بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم

موسسه ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب

پایان نامه :

دوره کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان :

مدول‌های کوکوهن مکولی
و
مدول‌های کسرهای تعمیم یافته

استاد راهنما :

دکتر حسین ذاکری

تدوین :

ساجد خضرلوی اقدم

شهریور ماه ۱۳۷۲

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تربیت معلم

" بسمه تعالی "

جلسه دفاع از پایان‌نامه برادر / خواهر ساجد خضرلوی اقدم دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ریاضی در روز دوشنبه مورخه ۷۲/۶/۱۵ در موسسه‌ی ریاضیات تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمره این آزمون هیجده (۱۸) می‌باشد.

۱ـ عالی ☒

۲ـ خوب ☐

۳ـ متوسط ☐ — نیاز به تجدید نظر دارد ☐ / نیاز به تجدید نظر ندارد ☐

۴ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما
آقای دکتر حسین ذاکری

ممتحنین داخلی
۱ـ آقای دکتر جیژن زاده
۲ـ

ممتحنین خارجی
۱ـ آقای دکتر زارع نهندی
۲ـ

حسین ذاکری
رئیس موسسه‌ی ریاضیات
دکتر غلامحسین مصاحب

تقدیم به :

پدرم که اسوهٔ صداقت و ایمان

و

مادرم که الههٔ صبر و ایمان

و

همسرم که الههٔ معرفت و ایمان می‌باشند.

لَمْ یَشْکرِالمخلوق لَمْ یَشْکرِالخالق

بدین وسیله از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسین ذاکری که در تدوین پایان‌نامه، راهنمایی‌های لازم و کافی را برای اینجانب داشته و از هیچ کمکی دریغ نکرده‌اند، تقدیر و تشکر می‌کنم همچنین از جناب آقای دکتر بیژن‌زاده و آقای دکتر زارع که مطالب پایان‌نامه را مطالعه کرده و بعنوان داوران داخلی و خارجی در جلسهٔ دفاعیه حضور داشته‌اند تقدیر و تشکر می‌کنم و نیز از جناب آقای بهروزی که قبول زحمت نموده و این پایان‌نامه را حروفچینی کرده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم.

ساجد خضرلوی اقدم

«فهرست مطالب»

حروفچینی بهروزی تلفن ۸۰۸۵۱۷۰

«چکیده»

در این پایان نامه توجه خود را به حلقه‌های جابجایی و یکدار که لزوماً نوتری نیستند معطوف کرده و بدین ترتیب مفاهیم هم‌رشته و هم‌نمرهٔ یک ایده‌آل را که بترتیب دوگان رشته و نمرهٔ یک ایده‌آل هستند، تعریف کرده‌ایم.

اگر M یک مدول آرتینی روی حلقهٔ شبه موضعی $(A , \underline{m})$ باشد، آنگاه بعد کرول و دستگاه پارامتری برای M را تعریف کرده و نشان داده‌ایم که در حالت کلّی رابطه زیر برقرار است:

$$\mathrm{Cograde}_{\underline{m}} M \leq K \dim_A M$$

سپس به معرفی مدول‌های کوکوهن مکولی پرداخته، به کمک مدول‌های کسرهای تعمیم یافته، این نوع مدول‌ها را دقیقاً مشخص کرده‌ایم همچنین دوگان قضیه دقیق بودن را ثابت کرده و دو کاربرد این قضیه را بیان کرده‌ایم

«مقدمه»

مدول‌های کوهن مکولی تشکیل یک کلاس خیلی جالب از مدول‌های نوتری را می‌دهند. بازاء هر مدول با تولید متناهی M روی حلقهٔ موضعی نوتری A ،همواره:

$$\mathrm{grade}_M \underline{m} = \mathrm{depth}_A M \leq \dim_A M$$

M را کوهن مکولی نامیم هرگاه، $\mathrm{depth}_A M = \dim_A M$

در این پایان نامه مشابهاً به معرفی و بررسی مدول‌های کوکوهن مکولی خواهیم پرداخت. برای این منظور، ابتدا دوگان مفاهیم بعد و عمق مدول را برای مدول‌های آرتینی روی حلقه‌های شبه موضعی، معرفی خواهیم کرد. همچنین خواص جالبی از این نوع مدول‌ها را بدست خواهیم آورد.

