وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی ژئودزی ها روی یک بیضی گون در فضاهای مینکوفسکی

استاد راهنما:

آقای دکتر علی پارسیان

حسین کلانتری

دانشجو:

1391

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی ژئودزی ها روی یک بیضی گون در فضاهای مینکوفسکی

استاد راهنما:

آقای دکتر علی [illegible]

دانشجو:

حسین کلانتری

1391

تقدیم به همسر مهربانم و پدر و مادرعزیزم

با تشکر از آقای دکتر پارسیان، که در این تحقیق کمک شایانی به من نمودند و همواره مرا راه نمایی کردند و با تشکر از اساتید ارجمندم آقای دکتر طیبی، آقای دکتر نظری، آقای دکتر ساده، آقای دکتر مژده و آقای دکتر اکبری

چکیده

هندسه ی ژئودزی ها را روی یک بیضی گون لورنتس توضیح می دهیم. فرمول صریح ژاکوبین را ارائه می دهیم، انحنا، متریک های به طور ژئودزیکی هم ارز، ثابت فرم مساحت روی ژئودزیک های فضاسان و زمان سان و ثابت 1- فرمی روی فضای ژئودزی های پوچ را ارائه می دهیم. یک قضیه نوع پانسله را برای ژئودزی های پوچ روی بیضی گون ثابت می کنیم: اگر یک چنین ژئودزیکی، پس از نوساناتی، به کمربند شبه ریمانی نزدیک شود، در این صورت، هر ژئودزیک پوچ دیگری روی بیضی گون هم همین طور خواهد بود.

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

فصل اول: تعریف ها و قضیه های ابتدایی 1

1.1. ضرب خارجی 1

1.2. متریک ریمانی 3

1.3. التصاق خطی و مشتق گیری همگرد 7

1.4. تعبیر هندسی مشتق گیری همگرد در طول یک خم...8

1.5. التصاق ریمانی و قضیه اساسی هندسه ریمانی..10

1.6. ژئودزیک، انحنای گاوسی و ژاکوبین..11

1.7. متریک های شبه ریمانی و مسأله فضا- زمان آینشتاین...16

فصل 2. ژاکوبین و رفتار عمومی ژئودزیک ها روی بیضی گون در فضای مینکوفسکی......21

.2.1 مقدمه...21

.2.2 ژاکوبین...28

3.3. رفتار ژئودزیک ها..

....
30..............

فصل 3. انحنای بیضی گون در فضای مینکوفسکی و بررسی نگاشت بیلیارد............42

3.1. فرم مساحت روی فضای ژئودزیک ها...................................
42...................................

3.2. قضیه ی بستار نوع پانسله...
....
46.

3.3. انحنای بیضی گون..
....
49..........

3.4. متریک های ریمانی به طور ژئودزیکی هم ارز...
50......................

3.5. بیضی ها به عنوان خم بیلیارد لورنتس انتگرال پذیر.....................................
52..........

منابع و مآخذ.......... 59

واژه نامه 61

پیش گفتار

همان گونه که می دانید، تقریبا در هر آن چه که در اطراف خود می بینیم، بهینه ترین مسیر یا ژئودزیک ها، خط راست نیستند: ترافیک، زمین، حرکت ربات ها،حرکت کشتی ها، حرکت سیارات، کهکشان ها، کیهان و... . بنابر این، می توان گفت که هندسه اقلیدسی دل بخواه ترین نوع هندسه است و هندسه های نا اقلیدسی به واقعیت نزدیک ترند. در حقیقت ما در این نوشته سعی داریم ابتدا مفهوم خمینه های نا اقلیدسی ای چون خمینه های ریمانی و شبه ریمانی و خمینه های مینکوفسکی را مورد مطالعه قرار دهیم و در نهایت به عنوان یک مثال و مطالعه موردی، نتایج را روی یک بیضی گون که شبیه ترین شکل به زمین است، بررسی کنیم.

فصل اول

تعریف ها و قضیه های ابتدایی[1]

1.1. ضرب خارجی

تعریف1.1.1. p- فرمی خارجی $Alt(t)\in\Omega^p E$ را یک تناوب[2] تانسور t از نوع $t\in\otimes_p^o E$ نامیده و به صورت زیر تعریف می نمائیم

$$Alt(t)(X_1,\ldots,X_p)=\sum_{d\in d_p}\operatorname{sgn}(d)\ t(X_{d_1},\ldots,X_{d_p})$$

---

[1] مباحث این فصل عموما از [1,2] برداشته شده اند.

