بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد
گروه علوم ریاضی
دانشکده ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض

عنوان

بعد متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما
دکتر کاظم خشیارمنش
استاد مشاور
دکتر مژگان افخمی گلی
نگارنده
مهدی حسین پور مقدمی

تابستان ۹۱

بسمه تعالی
مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان
دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: بعد متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

نام نویسنده: مهدی حسین پورمقدمی
استاد راهنما: دکتر کاظم خشیارمنش
استاد مشاور: دکتر مژگان افخمی گلی

دانشکده: علوم ریاضی   گروه: دانشکده ریاضی   رشته تحصیلی: ریاضی محض

تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۰۳/۰۸   تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۰۶/۱۹

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   تعداد صفحات: ۹۲

چکیده پایان‌نامه : فرض کنید R حلقه جابه‌جایی و نوتری و M یک R-مدول متناهی باشد. همچنین فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد که توسط عناصر $x_1, \cdots, x_n$ تولید می‌شود. می‌دانیم مدول‌های کوهمولوژی موضعی در حالت کلی با تولید متناهی نیستند. فرض کنید t کوچکترین اندیسی باشد که $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ با تولید متناهی نیست. آنرا بعد متناهی بودن مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به $\mathfrak{a}$ گوییم. هدف پایان‌نامه این است که ایستایی برخی از مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به برخی مدول‌ها را در نقطه‌ی t بررسی کنیم. به این مفهوم که ما نشان می‌دهیم اگر $x_1, \cdots, x_n$ دنباله منظم $\mathfrak{a}$-صافی باشد و $n \leq t$ آنگاه مجموعه‌ی $\bigcup_{r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{N}} Ass\left(\frac{M}{(x_1^{r_1}, \cdots, x_n^{r_n})M}\right)$ ایستاست.

واژگان کلیدی: کوهمولوژی موضعی-بعد متناهی بودن-دنباله منظم صافی

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : بعد متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

اینجانب مهدی حسین پورمقدمی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر کاظم خشیارمنش متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی مشهد'' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

تقدیم به کسی که با من گریه کرد، با من خندید،

برای من گریه کرد و برای من خندید...

تقدیم به

مادرم

سپاس گزاری...

از زحمات و راهنمایی‌های استاد بزرگوارم جناب آقای پروفسور کاظم خشیارمنش که همواره مشوق و الگوی علمی و اخلاقی من بوده‌اند، کمال سپاس و قدردانی را دارم.

مهدی حسین پورمقدمی
تابستان ۹۱

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل حلقه جابه‌جایی و نوتری R باشد، هم‌چنین M یک R-مدول متناهی‌مولد غیر صفر باشد. مفهوم کوهمولوژی موضعی نخستین بار توسط گروتندیک[1] ارائه شد و مورد مطالعه قرار گرفت. i-امین کوهمولوژی موضعی M نسبت به $\mathfrak{a}$ را با نماد $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ نمایش می‌دهیم. این مدول‌ها ضرورتا با تولید متناهی نیستند، بنابراین تعیین کردن مقادیری از i که در آن $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ با تولید متناهی باشد، از اهمیت به سزایی برخوردار است. در [۴] هیونیکه[2] حدس زیر را مطرح کرد: «تعداد ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول کوهمولوژی موضعی $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$، همیشه متناهی است.» این حدس در حالتی که M برابر حلقه منظم R باشد مورد توجه زیادی قرار گرفته است (به [۵]، [۱۰] و [۲۱] مراجعه شود). البته سینگ[3] در [۱۹] مثال نقضی برای این حدس را ارائه کرد ولی با این حال در بسیاری موارد حدس برقرار است. فرض کنیم $t \in \mathbb{N}$، در این صورت اگر برای هر $i > t$، مدول $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ متناهی‌مولد باشد یا اگر برای هر $i > t$، $\operatorname{Supp}(H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی باشد، آن‌گاه $\operatorname{Ass}(H^t_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی است ([۸] و [۱۶]). پس همان طور که در بالا ذکر شد، اگر t کوچکترین عدد صحیحی باشد که $H^t_{\mathfrak{a}}(M)$ متناهی‌مولد نیست، در این صورت $\operatorname{Ass}(H^t_{\mathfrak{a}}(M))$ متناهی است. این کوچکترین عدد را با $f_{\mathfrak{a}}(M)$ نشان داده و آن را بعد متناهی بودن M نسبت به $\mathfrak{a}$ می‌نامند (فصل ۹ [۲]).