از نتایج مهم این پایان‌نامه، دوگان قضیه دقیق بودن می‌باشد. به کمک این قضیه، مدول‌های کوکوهن مکولی را مشخص خواهیم کرد. اینک به توصیف مطالب و روند قرار گرفتن آنها در این پایان‌نامه، می‌پردازیم.

مفهوم هم‌رشته، برای اولین بار توسط ماتلیس در سال ۱۹۶۰ در [5] معرفی شد. بعداً خود ماتلیس (در [6]) و دیگران در مورد خواص هم‌رشته‌ها نتایجی را بدست آوردند. تقریباً تمامی نتایج مربوط به هم‌رشته‌ها در حالتی که حلقه نوتری فرض می‌شود، ثابت شده است.

در این پایان نامه، توجه خود را به حلقه‌های جابجایی که لزوماً نوتری نیستند، معطوف خواهیم کرد و پس از بررسی خواص هم‌رشته‌ها به رابطهٔ مشابهی که از روی آن مدول‌های کوهن مکولی تعریف شده‌اند، خواهیم رسید و از آنجا مدول‌های کوکوهن مکولی را تعریف خواهیم کرد.

در فصل اول، مفاهیم پیشنیاز و مدول‌های کسرهای تعمیم یافته را بیان خواهیم کرد.

در فصل دوم، نظریه هم‌رشته‌ها را در حالت عمومی بیان کرده و هم‌نمرهٔ یک ایده‌آل را که دوگان نمرهٔ یک ایده‌آل است، تعریف خواهیم کرد. همچنین نظریه نمایش ثانویهٔ مدول‌ها مطرح شده و ثابت خواهد شد که

مدول‌های آرتینی، حتماً دارای یک نمایش ثانویه و مینیمال هستند.

در فصل سوم پس از تعریف بعد کرول و بعد کلاسیک کرول، با استفاده از چند جمله‌ای های هیلبرت، نشان خواهیم داد که این دو بعد مساویند.

تعریف دستگاه پارامتری برای یک مدول آرتینی در فصل چهارم صورت خواهد گرفت و از روی بعد کرول پوچساز یک ایده‌آل، زیر مجموعه‌ای از یک دستگاه پارامتری برای مدول بدست خواهیم آورد. با توجه به نظریه نمایش ثانویه مدول‌ها، رابطه‌ای بین بعد کرول مدول M روی حلقه شبه موضعی $(A, \underline{m})$ و هم‌نمرهٔ ایده‌آل $\underline{m}$، بدست خواهیم آورد. این رابطه، ما را به تعریف مدول‌های کوکوهن مکولی راهنمایی خواهد کرد. همچنین در چنین مدول‌هایی نشان داده خواهد شد که هر دستگاه پارامتری یک هم‌رشته است. آخرین حکم این فصل یک شرط لازم و کافی برای چنین مدول‌هایی را عنوان خواهد کرد.

در فصل پنجم ارتباط ما بین مدول‌های کسرهای تعمیم‌یافته و مفهوم هم‌رشته بررسی خواهد شد. یکی از نتایج اصلی این فصل، دوگان قضیهٔ دقیق بودن می‌باشد. به کمک این قضیه، مدول‌های کوکوهن مکولی را بر حسب مدول‌های کسرهای تعمیم‌یافته، مشخص خواهیم کرد.

فصل اول

کلیات، پیشنیازها و معرفی مدولهای کسرهای تعمیم‌یافته

این پایان نامه طوری تدوین شده‌است که خوانندهٔ آشنا با جبر جابجایی و جبر همولوژی بتواند از آن استفاده نماید. با وجود این، بعضی از مطالب مهمی که بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است، در این فصل به طور مختصر بیان خواهد شد.

در این فصل A نمایش حلقه‌ای جابجایی و یکدار بوده و اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال A را در سراسر این پایان نامه با J(A) نشان خواهیم داد. اگر حلقهٔ A دارای تنها یک ایده‌آل ماکسیمال باشد، آنگاه A را شبه موضعی می‌نامیم. همچنین رادیکال یک ایده‌آل I از A را با علامت rad I نشان خواهیم‌داد.

