بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **انور قیطولی** رشته آمار تحت عنوان: «**روش‌های بوت استرپ در مدل‌های رگرسیون چند سطحی**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدابراهیم حسینی‌نسب	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر موسی گل‌علی‌زاده	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر مجید جعفری‌خالدی	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر احمد خدادادی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مجید جعفری‌خالدی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته آمار است که در سال ۱۳۸۹ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **سید محمد ابراهیم حسینی نسب** و مشاوره جناب آقای دکتر **موسی گل علیزاده** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

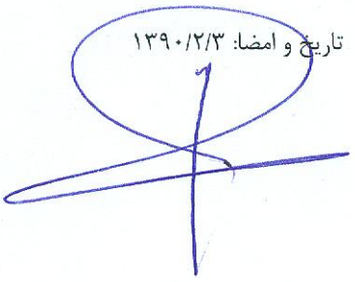
ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **انور قیطولی** دانشجوی رشته **آمار** مقطع **کارشناسی ارشد**

تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **انور قیطولی**

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۲/۳



آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **انور قیطولی** دانشجوی رشته **آمار** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۷** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۱۳۹۰/۲/۳

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد آمار

روش های بوت استرپ در مدل‌های رگرسیون چندسطحی

توسط

انور قیطولی

استاد راهنما

دکتر سید محمد ابراهیم حسینی نسب

استاد مشاور

دکتر موسی گل علیزاده

اسفند ۱۳۸۹

کلیه حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه برای دانشگاه تربیت مدرس محفوظ است. نقل مطالب باذکر ماخذ بلامانع است.

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه‌ی زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گسترده‌ی دانش اساتیدم را روزی‌ام گردانید.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف، ارزشمند و بی‌شائبه‌ی استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقای دکتر سید محمدابراهیم حسینی‌نسب را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وامی‌داشتند. همچنین از دکتر موسی گل‌علیزاده که مشاوره این تحقیق را تقبل نمودند کمال تشکر را دارم.

از خانواده عزیزم که همواره مشوق و حامی من در امر تحصیل بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

انور قیطولی

اسفند ۱۳۸۹

روش های بوت استرپ در مدل‌های رگرسیون چندسطحی

چکیده

بسیاری از داده‌هایی که در زمینه‌های علوم اجتماعی، علوم پزشکی، علوم انسانی، علوم زیستی و ... جمع آوری می‌شوند دارای ساختار سلسله مراتبی هستند. برای تحلیل چنین داده‌هایی که در آن گروهها تصادفی و ساختار داده‌ها به صورت سلسله مراتبی است از مدلهای چندسطحی استفاده می‌شود. بدلیل اهمیت برآوردهای مولفه‌های واریانس در مدل چندسطحی چندین روش برای برآورد آنها پیشنهاد شده است که روش ماکسیمم درستنمایی کامل و مقیّد از آن جمله‌اند. در بسیاری از موارد که در آنها فرض مربوط به نرمال بودن خطاها برقرار نیست، استفاده از روش‌های بوت‌استرپ برای برآورد پارامترها مفید است. این روش‌هابه دو قسمت پارامتری و ناپارامتری تقسیم می‌شوند و از آنها برای برآورد پارامترهای ثابت و مولفه‌های واریانس در مدل‌های چندسطحی استفاده می‌شود. روش بوت‌استرپ پارامتری و ناپارامتری برای پارامترهای ثابت برآوردهای تقریبا یکسانی می‌دهند. اما روش بوت‌استرپ ناپارامتری نسبت به پارامتری برآوردهایی با خطای پوشش کمتری از مولفه‌های واریانس نتیجه می‌دهد. با این حال، روش بوت‌استرپ ناپارامتری پراکندگی داده‌ها در نمونه‌های کوچک که در آنها تعداد گروهها و افراد کوچک است را کم برآورد می‌کند. برای حل این کم برآوردی، روشی که تعمیمی از روش بوت‌استرپ ناپارامتری است و بوت‌استرپ ناپارامتری تعدیل یافته نامیده می‌شود معرفی شده است. این روش، مولفه‌های واریانس را با خطای پوشش کمتری نسبت به روش‌های بوت‌استرپ پارامتری و ناپارامتری نتیجه می‌دهد.