هدف این پایان‌نامه آن است که نشان دهد بعد متناهی بودن نتایج چشمگیری را برای متناهی بودن مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته فراهم کند به این مفهوم که اگر فرض کنیم $x_1, \cdots, x_t$ دنباله منظم $\mathfrak{a}$-صافی از M با شرط $t \leq f_{\mathfrak{a}}(M)$ باشد، به عبارت دیگر برای هر $1 \leq i \leq t$ داشته باشیم

$$\operatorname{Supp}\left(\frac{(x_1, \cdots, x_{i-1})M : x_i}{(x_1, \cdots, x_{i-1})M}\right) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

که $V(\mathfrak{a})$ مجموعه ایده‌آل‌های اول شامل $\mathfrak{a}$ است، در این صورت مجموعه زیر متناهی است،

$$\bigcup_{n_1, \cdots, n_t \in \mathbb{N}} \operatorname{Ass}\left(\frac{M}{(x_1^{n_1}, \cdots, x_t^{n_t})M}\right).$$

[1] A. Grothendieck [2] C. Huneke [3] A.K. Singh

چکیده

فرض کنید R حلقه جابه‌جایی و نوتری و M یک R−مدول متناهی باشد. همچنین فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد که توسط عناصر $x_1, \cdots, x_n$ تولید می‌شود. می‌دانیم مدول‌های کوهمولوژی موضعی در حالت کلی با تولید متناهی نیستند. فرض کنید t کوچکترین اندیسی باشد که $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ با تولید متناهی نیست. آنرا بعد متناهی بودن مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به $\mathfrak{a}$ گوییم. هدف پایان‌نامه این است که ایستایی برخی از مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به برخی مدول‌ها را در نقطه‌ی t بررسی کنیم. به این مفهوم که ما نشان می‌دهیم اگر $x_1, \cdots, x_n$ دنباله منظم $\mathfrak{a}$−صافی باشد و $n \leq t$ آنگاه مجموعه‌ی $\bigcup_{r_1,\cdots,r_n\in\mathbb{N}} Ass\left(\frac{M}{(x_1^{r_1},\cdots,x_n^{r_n})M}\right)$ ایستاست.

فصل ۱

پیش‌نیازها و مقدمات

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی که در این پایان‌نامه مورد نیاز است، می‌پردازیم و ارائه تعاریف و قضایای که مستلزم بیان مفاهیمی از کوهمولوژی موضعی است را به ابتدای هر فصل، موکول می‌کنیم در ضمن چون عمده مطالب این فصل از کتب مرجع انتخاب شده لذا سعی بر رعایت حداکثر یکدستی در نمادها و علائم در کتب گوناگون بوده است و در جاهای که علائم مراجع متنوع شده، اولویت را به علائم مصطلح دهه‌ی اخیر داده‌ایم. در این پایان‌نامه اعداد صحیح مثبت را با $\mathbb{N}$ و اعداد صحیح نامنفی را با $\mathbb{N}_0$ نشان می‌دهیم.

مطالب این فصل از [۲] و [۱۸] و [۲۰] و [۱۴] و [۲۲] و [۱۱] گردآوری شده است.

۱.۱ رسته و تابعگون

در این بخش R حلقه‌ی دلخواه است. همچنین وقتی راست یا چپ بودن R-مدول تفاوتی نداشته باشد فقط کلمه R-مدول را ذکر می‌کنیم. مطالب عمده این بخش از [۱۸] گردآوری شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱. *رسته*[1] $\mathcal{C}$ *رده‌ای از اشیا است که با* $obj(\mathcal{C})$ *نشان می‌دهیم به‌طوری که در خواص زیر صدق کند.*

---

[1] Category

۱. به‌ازای هر $A, B \in obj(\mathcal{C})$، مجموعه‌ای متناظر شود که با $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ نشان داده می‌شود و به‌ازای هر $A, B, C, D \in obj(\mathcal{C})$ که $(A, B) \neq (C, D)$ داشته باشیم

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$$

اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ آنگاه می‌نویسیم $f : A \longrightarrow B$ و f را یک ریخت $\mathcal{C}$ از A به B می‌نامیم.