فرض کنید I ایده‌آل حلقهٔ A و P_1 و ... و P_n ایده‌آل‌های اول A باشند به طوری که $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. در این صورت r ی($1 \le r \le n$) موجود است به طوری که $I \subseteq P_r$. برای اثبات این مطلب به [1,1.11] رجوع کنید.

فرض کنید R حلقه‌ای موضعی نوتری باشد. بعد حلقهٔ R را که با علامت dim R نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\dim R = \sup \left\{ 0 \leq n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{ایده‌آل‌های اوّلی از } A \text{ مانند } P_0, \dots, P_n \text{ موجود باشند} \\ \text{به طوری که} \quad P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n \end{array} \right\}$$

اگر سوپرموم مجموعه فوق موجود نباشد، آنگاه تعریف می کنیم $\dim R = \infty$

فرض کنید $(M_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از A ـ مدول‌ها باشند، دراین صورت ثابت می‌شود که بازاء هر $1 \leq i \leq n$، M_i نوتری (آرتینی) است اگر و فقط اگر $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ نوتری (آرتینی) باشد. (به [1,6.4] مراجعه شود)

یک زنجیر اکید از زیر مدول‌های یک A ـ مدول M، عبارت است از رشته‌ای از زیر مدول‌های M مانند $(M_i)_{0 \leq i \leq n}$ به طوری که:

$$(1) \qquad M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = 0$$

در زنجیر فوق n را طول زنجیر می‌نامیم. بعلاوه زنجیر (۱) را یک سری اشباع برای M می‌نامیم، هر گاه این زنجیر ماکسیمال باشد. یعنی هیچ زیر مدولی از M را نتوان به طور اکید بین جملات (۱) قرار داد. و این معادل با این است که بازاء هر $1 \leq i \leq n$، M_{i-1} / M_i یک A ـ مدول ساده باشد.

طول یک A ـ مدول M را با نماد $l_A(M)$ نشان داده و آن را برابر با طول یک سری اشباع برای M تعریف می‌کنیم. اگر M دارای هیچ سری اشباعی نباشد آنگاه $l_A(M)$ را مساوی بینهایت می گیریم.

ثابت می‌شود که اگر A ـ مدول M دارای یک سری اشباع به طول $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ باشد آنگاه هر سری اشباع برای M نیز دارای طول n است و بعلاوه هر زنجیر اکید از زیر مدول‌های M را می‌توان به یک سری اشباع برای M توسیع داد. برای این منظور به [1,6.7] مراجعه کنید.

در رابطه با طول مدول حکم زیر را داریم.

۱ - ۱ حکم:

فرض کنید $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ رشته‌ای دقیق از A ـ مدول‌ها و A ـ همومورفیسم‌ها باشد. در این صورت، M دارای طول متناهی است اگر و فقط اگر M' و M'' دارای طول متناهی باشند بعلاوه اگر M دارای طول متناهی باشد آنگاه $l_A(M) = l_A(M') + l_A(M'')$

برهان: به [1,6.9] رجوع کنید.

فضای برداری حالت خاصی از مدول می‌باشد. در مورد فضای برداری V روی میدان K احکام زیر معادلند.

i) V به عنوان فضای برداری روی میدان K دارای بعد متناهی است.

ii) V به عنوان K_مدول دارای طول متناهی است.

iii) V به عنوان K_مدول، نوتری است.

iv) V به عنوان K_مدول، آرتینی است.

برای اثبات این مهم، به [1,6.10] رجوع کنید.

در این پایان نامه مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول A را با علامت Spec A نشان می دهیم.

فرض کنید M یک A_مدول بوده و $P \in \text{Spec } A$. اگر $x \in M$ ، $\neq 0$ ی موجود باشد به طوری که $P = \text{Ann } x$ آنگاه P را یک ایده‌آل اول وابسته به M می‌نامیم. مجموعهٔ ایده‌ال‌های اول وابسته به M را با $\text{Ass}_A M$ یا AssM نشان می دهیم.

