بسم الله الرحمن الرحیم

۱۵۹۴۳۳_۲۰۳۶۳۱۷

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

گروههای ۴-انگل دو مولدی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

پژوهشگر:

نیما بلدی

اسفند ماه ۱۳۸۹

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضـوع ایـن پایـان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر آقای نیما بلدی

تحت عنوان:

گروههای ۴- انگل دو مولدی

در تاریخ **۸۹/۱۲/۱۵** توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر علیرضا عبدالهی با مرتبه علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر جواد باقریان با مرتبه علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور خارج گروه دکتر محمد جواد عطایی با مرتبه علمی استادیار امضاء

۸۹/۱۲/۱۵

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه ....

ستایش خداوندی را سزاست که با آفرینش مخلوقات، بر انسان ها تجلّی کرد و با برهان و دلیل خود را بر قلب هایشان آشکار کرد. مخلوقات را بدون نیاز به فکر و اندیشه آفرید که فکر و اندیشه مخصوص کسانی است که دلی درون سینه داشته باشند و او چنین نیست، که علم خداوندی ژرفای پرده های غیب را شکافته است و به افکار و عقاید پنهان احاطه دارد.

و درود بر محمّد مصطفی (صلّی الله علیه و آله و سلّم) و خاندان طیّب و طاهرش و سلام بر شهدا بالاخص شهدای گمنام دانشگاه اصفهان.

تقدیر و تشکر از:

پدر، مادر و همسرم که مشمول دعای کرمشان بوده ام،

از جناب آقای دکتر علیرضا عبدالهی که با صبر و حوصله مرا در این مقطع تحصیلی و این پایان نامه راهنمایی نمودند. از خداوند متعال برای ایشان توفیق روزافزون و عاقبت به خیری خواهانم،

از جناب آقای دکتر عطایی و جناب آقای دکتر باقریان که داوری پایان نامه اینجانب را به عهده داشته اند و از خانم ها، غازی، فرهمند و معمار که در راهنمایی و کمک اینجانب دریغ نکرده اند.

پروردگارا یاریمان کن تا در پایان نامه ای که روز دفاعش یوم الحسرت و داورانش قرآن و عترت است سرافراز شویم.

تقدیم به قطب دایره امکان حضرت بقیة الله الاعظم عجّل الله تعالی فرجه الشّریف

تقدیم به معمار کبیر انقلاب اسلامی حضرت امام خمینی (ره) و شهدای انقلاب و هشت سال دفاع مقدس

تقدیم به رهبر عزیزم حضرت آیت الله العظمی سید علی خامنه ای (مدظلهٔ العالی)

چکیده

منشأ گروه های انگل به نظریه ی جبرهای لی بر می گردد. به عنوان مثال یکی از نتایج پایه ای برای جبرهای لی انگل، قضیه ی انگل است که به این صورت بیان می شود: هر جبرلی انگل با بعد متناهی روی یک میدان، پوچ توان است. زرن این قضیه را در نظریه ی گروه ها چنین بیان کرد که هر گروه متناهی انگل، پوچ توان است.

زلمانوف در مورد جبرهای لی انگل بیان کرد که: هر جبرلی n-انگل روی یک میدان با مشخصه ی صفر، پوچ توان است و هم چنین هر جبرلی n-انگل روی یک میدان دلخواه، موضعاً پوچ توان است. در این جا دو سؤال در نظریه ی گروه مطرح می شود که: آیا هر گروه n-انگل تاب-آزاد، پوچ توان است؟ و هم چنین آیا هر گروه n-انگل، موضعاً پوچ توان است؟ در پیرامون این دو سؤال تحقیقاتی به عمل آمده است که به اختصار به آن ها می پردازیم.