۲. به‌ازای هر $A, B, C \in obj(\mathcal{C})$ تابع

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) : A \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$
$$(g, f) \longmapsto gof$$

موجود باشد به‌طوری که

(آ) به‌ازای هر $A, B, C, D \in obj(\mathcal{C})$، اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$، $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ و $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$، آنگاه $h(gf) = (hg)f$.

(ب) به‌ازای هر $A \in obj(\mathcal{C})$، $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ موجود باشد که به‌ازای هر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ و هر $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$، $1_A g = g$ و $f 1_A = f$.

برای سهولت در نگارش، رسته را در حالت کلی با $\mathcal{C}$ و رسته‌ی R-مدول‌های چپ و همریختی‌هایش را با ${}_R Mod$ و رسته‌ی R-مدول‌های راست و همریختی‌هایش را با Mod_R و رسته‌ی R-مدول‌ها و همریختی‌هایش (یعنی زمانیکه R جابه‌جایی باشد) از نماد $\mathcal{C}(R)$ استفاده می‌کنیم. همچنین نماد Ab را برای رسته‌ی گروه‌های آبلی و هم‌ریختی‌هایش به کار خواهیم برد.

تعریف ۲.۱.۱. *در رسته $\mathcal{C}$، ریخت $f : A \longrightarrow B$ را هم‌ارزی[1] نامیم هرگاه ریخت $g : B \longrightarrow A$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد به‌طوری که $gf = 1_A$ و $fg = 1_B$. همچنین اگر $f : A \longrightarrow B$ هم‌ارزی باشد آنگاه A, B را هم‌ارز[2] گوییم.*

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$، دو رسته باشند. تابعگون هموردا[3] از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع شی که به هر $A \in obj(\mathcal{C})$، شی $F(A) \in obj(\mathcal{C})$ را نسبت می‌دهد و دیگری تابع ریخت که آن*

[1]Equivalence [2]Equivalent [3]Covariant

هم با F نشان داده می‌شود و به هر ریخت $f : A \longrightarrow B$ در $\mathcal{C}$، ریخت $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ در $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد، با این خاصیت که

۱. به‌ازای هر شی $A \in obj(\mathcal{C})$، $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

۲. اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ و $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$، آنگاه $F(gf) = F(g)F(f)$.

مثال ۴.۱.۱. ۱. تابعگون همانی $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ که هر شی و هر ریخت از رسته $\mathcal{C}$ را به خودشان نسبت می‌دهد همورد است.

۲. فرض کنید M یک R-مدول چپ باشد. تابع $F : {}_R Mod \longrightarrow Ab$ را به‌صورت $F(N) = Hom_R(M, N)$ تعریف می‌کنیم و برای هر $f \in Hom(K, N)$، تابع $F(f) : Hom(M, K) \longrightarrow Hom(M, N)$ را به‌ازای هر $h \in Hom(M, K)$ به‌صورت $F(f)(h) = fh$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت F تابعگون همورد است که با $Hom_R(M, -)$ نشان داده می‌شود.

۳. فرض کنید M یک R-مدول راست باشد. تابع $F : Mod_R \longrightarrow Ab$ را به‌صورت $F(N) = M \otimes_R N$ تعریف می‌کنیم و برای $f \in Hom(K, N)$، تابع $F(f) : M \otimes_R K \longrightarrow M \otimes_R N$ را با ضابطه $F(f)(x \otimes y) = x \otimes f(y)$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت F تابعگون همورد است که با $M \underset{R}{\otimes} -$ نشان داده می‌شود. به روش مشابه برای R-مدول چپ L می‌توان تابعگون همورد $- \underset{R}{\otimes} L$ را تعریف کرد.

تعریف ۵.۱.۱. مطابق تعریف ۳.۱.۱، همچنین می‌توان تعریف تابعگون پادورد[۱] F از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ را ارائه کرد. با این تفاوت که شرط (ب) را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.
ب) اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ و $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ آنگاه $F(gf) = F(f)F(g)$.