A ـ مدول M را اولیه می‌نامیم هر گاه AssM تک عضوی باشد. در انتهای فصل سوم از [7] مطلبی راجع به مدول‌های اولیه به صورت زیر آمده است.

فرض کنید M یک مدول نا صفر و با تولید متناهی روی حلقهٔ نوتری A باشد. در این صورت، M اولیه است اگر و فقط اگر شرط زیر برقرار باشد.

بازاء هر $a \in A$ اندومورفیسم $\varphi_a : M \longrightarrow M$ که با ضابطهٔ $\varphi_a(m) = am$ تعریف می‌شود، یک به یک یا پوچتوان باشد. در این حالت $\text{AssM} = \{P\}$ که در آن $P = \text{rad }(\text{AnnM})$.

حال به معرفی کسرهای تعمیم یافته می‌پردازیم. در سراسر این پایان‌نامه نماد ^{T} را برای ترانهادهٔ یک ماتریس به کار خواهیم برد و منظور از $D_n(A)$ مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ پایین مثلثی با درایه‌های واقع

در A می‌باشد. همچنین اگر $H \in D_n(A)$ آنگاه دترمینان H را با علامت $|H|$ نشان می‌دهیم. و نیز بازاء $n \in \mathbb{N}$ منظور از A^n همان مجموعهٔ $\{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in A$ ، $1 \le i \le n$ بازاء هر$\}$ می‌باشد.

۱ ـ ۲ تعریف:

فرض کنید $U \subseteq A^n$. گوئیم U یک زیر مجموعه مثلثی از A^n است هر گاه شرایط زیر برقرار باشند.

i) $U \neq \emptyset$

ii) اگر $(x_1, \dots, x_n) \in U$ آنگاه بازاء اعداد صحیح و مثبت $\alpha_1, \dots, \alpha_n$، $(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}) \in U$

iii) اگر $(y_1, \dots, y_n) \in U$ و $(x_1, \dots, x_n)$ آنگاه $(z_1, \dots, z_n) \in U$ و $K \in D_n(A)$ و H موجود باشند به‌طوری که

$$H[x_1, \dots, x_n]^T = [z_1, \dots, z_n]^T = K[y_1, \dots, y_n]^T$$

برای راحتی در آینده هر جا که مقدور باشد عنصر $(x_1, \dots, x_n) \in U$ را با x نشان خواهیم داد و نماد $\mathrm{diag}\,(x_1, \dots, x_n)$ را برای ماتریس قطری $n \times n$ به کار خواهیم برد که در آن $x_1, \dots, x_n$ عناصر روی قطر می‌باشند.

۱ ـ ۳ لم:

فرض کنید U یک زیر مجموعه مثلثی از A^n بوده و $(y_1, \dots, y_n) \in U$ و $(x_1, \dots, x_n)$ همچنین فرض کنید $H \in D_n(A)$ ی موجود است به طوری که

$$H[x_1, \dots, x_n]^T = [y_1, \dots, y_n]^T$$

در این صورت بازاء هر $1 \le i \le n$، $|H| x_i \in Ay_1 + \dots + Ay_i$

برهان: به [14,2.2] مراجعه کنید.

۱ ـ ۴ لم:

فرض کنید U یک زیر مجموعه مثلثی از A^n بوده و $(y_1, \dots, y_n)$ و $(x_1, \dots, x_n)$ عناصری از U باشند. همچنین فرض کنید $H, K \in D_n(A)$ چنان باشند که

$$H[x_1, \dots, x_n]^T = [y_1, \dots, y_n]^T = K[x_1, \dots, x_n]^T$$

در این صورت

$$|DH| - |DK| \in Ay_1^2 + \dots + Ay_{n-1}^2$$

که در آن $D = \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_n)$.

برهان: به [14,2.3] رجوع کنید.