[2] alternation

در اینجا d_p عبارت است از گروه جایگشت های $\{1,...,p\}$ و $d=(d_1,...,d_p)$ عضو این گروه می باشد.

قضیه 1.1.2. اگر $t \in \Omega^p E$ داریم $Alt(t)=p!t$.

اثبات. به منبع [1] مراجعه شود.

تعریف 1.1.3. (ضرب خارجی[3]) فرض کنیم $w \in \Omega^p E$ و $p \in \Omega^q E$ ضرب خارجی این دو فرم یک (p+q)- فرمی است که آن را به صورت زیر تعریف می نمائیم

$$w \wedge p \in \Omega^{p+q}(E) \qquad w \wedge p = \frac{1}{p!q!} Alt(w \otimes p)$$

قضیه 1.1.4. ضرب خارجی دارای خواص زیر است:

الف) انجمنی : اگر g,b,a فرم هایی به ترتیب از درجه های p، q و l باشند آنگاه

$$a \wedge (b \wedge g) = (a \wedge b) \wedge g$$

ب)

$$(a \wedge b) \wedge g = \frac{1}{p!q!l!} Alt(a \otimes b \otimes g)$$

ج) توزیع پذیری : برای فرم a و فرم های هم درجه b و g داریم

$$a \wedge (b+g) = a \wedge b + a \wedge g$$

و برای فرم های هم درجه a و b و فرم g داریم

---

wedge product [1]

$$(a+b)\wedge g = a\wedge g + b\wedge g$$

د) اگر $a\in\Omega^p E$ و $b\in\Omega^q E$ آن گاه

$$a\wedge b = (-1)^{pq}\, b\wedge a$$

اثبات. به منبع [1] مراجعه شود.

تذکر 1.1.5. از خاصیت جابجایی نتیجه می گیریم که اگر a از درجه فرد باشد یعنی اگر $a\in\Omega^{2p+1}E$ آنگاه $a\wedge a=0$.

1.2. متریک ریمانی

فرض کنیم M یک خمینه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 و بیشتر باشد.

تعریف1.2.1. یک متریک ریمانی[4] روی خمینه دیفرانسیل پذیر M عبارتست از یک تانسور g از نوع $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ روی M بطوریکه

الف: در هر نقطه p از M، g_p متقارن باشد، یعنی

$$\forall X,Y\in T_pM,\, g_p(X,Y)=g_p(Y,X)$$

ب: در هر نقطه p از M، g_p معین مثبت باشد، یعنی اگر $X\neq 0$ آنگاه $g_p(X,X)>0$.

---

[4] Riemannian metric

به راحتی می توان بررسی نمود که تانسور در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی T_pM تعریف می کند. این ضرب داخلی را با $< X,Y >_p$ یا تانسور $g_p(X,Y)$ نمایش می دهیم.

اگر (x,U) یک کارت در همسایگی نقطه p از خمینه M، $x(p)=(x^1,...,x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ پایه ای در همسایگی p در T_pM باشد و

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \qquad , \qquad \mathrm{Y_p}=\sum_{i=1}^{n}Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود:

$$g_p(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(p)dx^i\otimes dx^j(X,Y)$$

چون g متقارن است رابطه فوق را می توان به صورت $g=\sum g_{ij}dx^idx^j$ نوشت که در آن $g_{ij}(x^1,...,x^n)$ توابعی هستند که روی کارت (x,U) در همسایگی $p\in M$ به صورت زیر تعریف می شوند و در رابطه $g_{ij}=g_{ji}$ صدق می کنند.

$$g_{ij}(p)=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p),\frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^j}(p),\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\rangle$$

اگر دترمینان ماتریسی مخالف صفر باشد آن را ناتبهگون[5] می نامیم. این مفهوم به نوعی معادل مفهوم معکوس پذیری ماتریس $[g_{ij}]$ و معین بودن تانسور g است.