مثال ۶.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول چپ باشد. تابع $F : {}_R Mod \longrightarrow Ab$ را به صورت $F(N) = Hom_R(N, M)$ تعریف می‌کنیم و برای $f \in Hom(K, N)$، تابع $F(f) : Hom_R(N, M) \longrightarrow Hom_R(K, M)$ را به‌ازای هر $h \in Hom_R(N, M)$ با ضابطه $F(f)(h) = hf$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت F تابعگونی پادورد است که با $Hom_R(-, M)$ نشان داده می‌شود.

[۱] Contravariant

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنید $\mathcal{C}$، $\mathcal{D}$ و $\mathcal{U}$ سه رسته باشند. دو تابعگون (یا تابعگون دو متغیره پادورد نسبت به مولفه اول و همورد نسبت به مولفه دوم) $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{U}$، زوجی متشکل از دو تابع است. یک تابع شی‌که به هر $(C, D) \in obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$، $F(C, D) \in obj(\mathcal{U})$ را نسبت می‌دهد و دیگری تابع ریخت‌که آن را هم با F نشان می‌دهیم و به هر ریخت $(f, g) : (C, D) \longrightarrow (C', D')$ از $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$، ریخت $F(f, g) : F(C', D) \longrightarrow F(C, D')$ از $\mathcal{U}$ را نسبت می‌دهد با این خاصیت‌که*

۱. *به‌ازای هر $(C, D) \in obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$، $F(۱_C, ۱_D) = ۱_{F(C,D)}$.*

۲. *به‌ازای هر دو ریخت $(f, f') : (C, D) \longrightarrow (C', D')$ و $(g, g') : (C', D') \longrightarrow (C'', D'')$ از $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$، $F((g, g')(f, f')) = F(f, g')F(g, f')$.*

۳. *به‌ازای هر جفت از ریخت‌های $\mu : A' \longrightarrow A$ و $\lambda : D' \longrightarrow D$ در $\mathcal{D}$، نمودار جابه‌جایی زیر موجود باشد.*

$$\begin{tikzcd}
F(A', D') \arrow[r] \arrow[d] & T(A', D) \arrow[d] \\
T(A, D') \arrow[r] & T(A, D)
\end{tikzcd}$$

مثال ۸.۱.۱. $Hom_R(-, -) : {}_RMod \times Mod_R \longrightarrow Ab$ *تابعگون دومتغیره پادورد نسبت به مولفه‌ی اول و همورد نسبت به مولفه‌ی دوم است.*

تعریف ۹.۱.۱. *فرض‌کنید F و G دو تابعگون همورد (پادورد) از رسته $\mathcal{C}$ به رسته $\mathcal{D}$ باشند. در اینصورت تبدیل طبیعی[۱] $\sigma : F \longrightarrow G$، تابعی است‌که هر $A \in obj(\mathcal{C})$، ریخت $\sigma(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ از*

[۱] Natural transformation

$\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد با این ویژگی‌که به‌ازای هر ریخت $f : A \longrightarrow B$ از $\mathcal{C}$ نمودار

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\sigma(A)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\sigma(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

$$\left(\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\sigma(B)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(B) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A) \arrow[r, "\sigma(A)"] & G(A) \end{tikzcd}\right)$$

از $\mathcal{D}$ تعویض‌پذیر باشد یعنی $(G(F)\sigma(B) = \sigma(B)F(f))G(F)\sigma(B) = \sigma(B)F(f)$ همچنین اگر به‌ازای هر $A \in obj(\mathcal{C})$، $\sigma(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ تابعی دوسویی باشد، آنگاه تبدیل طبیعی σ را یکریختی طبیعی با هم‌ارزی از F به G می‌نامیم و F و G را هم‌ارز طبیعی[1] گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. رسته $\mathcal{C}$ را پیش‌جمعی[2] گویند هرگاه برای هر دو $A, B \in obj(\mathcal{C})$، $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ گروه آبلی (جمعی) باشد به‌طوری که اگر $A, B, C \in obj(\mathcal{C})$ و $g, g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ و $f, f_1, f_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ آنگاه

آ) $g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2$

ب) $(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f$

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ در رسته پیش‌جمعی باشند. در اینصورت تابعگون $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را جمعی‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ داشته باشیم $F(f + g) = F(f) + F(g)$.

مثال ۱۲.۱.۱. آ) فرض کنید M یک R_S مدول باشد. در اینصورت تابعگون $Hom_R(M, -) : {}_RMod \longrightarrow {}_SMod$ تعریف شده است و نیز یک تابعگون جمعی همورد است.