فرض کنید که M یک A ـ مدول بوده و U یک زیر مجموعه مثلثی از A^n باشد. رابطهٔ $\sim$ را در مجموعهٔ $M \times U = \{(a,x) \mid a \in M, x \in U\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

بازاء هر $x,y \in U$ و هر $a,b \in M$ می‌نویسیم $(a,x) \sim (b,y)$ هرگاه $z = (z_1,\dots,z_n) \in U$ و $H, K \in D_n(A)$ موجود باشند به طوری که

$$Hx^T = z^T = Ky^T \qquad \text{و} \qquad |H|a - |K|b \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} Az_i\right)M$$

۱ ـ ۵ حکم:

رابطهٔ $\sim$ تعریف شده در بالا یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

برهان: به [14,2.4] رجوع کنید.

بدین ترتیب رابطهٔ $\sim$، $M \times U$ را به دسته‌های هم‌ارز افراز می‌کند. مجموعهٔ تمام دسته‌های هم‌ارزی را با علامت $U^{-n}M$ نشان می‌دهیم. دسته هم‌ارزی مربوط به $(a,x) = (a, (x_1,\dots,x_n))$ را با علامت $\frac{a}{(x_1,\dots,x_n)}$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$U^{-n}M = \left\{\frac{a}{(x_1,\dots,x_n)} \;\middle|\; a \in M, (x_1,\dots,x_n) \in U\right\}$$

اینک می‌خواهیم با تعریف عمل جمع مناسبی $U^{-n}M$ را به یک گروه آبلی تبدیل کنیم. ابتدا دو لم زیر را می‌آوریم و سپس با بکارگیری این دو لم عمل جمع را روی $U^{-n}M$ تعریف خواهیم کرد.

۱ ـ ۶ لم:

فرض کنید M یک A ـ مدول بوده و U یک زیر مجموعه مثلثی از A^n باشد. همچنین فرض کنید $a,b \in M$ و $(v_1,\dots,v_n)$ و $(u_1,\dots,u_n)$ و $(t_1,\dots,t_n)$ و $(s_1,\dots,s_n)$ عناصری از U و $Q \in D_n(A)$ و P و K و H چنان باشند که

$$H\,[s_1,\ldots,s_n]^T = [u_1,\ldots,u_n]^T = K\,[t_1,\ldots,t_n]^T$$

و

$$P\,[s_1,\ldots,s_n]^T = [v_1,\ldots,v_n]^T = Q\,[t_1,\ldots,t_n]^T$$

در این صورت در $U^{-n}M$ داریم:

$$\frac{|H|a + |K|b}{(u_1,\ldots,u_n)} = \frac{|P|a + |Q|b}{(v_1,\ldots,v_n)}$$

برهان: به [14,2.6] مراجعه شود.

۱ـ۷ لم:

فرض کنید M یک A ـ مدول بوده و U یک زیر مجموعه مثلثی از A^n باشد. همچنین فرض کنید که $a, b, a', b' \in M$ و $(s_1,\ldots,s_n), (s'_1,\ldots,s'_n), (t_1,\ldots,t_n), (t'_1,\ldots,t'_n) \in U$ چنان باشند که در $U^{-n}M$ داشته باشیم

$$\frac{a}{(s_1,\ldots,s_n)} = \frac{a'}{(s'_1,\ldots,s'_n)}, \quad \frac{b}{(t_1,\ldots,t_n)} = \frac{b'}{(t'_1,\ldots,t'_n)}$$

اگر $(u_1,\ldots,u_n), (u'_1,\ldots,u'_n) \in U$ و $H, K, H', K' \in D_n(A)$ چنان باشند که

$$H\,[s_1,\ldots,s_n]^T = [u_1,\ldots,u_n]^T = K\,[t_1,\ldots,t_n]^T$$

و

$$H'\,[s'_1,\ldots,s'_n]^T = [u'_1,\ldots,u'_n]^T = K'\,[t'_1,\ldots,t'_n]^T$$

آنگاه در $U^{-n}M$ خواهیم داشت:

$$\frac{|H|a + |K|b}{(u_1,\ldots,u_n)} = \frac{|H'|a' + |K'|b'}{(u'_1,\ldots,u'_n)}$$

برهان: به [14,2.7] رجوع کنید.

۱ـ۸ حکم:

فرض کنید M یک Aـ مدول بوده و U یک زیر مجموعه مثلثی از A^n باشند. بازاء هر