مثال 1.2.2. فضای $\mathbb{R}^n$ با مختصات اقلیدسی و پایه $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ را برای فضای مماس در نظر می گیریم اگر مختصات نقطه p توسط $(x^1,\ldots,x^n)$ داده شود، داریم:

$$g_{ij}(p)=\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(p),\frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right\rangle = d_{ij}$$

متریک ریمان حاصل $g=\sum_{i=1}^{n} d_{ij}dx^i dx^j=(dx^1)^2+\ldots+(dx^n)^2$ را متریک طبیعی،[6] یا متریک اقلیدسی می نامند. متریک ریمانی g یک متریک دیگری در T^*M فضای دوگان TM تولید می کند که آن را با g^* یا $\langle .,. \rangle^*$ نمایش می دهیم. g^* تانسوری از نوع $\binom{2}{0}$ است.

$$g^*=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}$$

با استفاده از خواص ضرب داخلی در فضای دوگان می توان نتیجه گرفت که ماتریس $g^{ij}(p)$ در هر نقطه p معکوس ماتریس $g_{ij}(p)$ است و داریم:

---

[5] non-degenerate

[6] natural metric

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik} g^{kj} = d_i^j$$

اگر $X, Y \in T_p M$ آنگاه متریک ریمانی g(X,Y) یا ضرب داخلی بین دو بردار X و Y را می توان به صورت زیر نوشت:

$$< X,Y >=< \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} >= \sum_{i,j}^{n} X^i Y^j < \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} >.$$

$$g(X,Y) =< X,Y >= \sum_{i,j}^{n} g_{ij} X^i Y^j.$$

در حالت خاص فضای اقلیدسی $g_{ij} = d_{ij}$ ضرب فوق به ضرب داخلی عادی در $\mathbb{R}^n$ تبدیل می شود.

تعریف 1.2.3. خمینه دیفرانسیل پذیر M همراه با متریک ریمانی g را یک خمینه ریمانی[7] نامیده توسط (M,g) نمایش می دهیم.

تعریف 1.2.4. فرض کنیم (m,g) و $(\overline{M}, \overline{g})$ دو خمینه ریمانی بوده و $f : M \to \overline{M}$ یک دیفئومورفیسم باشد. نگاشت f را یک هم متري[8] گوئیم اگر $g = f^* \overline{g}$ یا به عبارت معادل داشته باشیم:

$$g_p(X,Y) = \overline{g}_{f(p)}((f_*)_p X, (f_*)_p Y), \qquad \forall \mathrm{X,Y} \in \mathrm{T_p}M, \forall p \in M$$

در این صورت می گوئیم دو خمینه M و $\overline{M}$ با یکدیگر هم متر هستند.

---

[7] Riemannian manifold
[8] isometry

نگاشت f را در نقطه p یک هم متری موضعی[9] گوئیم اگر یک همسایگی U شامل p موجود باشد به طوری که $f:U \to f(U) \subset \overline{M}$ هم متری باشد. اگر به ازاء هر نقطه p از M یک هم متري موضعی موجود باشد، می گوئیم M و $\overline{M}$ به طور موضعی هم متر هستند.

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{d_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

طول قوس خم در هندسه اقلیدسی

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

طول قوس خم در هندسه ریمانی

1.3. التصاق خطی و مشتق گیری همگرد

فرض کنیم M یک خمینه دیفرانسیل پذیر و $c(M)$ مجموعه میدان های دیفرانسیل پذیر روی آن باشد.

تعریف 1.3.1. فرض کنیم عملگر ∇ قانونی باشد که به هر میدان برداری X از $c(M)$، یک نگاشت ∇_x با فرض $\nabla : c(M) \times c(M) \to c(M)$ مربوط می سازد که در شرایط زیر صدق می کند:

[9] locally isometry

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$\nabla_X (f\ Y) = f\nabla_X Y + (X\ f)\ Y,$$

که در آن $f, g \in C^{\infty}(M)$ و $X, Y, Z \in c(M)$. اگر f یک تابع روی M باشد. آنگاه اثر ∇_x را توسط $\nabla_x f = Xf$ تعریف می کنیم. در این صورت ∇ را یک التصاق خطی یا التصاق آفین[10] روی M نامیده و عملگر ∇_x را مشتق گیری همگرد[11] نسبت به X می نامیم.

باید در نظر داشت که ∇_x در شرایطی که قبلاً برای یک عملگر مشتق گیری بیان نمودیم صدق می کند. مشتق همگرد ∇_x روی خمینه M را می توان به صورت موضعی زیر نوشت.

لم 1.3.2. فرض کنیم (x,U) یک کارت در همسایگی نقطه p روی خمینه n- بعدی M همراه با التصاق آفین∇ باشد. آنگاه $\nabla_x Y$ در این مختصات را می توان به صورت گسترده زیر نوشت.

$$\nabla_x Y = (X.Y^i + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

که ضرایبΓ^k_{ij} توابعی حقیقی روی M هستند. در اینجا از قرارداد جمع بندی استفاده شده است و k و j و i مقادیر 1،2،3،....،n را اختیار می کنند.