[1] Natural equivalent [2] Pre-additive

همچنین $Hom_R(-,M):Mod_R\longrightarrow Mod_S$ تعریف شده است و نیز یک تابعگون جمعی پادورد است.

ب) $M\otimes_S -$ و $-\otimes_R M$ تابعگون‌های جمعی همورد هستند.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید F تابعگون همورد از رسته مدول‌ها به خودش باشد. F را تابعگون دقیق چپ[۱] (تابعگون دقیق راست[۲]) گوییم هرگاه به‌ازای هر دنباله دقیق کوتاه از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها مانند $0\longrightarrow L\xrightarrow{\varphi}M\xrightarrow{\psi}N\longrightarrow 0$، دنباله $0\longrightarrow F(L)\xrightarrow{F(\varphi)}F(M)\xrightarrow{F(\psi)}F(N)$ ($F(L)\xrightarrow{F(\varphi)}F(M)\xrightarrow{F(\psi)}F(N)\longrightarrow 0$) دقیق باشد.

مثال ۱.۱.۱۴. تابعگون همورد $Hom_R(M,-)$ دقیق چپ و تابعگون‌های $-\underset{R}{\otimes}M$ و $N\otimes_R -$ دقیق راست هستند.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید F تابعگون پادورد از رسته مدول‌ها باشد. F را تابعگون دقیق چپ (تابعگون دقیق راست) نامیم هرگاه به‌ازای هر دنباله دقیق کوتاه $0\longrightarrow M\xrightarrow{\varphi}N\xrightarrow{\psi}K\longrightarrow 0$، از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها دنباله $0\longrightarrow F(K)\xrightarrow{F(\psi)}F(N)\xrightarrow{F(\varphi)}F(M)$ ($F(K)\xrightarrow{F(\psi)}F(N)\xrightarrow{F(\varphi)}F(M)\longrightarrow 0$) دقیق باشد.

مثال ۱.۱.۱۶. تابعگون پاورد $Hom(-,N)$ دقیق چپ است.

تعریف ۱.۱.۱۷. تابعگون همورد (پادورد) F را دقیق نامیم هرگاه هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد.

۲.۱ مدول‌های انژکتیو، تصویری

در این بخش R حلقه‌ی جابه‌جایی است.

اکثر مطالب این بخش از [۱۸] گردآوری شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. R-مدول E را انژکتیو[۳] گوییم اگر به‌ازای هر نمودار

[۱] Left exact [۲] Right exact [۳] Injective

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ & E & \end{tikzcd}$$

از R-مدول‌ها و همریختی‌های R-مدولی که سطر آن دقیق است R-همریختی‌ای مانند $h : N \longrightarrow E$ موجود باشد که نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی باشد، یعنی $hg = f$.

قضیه ۲.۲.۱. *شرایط زیر برای R-مدول E، هم‌ارزند.*

آ) E انژکتیو است.

ب) $Hom_R(-, E)$ دقیق است.

ج) هر دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

شکافته می‌شود، یعنی همریختی R-مدولی $h : M \longrightarrow E$ وجود دارد که $hf = 1_E$.

د) E جمعوند مستقیم هر مدول M است که زیر مدولی از آن باشد به عبارت دیگر E جمعوند هر توسیع خودش است.

ه) (محک بئر) به‌ازای نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & R \\ & E & \end{tikzcd}$$

از R-مدول‌ها و همریختی‌های R-مدولی که سطر آن دقیق و نیز $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه R و h نگاشت شمول است، R-همریختی مانند $f : R \longrightarrow E$ موجود باشد که نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[dl, "f"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر شود، یعنی $fh = g$.

برهان. به [۱۸] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۲.۱. هر R-مدول را می‌توان در یک R-مدول انژکتیو نشاند (یعنی برای هر R-مدول دلخواه M، R-مدول انژکتیو E و نگاشت یک به یک φ وجود دارد که $M \overset{\varphi}{\hookrightarrow} E$)

برهان. به [۱۸] مراجعه شود. □

تعریف ۴.۲.۱. R-مدول P را تصویری[1] نامیم اگر به‌ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از R-مدول‌ها و R-همریختی‌های مدولی که سطر آن دقیق است، R-همریختی $h : P \longrightarrow L$

[1] Projective

موجود باشد به‌طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی شود. یعنی $f = gh$.

