت ذرات سیستم را

مورد بررسی قرارداد. برای هر سیستم، معادله شرودینگر مخصوصی وجود دارد که وابسته به هامیلتونی تعریف شده برای آن سیستم است.
قبل از معرفی معادلات شرودینگر غیرخطی لازم است به دو مفهوم چگالی احتمال و سولیتون [۱] که از مهمترین مفاهیم در اینگونه امواج می‌باشند، بپردازیم.

۲.۱ چگالی احتمال

در حالت کلی تابع موج $\psi(x,t)$ یک تابع مختلط مقدار است و به خودی خود هیچ تعبیر فیزیکی ندارد، اما مربع قدر مطلق آن کمیت بسیاربا اهمیتی است، که چگالی احتمال نام دارد.
چگالی احتمال در واقع احتمال قرار گرفتن ذره را در هر نقطه‌ای از فضا بدست می‌دهد. این تابع، تابعی حقیقی مقدار و وابسته به زمان می‌باشد که این وابستگی به زمان آن بیانگر این مطلب است که با گذشت زمان برای پیدا کردن ذره در جایی که در لحظه اولیه قرارداشته شانس کمتری وجود دارد.

۳.۱ سولیتون

سولیتونها به امواجی گفته می‌شوند که به صورت تنها با شکل، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی در محیط ادامه می‌دهند. سولیتونها حاصل تعادلی ظریف هستند که ما بین اثرات غیرخطی بودن و نیز پاشندگی [۲] در مورد برخی از پدیده‌های فیزیکی و در پاره‌ای از محیط‌ها پدید می آیند.

۴.۱ معادلات شرودینگر غیرخطی

می‌توان گفت که تاریخ علمی موجهای غیرخطی از سال ۱۸۳۴ آغاز شده[۲۸]، که معادلات شرودینگر غیرخطی یکی از مدلهای توصیف کننده از این نوع موجهااست.
معادلات شرودینگر غیرخطی یک مثال از مدل جامع غیرخطی است که بسیاری از سیسستمهای

---
[۱] soliton
[۲] $dispersion$

غیرخطی فیزیکی را توصیف می‌کند. این معادلات در هیدرودینامیک، اپتیک غیرخطی، اکوستیک غیرخطی، پالس حرارتی در جامدات، کریستالهای غیرهمساز و پدیده‌های ناپایدار غیرخطی متنوع دیگر کاربرد دارد.

دو نوع از معادلات شرودینگر غیرخطی در مطالعات عددی توجه محققین را به خود جلب کرده‌است [۸۷]

نوع اول، سولیتونها هستند که حل و مشتقات آن در $|x| = \infty$ صفر است.

نوع دوم، معادلاتی با تابع پتانسیل متناوب می‌باشد که از آن جمله می‌توان به معادله گراس‌پیتاوسکی [۳] اشاره کرد.

یکی از مهمترین ویژگیهایی که اینگونه معادلات دارند پایستگی [۴] آنها می‌باشد، که ما در این بخش به معرفی چند معادله شرودینگر غیرخطی همراه با قوانین پایستگی جرم و انرژی آنها می‌پردازیم.

۱.۴.۱ معادله شرودینگر غیرخطی (مکعبی) (NLS)

در خواست افزایش ارسال پیام یک میزان زیادی از تحقیقات در سیستمهای انتقال فیبرنوری را به خود مشغول داشته، که ساده‌ترین مدل برای انتشار پالس که شامل غیرخطی موثر باشد معادله شرودینگر غیرخطی است [۳۷].

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) + \alpha\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\psi(x,t) + \beta|\psi(x,t)|^۲\psi(x,t) = ۰, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq ۰$$

این معادله گرچه ساده‌ترین مدل از معادلات شرودینگر غیرخطی است اما می‌توان گفت یکی از پر کاربردترین این معادلات می‌باشد.

اخیراً این معادله برای دو بعد نیز مورد بررسی قرار گرفته‌است [۳۹].

روابط پایستگی برای معادله شرودینگر غیرخطی

۱ – پایستگی جرم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^۲ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,۰)|^۲ dx, \ t > ۰$$

---

[۳] Gross-Pitaevskii

[۴] conservation

۲– پایستگی انرژی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}|^{۲}-\frac{\beta}{۲}|\psi(x,t)|^{۴})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha|\frac{\partial\psi(x,۰)}{\partial x}|^{۲}-\frac{\beta}{۲}|\psi(x,۰)|^{۴})dx,\ t>۰$$

۲.۴.۱ معادله شرودینگر غیرخطی جفت شده ($CNLS$)

سیستم معادلات شرودینگر غیرخطی جفت شده در بسیاری از شاخه‌های فیزیک از جمله هیدرودینامیک و اپتیک غیرخطی کاربرد دارد. در اپتیک غیرخطی، معادله شرودینگر غیرخطی مکعبی برای توصیف انتشار امواج تک مد[5] در فیبر بکار می‌رود. اما این فیبرها همچنین به انتشار بیش از یک مد یعنی انتشار پلاریزاسیون[6] متعامد اجازه می‌دهند، که این انتشار با یک نوع چند مولفه‌ای توصیف شود.

هنگامیکه سیستم فیزیکی شامل یک جفت شدگی[7] باشد در واقع یک نوع چند مولفه‌ای از معادله شرودینگر غیرخطی مکعبی استفاده شده که این مدل نیاز به معادلات شرودینگر غیرخطی جفت شده دارد.