در مورد گروه های ۱-انگل چون این گروه ها همان گروه های آبلی هستند جواب واضح است. در مورد گروه های ۲-انگل، لوی و در مورد گروه های ۳-انگل هنیکن به هر دو سؤال بالا جواب مثبت داده اند. اما در مورد گروه های ۴-انگل تا کنون به این سؤالات جواب داده نشده است اما با استفاده از نتایج به دست آمده روی گروه های ۴-انگل، می توان دید که یک گروه ۴-انگل موضعاً پوچ توان است اگروتنهااگر همه ی زیرگروه های ۳-مولده ی آن پوچ توان باشند. لذا اگر ثابت شود که همه ی زیرگروه های ۳-مولده ی یک گروه ۴-انگل پوچ توان هستند، آن گاه جواب یکی از سؤالات بالا داده می شود. اما در این پایان نامه تنها ثابت می شود که گروه های ۴-انگل ۲-مولده پوچ توان می باشند. یک قضیه ی کلیدی که در اثبات پوچ توانی گروه های ۴-انگل ۲-مولده ما را یاری می کند این است که: فرض کنید G یک گروه انگل و R رادیکال هرش-پلاتکین گروه G باشد. دراین صورت رادیکال هرش-پلاتکین گروه خارج قسمتی $G\backslash R$، بدیهی است.

کلید واژه ها: انگل، پوچ توان، موضعاً پوچ توان، رادیکال هرش-پلاتکین

فهرست مطالب

پیشگفتار

منشأ گروه‌های انگل[1] به نظریه‌ی جبرهای لی بر می‌گردد. این مطلب جالب است که چه تعداد از نتایج در نظریه‌ی جبرهای لی انگل، دارای مشابه‌هایی در نظریه‌ی گروهای انگل هستند. به عنوانِ مثال یکی از نتایج پایه‌ای برای جبرهای لی انگل، قضیه‌ی انگل است که به این صورت بیان می شود:

هر جبر لی انگل با بعد متناهی روی یک میدان، پوچ‌توان است.

در سال ۱۹۳۶ زُرن[2] در مرجع [۲۳] نظیر این قضیه را در نظریه‌ی گروه‌ها بیان کرد. او ثابت کرد که شرط انگل برای گروه‌های متناهی معادل با پوچ‌توانی است. در سال ۱۹۵۳ گرونبرگ[3] در مرجع [۳] نشان داد که شرط انگل برای گروه‌های حل‌پذیر معادل با موضعاً پوچ‌توانی است. در سال ۱۹۹۱ ویلسون[4] در مرجع [۱۹] ثابت کرد، هر گروه n—انگل به طور باقیمانده‌ای متناهی، موضعاً پوچ‌توان است.

در سال ۱۹۹۵ ترایوستاسن[5] در مرجع [۱۴] اثبات کرد که هر گروه ۴—انگل موضعاً پوچ‌توان فاقد عناصر از مرتبه‌های ۲، ۳ و ۵، پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر ۷ می‌باشد و در سال ۲۰۰۲، عبدالهی و ترایوستاسن در مرجع [۱] نشان دادند که اگر گروهی تنها فاقد عناصر از مرتبه‌های ۲ و ۵ باشد، لزوماً پوچ‌توان نیست اما حل‌پذیری آن پا برجاست، این نکته قابل توجه است که {۲،۵}—گروه ۴—انگل موضعاً پوچ‌توان وجود دارد که حل‌پذیر نیست (مراجع [۲] و [۱۱] را ببینید).

[1] Engel groups
[2] Zorn
[3] Gruenberg
[4] Wilson
[5] Traustason

در سال ۱۹۸۰ گوپتا و لوین نشان دادند که برای $n \geq ۵$، لزومی ندارد هر گروه n—انگل موضعاً پوچ‌توان، یک گروه فیتینگ باشد. اما ترایوستاسن در مرجع [۱۶] نشان داد که همه‌ی گروه‌های ۴—انگل موضعاً پوچ‌توان، یک گروه فیتینگ است.

اکنون به قضایای زلمانوف[۶] در مورد جبرهای لی انگل توجه کنید.

قضیه ۱: هر جبر لی n—انگل روی یک میدان با مشخصه‌ی صفر، پوچ‌توان است.

قضیه ۲: هر جبر لی n—انگل روی یک میدان دلخواه، موضعاً پوچ‌توان است.