نمادگذاری ۵.۲.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در اینصورت دنباله*

$$\cdots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \cdots$$

از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها را با ξ نشان می‌دهیم. همچنین دنباله‌ی القا شده‌ی

$$\cdots \longrightarrow N' \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow N'' \otimes_R M \longrightarrow \cdots$$

را با $\xi \otimes_R M$ نشان می‌دهیم.

۳.۱ حد مستقیم و معکوس

در این بخش R حلقه‌ای دلخواه است.
مراجع اصلی مطالب این بخش [۲۰] و [۱۴] و [۲۲] می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱. *مجموعه ناتهی X، همراه با رابطه $\preceq$ را که بازتابی و متعدی باشد شبه مرتب[۱] می‌نامیم.*

ملاحظه ۲.۳.۱. *فرض کنید I مجموعه‌ای شبه مرتب باشد. در اینصورت می‌توانیم I را به‌عنوان رسته‌ی $\mathcal{C}$ در نظر بگیریم که $obj(\mathcal{C}) = I$ و*

$$Hom(x,y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x \preceq y \\ \emptyset, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

[۱] Quasi order

و تابع ترکیب، هرگاه $x \preceq y \preceq z$ به‌صورت $i_z^y.i_y^x = i_z^x$ است.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید I مجموعه‌ای شبه مرتب و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. یک دستگاه مستقیم[۱] در $\mathcal{C}$، همراه با مجموعه اندیس‌گذار I، تابعگون $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$ است. از این رو به‌ازای هر $i \in I$، شی $F_i \in obj(\mathcal{C})$ موجود است و هرگاه $i, j \in I$ و $i \preceq j$ ریخت $\varphi_j^i : F_i \longrightarrow F_j$ وجود دارد با این خاصیت که

آ) به‌ازای هر $i \in I$، $\varphi_i^i : F_i \longrightarrow F_i$ ریخت همانی روی F_i است.

ب) برای هر $i, j, k \in I$، اگر $i \preceq j \preceq k$ آنگاه نمودار

$$\begin{tikzcd} & F_i \arrow[dl, "\varphi_i^k"'] \arrow[d, "\varphi_i^j"] \\ F_k & F_j \arrow[l, "\varphi_k^j"'] \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی است. یعنی $\varphi_k^j \varphi_j^i = \varphi_k^i$.

برای سهولت در نگارش دستگاه مستقیم را به‌صورت $F = \{F_i, \varphi_j^i\}_{\substack{i,j \in I \\ i \preceq j}}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴.۳.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. در اینصورت خانواده‌ی تمام زیرمدول‌های متناهی مولد از M همراه با نگاشت‌های شمول ممکن، دستگاه مستقیم روی خودش است.

تعریف ۵.۳.۱. فرض‌کنید $F = \{F_i, \varphi_j^i\}_{\substack{i,j \in I \\ i \preceq j}}$ دستگاهی مستقیم در $\mathcal{C}$ باشد. در اینصورت حد مستقیم[۲] این دستگاه که با $\varinjlim_{i \in I} F_i$ (و اگر ابهامی روی مجموعه اندیس‌گذار نباشد می‌نویسیم $\varinjlim F_i$) نشان داده می‌شود شیء‌ای است همراه با خانواده‌ای از ریخت‌های $\varphi_i : F_i \longrightarrow \varinjlim F_i$ (با این ویژگی که برای هر $i, j \in I$ که $i \preceq j$ داشته باشیم $\varphi_i = \varphi_j \varphi_j^i$) که برای هر شی X و هر خانواده از ریخت‌های β_i (با این ویژگی که برای هر $i, j \in I$ که $i \preceq j$ داشته باشیم $\beta_i = \beta_j \varphi_j^i$) ریخت منحصربفرد $\psi : \varinjlim F_i \longrightarrow X$ وجود دارد به‌طوریکه برای هر $i \in I$ داریم $\psi \varphi_i = \beta_i$.

قضیه ۶.۳.۱. اگر R حلقه جابه‌جایی باشد آن‌گاه حد مستقیم در رسته R-مدول‌ها و R-هم‌ریختی‌ها موجود است.

---
[۱] Direct system [۲] Direct limit