مدلی برای یک سری پدیده‌های فیزیکی از جمله برهم کنش بین پالسها در اپتیک غیرخطی و همچنین سیگنالهایی در اکوستیک غیرخطی استفاده شده به معادله جفت شدگی قوی مشهور است، به فرم زیر می‌باشد.

$$i\psi_{۱,t}+\beta\psi_{۱,xx}+[\alpha_۱|\psi_۱|^{۲}+(\alpha_۱+۲\alpha_۲)|\psi_۲|^{۲}]\psi_۱+\gamma\psi_۱+\zeta\psi_۲=۰$$

$$i\psi_{۲,t}+\beta\psi_{۲,xx}+[\alpha_۱|\psi_۲|^{۲}+(\alpha_۱+۲\alpha_۲)|\psi_۱|^{۲}]\psi_۲+\gamma\psi_۲+\zeta\psi_۱=۰$$

که β و $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، γ و ζ ثابتهای حقیقی می‌با شند که هرکدام اثر خاصی از پدیده‌ای را در مدل جامع توصیف می‌کنند[۷۰].

همانطور که قبلاً اشاره شد برای برهمکنش بین پالسها در اپتیک غیرخطی از معادله شرودینگر

[5] single mode
[6] polarized
[7] *coupled*

غیرخطی جفت شده استفاده می‌شود حال مختصری در این باره توضیح خواهیم داد.
انتشار پالس غیرخطی در فیبر نوری بیش از ۳۰ سال است که مورد بررسی قرار گرفته‌است.ایده استفاده از سولیتونهای نوری به عنوان بیتهای اطلاعاتی در سیستمهای ارتباطی با سرعت بالا ابتدا در سال ۱۹۷۳ مطرح شد. در سالهای بعد پیشرفت تکنولوژی فیبر در رشد ارسال سولیتونهای نوری سهیم بود بطوریکه با افزایش سرعت بیت و فاصله ارسال، تکنیکهای جدید از جمله انتقال چند تایی پخش طول موج[۸] مطرح و مورد استفاده قرارگرفته‌است.
این تکنیکها در تئوری مدل‌بندی از انتشار پالس و تلاقی سیستمهای ارتباط به طور اساسی به‌کار رفته‌است.
در یک فیبر ایده آل سولیتونهای نوری می‌تواند با سیستم شرودینگر غیرخطی تقریب زده شود که در اینصورت رفتار سولیتونها کاملاً معلوم می‌باشد. در واقع این پالسها با سرعتی اندک در امتداد دو محور پلاریزاسیون متعامد حرکت می‌کنند.
همچنین در انتشار پالسها با فرکانسهای متوسط یکسان درشکست مضاعف فیبر غیرخطی[۹] معادله شرودینگر غیرخطی جفت شده ضعیف حاکم است که به فرم زیر می باشد[۸۴]

$$i\left(\frac{\partial\psi_1(x,t)}{\partial t}+\delta\frac{\partial\psi_1(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_1(x,t)}{\partial x^2}+\left(|\psi_1(x,t)|^2+e|\psi_2(x,t)|^2\right)\psi_1=0,$$

$$i\left(\frac{\partial\psi_2(x,t)}{\partial t}+\delta\frac{\partial\psi_2(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_2(x,t)}{\partial x^2}+\left(|\psi_2(x,t)|^2+e|\psi_1(x,t)|^2\right)\psi_2=0$$

جاییکه ψ_1 و ψ_2 دامنه موج در دو پلاریزاسیون و همچنین δ عددی حقیقی می‌باشد.
در یک دسته بندی برای این گونه معادلات، برای فیبرهایی با شکست مضاعف، $e=\frac{2}{3}$ و همچنین برای سیستمی که مشهور به معادلات ماناکو[۱۰] می باشد، $e=1$ خواهد بود[۸۳].

[۸] *wavelenght division multiplexing*
[۹] *birefrigent nonlinear fiber*
[۱۰] *Manakov*

روابط پایستگی برای معادله شرودینگر غیرخطی جفت شده

الف‑ روابط پایستگی برای معادله جفت شدگی قوی:

۱‑ پایستگی جرم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}(|\psi_{1}|^{2}+|\psi_{2}|^{2})dx=0, t>0$$

البته زمانی که $\zeta=0$ باشد پایستگی جرم به فرم

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}(|\psi_{1}|^{2})dx=0, \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}(|\psi_{2}|^{2})dx=0, t>0$$

خواهد بود.

۲‑ پایستگی انرژی:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\beta}{2}[|\psi_{1,x}|^{2}+|\psi_{2,x}|^{2}]+\frac{\alpha_{1}}{2}[|\psi_{1}|^{4}+|\psi_{2}|^{4}]+(\alpha_{1}$$

$$+2\alpha_{2})[|\psi_{1}|^{2}|\psi_{2}|^{2}]+\gamma[|\psi_{1}|^{2}+|\psi_{2}|^{2}]+2\zeta R[\psi_{1}^{*}\psi_{2}]dx=0$$

ب‑ روابط پایستگی برای معادله جفت شدگی ضعیف :

۱‑ پایستگی جرم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}(|\psi_{1}|^{2})dx=0, \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}(|\psi_{2}|^{2})dx=0, t>0$$

۲‑ پایستگی انرژی:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[|\psi_{1,x}|^{2}+|\psi_{2,x}|^{2}]-e[|\psi_{1}|^{2}|\psi_{2}|^{2}]-\frac{1}{2}[|\psi_{1}|^{4}+|\psi_{2}|^{4}]dx=0, t>0$$

با مقایسه دو رابطه پایستگی جرم به علت نامیدن جفت شدگی قوی در مقابل جفت‌شدگی ضعیف می‌توان پی‌برد[۷۰].