برهان: به مراجع [۲۰]،[۲۱] و [۲۲] رجوع شود.

با توجه به قضایای بالا سؤالات زیر مطرح هستند:

۱) آیا هر گروه n—انگل تاب—آزاد، پوچ‌توان است؟

۲) آیا هر گروه n—انگل، موضعاً پوچ‌توان است؟

برای حالت $n = ۱$ چون هر گروه ۱—انگل، یک گروه آبلی است، لذا جواب هر دو سؤال بالا مثبت است.

در سال ۱۹۴۲ لوی[۷] در مرجع [۱۰] به هر دو سؤال بالا برای حالت $n = ۲$ جواب مثبت داد. او در واقع ثابت کرد که یک گروه G، ۲—انگل است اگر وتنها اگر بستار نرمال هر زیرگروه دوری G، آبلی باشد. به علاوه او نشان داد که هر گروه ۲—انگل، پوچ‌توان از رده حداکثر ۳ است.

در سال ۱۹۶۱ هینکن[۸] در مرجع [۵] به هر دو سؤال بالا برای حالت $n = ۳$ جواب مثبت داد. او ثابت کرد که هر گروه ۳—انگل G که فاقد عنصر از مرتبه های ۲ یا

[۶] Zel'manov

[۷] Levi

[۸] Heineken

۵ باشد، پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر ۴ است. هم‌چنین نشان داد که هر گروه ۳—انگل، موضعاً پوچ‌توان است.

در سال ۱۹۷۲ کاپه و کاپه[۹] در مرجع [٦] یک مشخصه برای گروه‌های ۳—انگل بیان کردند. آنها نشان دادند که عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱) G یک گروه ۳—انگل است.

۲) بستار نرمال هر زیرگروه دوری G، یک گروه ۲—انگل است.

۳) بستار نرمال هر زیرگروه دوری G، پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر ۲ است.

در سال ۱۹۸۰ گوپتا و لوین[۱۰] در مرجع [۴] نشان دادند که چنین مشخصه‌ای برای گروه‌های ۴—انگل وجود ندارد. در واقع آنها گروه ۴—انگلی را ساختند که دارای عنصری مانند x است به طوری که $\langle x\rangle^G$ پوچ‌توان از رده‌ی بزرگتر از ۳ است.

اما هنوز این سؤالات برای حالت $n = ۴$ به عنوان سؤالاتی باز مطرح هستند.

ترایوستاسن در مرجع [۱۴] نشان داد که {۲،۳}—گروه‌های ۴—انگل، موضعاً متناهی می‌باشند و در سال ۱۹۹۷ واگان‌لی[۱۱] در مرجع [۱۸] نشان داد که ۵—گروه‌های ۴—انگل نیز، موضعاً متناهی هستند و از آن‌جا که هر p—گروه متناهی، پوچ‌توان است پس {۲،۳،۵}—گروه‌های ۴—انگل، موضعاً پوچ‌توان می‌باشند. هم‌چنین ترایوستاسن در طی تحقیقاتی به نتایجی در مورد گروه‌های ۴—انگل رسیده است. از جمله:

۱) در سال ۱۹۹۵ در قضیه‌ای ثابت کرد که اگر G یک گروه ۴—انگل باشد،

---

[۹] Kappe

[۱۰] Gupta and Levin

[۱۱] Vaughan-Lee

آن‌گاه عناصر تاب‌دار آن زیرگروه $T(G)$ از G را تشکیل می دهند و $\frac{T(G)}{Z(T(G))}$ حاصل‌ضرب مستقیمی از p−گروه‌ها می‌باشد (مرجع [۱۴] را ببینید).

۲) در سال ۱۹۹۹ نشان داد که هر زیر گروه تولید شده توسط دو عنصر مزدوج در یک گروه ۴−انگل، پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر ۴ است (مرجع [۱۵] را ببینید).