اثبات. به منبع [2] مراجعه شود.

---

[10] affine orlinear connection

[11] covariant derivative

1.4. تعبیر هندسی مشتق گیری همگرد در طول یک خم

فرض کنیم M یک خمینه دیفرانسیل پذیر همراه با التصاق آفین ∇ بوده $C(t):[a,b]\to M$ یک خم دیفرانسیل پذیر روی خمینه M باشد.

لم- تعریف1.4.1. به هر میدان برداری X در طول C(t) یک و تنها یک میدان برداری $\nabla_{C'(t)}X$ وابسته می گردد. این میدان برداری را مشتق گیری همگرد در طول خم C می نامیم و آن را با نماد ساده $\frac{D}{dt}X$ نمایش می دهیم.

تعبیر هندسی مشتق گیری همگرد. فرض کنیم C(t) یک خم روی خمینه M باشد. اگر بردار مماس در نقطه $p=C(t_0)$ را با $V_p=\frac{dC}{dt}|_{t=t_0}\in T_pM$ نمایش دهیم ممکن است بردار شتاب یعنی $\frac{d^2C}{dt^2}|_{t=t_0}$ در نقطه p به T_pM تعلق نداشته باشد و نتوان آن را بر اساس اعضای پایه T_pM نوشت. لذا مفهوم مشتق گیری از یک بردار به شکل معمول یک خاصیت طبیعی یا ذاتی نیست. لذا برای رفع این مشکل بردار $\frac{d^2C}{dt^2}$ را با دو مؤلفه شتاب قائم و مؤلفه شتاب مماسی طوری تجزیه می کنیم که بردار شتاب مماسی در روی T_pM قرار داشته باشد. حال بردار شتاب مماسی در روی T_pM را با $\frac{dV}{dt}|_{t_0}$ نمایش داده آن را مشتق گیری همگرد در طو ل خم C می نامیم. از نظر فیزیکی

مؤلفه شتاب قائم باعث می شود که جسم مورد نظر هنگام حرکت بر روی خم C قرار داشته از خمینه M خارج نشود.

تعریف1.4.2. فرض کنیم M یک خمینه دیفرانسیل پذیر با التصاق خطی∇باشد. میدان برداری V را در طول خم $C:I\to M$ موازی[12] گوئیم، اگر به ازای هر $t\in I$ داشته باشیم. $\frac{DV}{dt}=0$ به علاوه اگر $V(t_0)=V_0$ آنگاه میدان برداری V را انتقال موازی[13] V در طول C می نامیم.

در این بخش و در ادامه بحث برای سادگی در نگارش، فرض می کنیم $\frac{\partial}{\partial x^i}=\partial_i$ و هرگاه احتمال اشتباه نرود با استفاده از قرارداد جمع بندی آینشتاین از نوشتن علامت زیگما خودداری می کنیم.

گزاره1.4.3. فرض کنیم M یک خمینه دیفرانسیل پذیر با التصاق خطی∇ و $C:I\to M$ یک خم دیفرانسیل پذیر روی M باشد. اگر $V_0\in T_{C(t_0)}M$ بردار مماس بر M در نقطه $C(t_0)$باشد آنگاه یک میدان برداری موازی یکتا V در طول خم C موجود است به طوری که $V(t_0)=V_0$

توجه شود که الزاماً بردارV_0 بر خم C مماس نیست.

اثبات. به منبع [2] مراجعه شود.

---

[12] parallel

[13] parallel transport

1.5. التصاق ریمانی و قضیه اساسی هندسه ریمانی

تعریف1.5.1. اگر یک التصاق خطی ∇ روی خمینه ریمانی (M,g) در شرایط زیر صدق کند، آن را التصاق ریمانی[14] می نامند.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \qquad (1.5.1)$$

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad (1.5.2)$$

که در آن $X,Y \in c(M)$.

التصاق ریمانی را التصاق لوی- چی ویتا[15] نیز می گویند. رابطه (1.5.1) را شرط تاب آزادی[16] و رابطه (1.5.2) را شرط سازگاری با متریک[17] می نامند. به عبارت دیگر اگر تانسور تاب یک التصاق را به صورت

$$T : c(M)\times c(M) \to c(M)$$
$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

زیر تعریف کنیم آنگاه شرط 1.5.1 معادل $T(X,Y)=0$ است.

---

14 Riemannian connection
15 Levi-Civita Connection
16 torsion freeness
17 metric compatibility