۳) در سال ۲۰۰۵ در مرجع [۱۷] ثابت کرد که یک گروه ۴−انگل G، موضعاً پوچ‌توان است اگروتنهااگر همه زیرگروه‌های ۳−مولده آن پوچ‌توان باشند. هم‌چنین در همین مقاله نشان داد که هر گروه ۴−انگل ۲−مولده، پوچ‌توان است که ما در این پایان‌نامه به بررسی کردن این مورد خواهیم پرداخت.

در فصل اول این پایان‌نامه به تعریف و قضایایی مقدماتی خواهیم پرداخت که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیازمند خواهیم شد.

در فصل دوم یک گروه بیشین نرمال موضعاً پوچ‌توانی به نام رادیکال هرش−پلاتکین را معرفی خواهیم کرد و ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه انگل و R، رادیکال هرش − پلاتکین G باشد، آن‌گاه رادیکال هرش−پلاتکین $\frac{G}{R}$ بدیهی است. این لم ما را در رسیدن به هدف اصلی این پایان‌نامه کمک می‌کند.

هم‌چنین در این فصل یک گروه مقیّد را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر G یک گروه مقیّد و متناهی‌المولد باشد و $H \trianglelefteq G$ به طوری که $\frac{G}{H}$ دوری باشد، آن‌گاه H متناهی‌المولد است. (مشابه این لم را زمانی داشتیم که اگر G یک گروه متناهی‌المولد باشد و $|G:H| \leq \infty$، آن‌گاه H متناهی‌المولد است).

در فصل سوم به بررسی کردن مقاله‌ای از ترایوستاسن [۱۷] می‌پردازیم که هدف اصلی

آن اثبات قضیه‌ی زیر است

قضیه: هر گروه ۴–انگل ۲–مولده، پوچ‌توان است.

در نهایت به دو نتیجه از این قضیه می‌رسیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای اولیه

در این فصل به تعریف جابه‌جاگرها، گروه‌های پوچ‌توان و حل‌پذیر و هم‌چنین قضایای مربوط به آن‌ها خواهیم پرداخت که در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده خواهیم کرد.

نمادگذاری ۱.۱ اگر G یک گروه دلخواه و H زیر گروه نرمال آن باشد. آن‌گاه به ازای هر عنصر x در گروه G، xH در گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ قرار دارد که آن را با $\overline{x}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنید G یک گروه و π یک مجموعه از اعدد اول باشد.

۱) عنصر $g \in G$ را π—**عنصر** گویند، اگر عوامل اول مرتبه g، در مجموعه π باشد.

۲) گروه G را π—**گروه** گویند، اگر همه عناصر G، π—عنصر باشند.

۳) H از گروه G را یک π—**زیرگروه** گویند، هر گاه H یک π—گروه باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنید G یک گروه دلخواه و $\{G_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های گروه G باشد. در این صورت G را **حاصل‌ضرب مستقیم** G_i ها گویند، اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱) به ازای هر $i \in I$ ، $G_i \trianglelefteq G$،

۲) $G = \langle \bigcup_{i \in I} G_i \rangle$،

۳) $G_j \cap \langle \bigcup_{i \in I, i \neq j} G_i \rangle = 1$.

حاصل‌ضرب مستقیم G_i ها را با $Dr_{i \in I} G_i$ نمایش می‌دهیم.

۱ــ۱ جابه‌جاگرها

تعریف ۴.۱ جابه‌جاگر $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ را به ازای یک عدد صحیح نامنفی n، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x_1] = x_1$$

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$$

$$\forall\, n \geq 1 \qquad [x_1, \ldots, x_{n+1}] = [[x_1, \ldots, x_n], x_{n+1}]$$

حال فرض کنید $x_2 = \cdots = x_{n+1} = y$ و $x_1 = x$. در این صورت **جابه‌جاگر n—انگل** $[x,_n y]$، به صورت زیر خواهد بود :

$$[x,_0 y] = x$$

$$[x,_1 y] = [x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$$

$$\forall\, n \geq 1 \qquad [x,_n y] = [[x,_{n-1} y], y]$$

قضیه ۵.۱ فرض کنید x, y و z عناصری از یک گروه باشند. در این صورت:

۱) $[x, y]^z = [x, y][x, y, z]$

۲) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$

۳) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$

برهان: به ۵.۱.۵ در مرجع [۱۲] مراجعه کنید. ■

لم ۶.۱ فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. در این صورت به ازای هر a، b، c و d در G داریم:

۱) $[a, b] = b^{-a} b = a^{-1} a^b$

۲) $[a, b]^{-1} = [b, a]$

۳) $[a, b]^c = [a^c, b^c]$ ، $[a, c^{b^{-1}}]^b = [a^b, c]$ ، $[a^b, c^d] = [a, c^{db^{-1}}]^b$

۴) $[a, b^{-1}] = [a, b]^{-b^{-1}}$ ، $[a^{-1}, b] = [a, b]^{-a^{-1}}$

۵) اگر $[a,b]=1$، آن‌گاه $[a^{-1},b^{-1}]=[a^{-1},b]=[a,b^{-1}]=1$

۶) اگر $[a,b]=1$ و $[a,c]=1$، آن‌گاه $[a,bc]=1$

۷) اگر $[a,b]=1$ و $[a,bc]=1$، آن‌گاه $[a,c]=1$

۸) $(ab)^c=a^cb^c$

۹) $[a^{-1},b,c]=[[a,b]^{-a^{-1}},c]$

۱۰) $a^b=a[a,b]$

۱۱) $[a^b,a]=[a,b,a]$.

برهان:

۱) $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab=b^{-a}b=a^{-1}a^b.$

۲) $[a,b]^{-1}=(a^{-1}a^b)^{-1}=(a^{-b}a)=[b,a].$

۳)
$$[a,b]^c=c^{-1}[a,b]c=c^{-1}a^{-1}b^{-1}abc=c^{-1}a^{-1}cc^{-1}b^{-1}cc^{-1}acc^{-1}bc$$
$$=a^{-c}b^{-c}a^cb^c=[a^c,b^c].$$

به عنوان نتیجه $[a,c^{b^{-1}}]^b=[a^b,c^{b^{-1}b}]=[a^b,c]$

و هم‌چنین $[a,c^{db^{-1}}]^b=[a^b,(c^{db^{-1}})^b]=[a^b,c^{db^{-1}b}]=[a^b,c^d]$.

۴)
$$[a,b]^{-b^{-1}}=([a,b]^{-1})^{b^{-1}}=([b,a])^{b^{-1}}=b[b,a]b^{-1}=bb^{-1}a^{-1}bab^{-1}$$
$$=a^{-1}bab^{-1}=[a,b^{-1}].$$

به طور مشابه $[a^{-1},b]=[a,b]^{-a^{-1}}$.

۵) بنابر (۴)، داریم

$$[a,b^{-1}]=[a,b]^{-b^{-1}}=1^{-b^{-1}}=1.$$

$$[a^{-1}, b] = [a, b]^{-a^{-1}} = 1^{-a^{-1}} = 1.$$

$$[a^{-1}, b^{-1}] = [a^{-1}, b]^{-b^{-1}} = 1^{-b^{-1}} = 1.$$

۶) می‌دانیم $[a, b] = 1 \;\Rightarrow\; ab = ba \quad , \quad [a, c] = 1 \;\Rightarrow\; ac = ca$

پس خواهیم داشت

$$abc = bac = bca \;\Rightarrow\; a(bc) = (bc)a \;\Rightarrow\; [a, bc] = 1.$$

۷) می‌دانیم $[a, b] = 1 \;\Rightarrow\; ab = ba \quad , \quad [a, bc] = 1 \;\Rightarrow\; abc = bca$

پس خواهیم داشت

$$abc = bca \;\Rightarrow\; bac = bca \;\Rightarrow\; b^{-1}bac = ca \;\Rightarrow\; ac = ca \;\Rightarrow\; [a, c] = 1.$$

۸) $(ab)^c = c^{-1}abc = c^{-1}acc^{-1}bc = a^c b^c.$

۹) $[a^{-1}, b, c] = [[a^{-1}, b], c]$

$= [[a, b]^{-a^{-1}}, c].$ بنابر (۴)

۱۰) $a^b = b^{-1}ab = aa^{-1}b^{-1}ab = a[a, b].$

۱۱) $[a^b, a] = [a[a, b], a]$

$= [a, a]^{[a,b]}[a, b, a] = [a, b, a].$ بنابر قضیه‌ی ۵.۱، (۳)

اثبات کامل شد. ■

نمادگذاری ۷.۱ جابه‌جاگر $[x_m, g]$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$[x_m, g] = [x, [x_{m-1}, g]]$$

قضیه ۸.۱ برای هر دو عنصر x و g در یک گروه داریم:

$$[g,_m x] = [x_m^{-1}, g]^{x^m}$$

برهان:

با استقرا روی m به اثبات می‌پردازیم. فرض کنیم $m = 1$. در این صورت

$$\begin{aligned}
[x^{-1}, g]^x &= ([g, x^{-1}]^{-1})^x && \text{بنابر لم ۶.۱،(۲)}\\
&= [g, x^{-1}]^{-x}\\
&= ([g, x]^{-x^{-1}})^{-x} && \text{بنابر لم ۶.۱،(۴)}\\
&= [g, x]
\end{aligned}$$

فرض کنیم $m > 1$ و حکم برای مقادیر کمتر از m برقرار باشد. داریم :

$$\begin{aligned}
[x_{m+1}^{-1}, g]^{x^{m+1}} &= [x^{-1}, [x_m^{-1}, g]]^{x^{m+1}}\\
&= ([x^{-1}, [x_m^{-1}, g]]^{x^m})^x\\
&= ([x^{-x^m}, [x_m^{-1}, g]^{x^m}])^x && \text{بنابر لم ۶.۱،(۳)}\\
&= ([x^{-m}x^{-1}x^m, [x_m^{-1}, g]^{x^m}])^x\\
&= ([x^{-1}, [x_m^{-1}, g]^{x^m}])^x\\
&= [x^{-1}, [g,_m x]]^x && \text{بنابر فرض استقرا}\\
&= ([[g,_m x], x^{-1}]^{-1})^x && \text{بنابر لم ۶.۱،(۲)}\\
&= [[g,_m x], x^{-1}]^{-x}\\
&= ([[g,_m x], x]^{-x^{-1}})^{-x} && \text{بنابر لم ۶.۱،(۴)}\\
&= [g,_m x], x]\\
&= [g,_{m+1} x]
\end{aligned}$$

اثبات کامل شد. ■

تعریف ۹.۱ اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه G' را **زیرگروه مشتق** G گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$G' = [G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$$

تعریف ۱۰.۱ گروه G را **فراآبلی** گویند اگر G' یک گروه آبلی باشد.

لم ۱۱.۱ اگر گروه G فراآبلی باشد، آن‌گاه به ازای هر a در G' و b در G داریم:

$$[a, b, c] = [a, c, b]$$

برهان:

بنابر قضیه‌ی ۵.۱، (۲)، داریم:

$$[a, bc] = [a, c][a, b][a, b, c] \quad , \quad [a, cb] = [a, b][a, c][a, c, b]$$

می‌دانیم $G' \trianglelefteq G$ و G' آبلی است پس جابه‌جاگرهای فوق در G' قرار دارند و با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. لذا

$$\begin{aligned}
[a, b, c][a, c, b]^{-1} &= [a, b]^{-1}[a, c]^{-1}[a, bc][a, cb]^{-1}[a, b][a, c] \\
&= [a, bc][a, cb]^{-1} \\
&= a^{-1}(bc)^{-1}a(bc)(cb)^{-1}a^{-1}(cb)a \\
&= ((bc)a)^{-1}a(bc)(cb)^{-1}a^{-1}(cb)(c^{-1}b^{-1})(bc)a \\
&= (bca)^{-1}[a^{-1}, [b^{-1}, c^{-1}]](bca)
\end{aligned}$$