سپس با استفاده از شبیه سازی، عملکرد سه روش بوت‌استرپ پارامتری، ناپارامتری و ناپارامتری تعدیل یافته در مدل‌های رگرسیون چندسطحی برای حجم‌های نمونه‌ی مختلف ارزیابی شده است. در پایان داده‌های مربوط به میزان برداشت گندم در سال ۱۳۸۷ که از ۸ استان مختلف جمع‌آوری شده‌اند تحلیل شده و نتایج گزارش شده است.

واژه‌های کلیدی : مدل چندسطحی، ماکسیمم درستنمایی کامل، ماکسیمم درستنمایی مقیّد، فاصله اطمینان بوت‌استرپی، فاصله اطمینان صدکی.

فهرست مندرجات

۱ مقدمه ۱

۲ مدل دوسطحی خطی و برآورد پارامترهای آن ۷

۱.۲ مقدمه ۷

۲.۲ مدل دوسطحی خطی ۸

۱.۲.۲ مفروضات مدل ۱۰

۲.۲.۲ برآورد پارامترهای مدل دو سطحی خطی ۱۱

۳.۲.۲ برآورد اثرهای ثابت و پیش بینی اثرهای تصادفی ۱۶

۴.۲.۲ برآورد مولفه‌های واریانس ۲۰

۵.۲.۲ انتخاب مدل ۲۸

۳ روش بوت‌استرپ برای مدل‌های چندسطحی ۳۰

۱.۳ مقدمه ۳۰

۱.۱.۳ قاعده‌ی اصلی بوت‌استرپ ۳۳

۲.۱.۳ بوت‌استرپ پارامتری و ناپارامتری ۳۴

۳.۱.۳ کاهش اریبی در بوت‌استرپ ۳۶

۴.۱.۳ فاصله اطمینان بوت‌استرپی ۳۹

۲.۳ مدل دوسطحی و برآورد ML پارامترهای آن ۴۴

۳.۳ روش‌های بوت‌استرپ برای مدل‌های دو سطحی ۴۶

۱.۳.۳ بوت‌استرپ پارامتری برای مانده‌ها ۴۷

۲.۳.۳ بوت‌استرپ ناپارامتری برای مانده‌ها ۴۸

۳.۳.۳ بوت‌استرپ زوجی ۵۰

۴.۳.۳ بوت استرپ پارامتری برای مدل های اثرات تصادفی دوسطحی با یک متغیر مستقل ۵۲

۵.۳.۳ بوت استرپ ناپارامتری برای مدل های اثرات تصادفی دوسطحی با یک متغیر مستقل ۵۴

۴ شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی ۶۱

۱.۴ مقدمه ۶۱
۱.۱.۴ مدل مورد استفاده در شبیه سازی ۶۲
۲.۴ تحلیل داده‌های واقعی ۶۹
۳.۴ نتیجه گیری ۷۸
پیوست ۸۴

لیست اشکال

۱.۲.۴ نمودار $q - q$ نرمال باقی‌مانده‌های استاندارد شده‌ی سطح ۱. . . . . ۷۱

۲.۲.۴ نمودار $q - q$ نرمال باقی‌مانده‌های استاندارد شده‌ی سطح ۲. . . . . ۷۱

۳.۲.۴ نمودار مقادیر برازش یافته در مقابل باقی‌مانده‌های استاندارد شده سطح ۱. . . ۷۲

۴.۲.۴ نمودار مقادیر برازش یافته در مقابل باقی‌مانده‌های استاندارد شده سطح ۲. . . ۷۲

لیست جداول

۱.۱.۴ احتمال‌های پوشش فواصل اطمینان بوت‌استرپی صدکی با دم‌های برابر وقتی که توزیع خطاهای سطح۱ و ۲ نرمال و احتمال پوشش اسمی $۰/۹ = \alpha - ۱$ است. ٦۴

۲.۱.۴ احتمال‌های پوشش فواصل اطمینان بوت‌استرپی صدکی با دم‌های برابر وقتی که توزیع خطاهای سطح۱ و ۲ خی دو و احتمال پوشش اسمی $۰/۹ = \alpha - ۱$ است. ٦٦

۳.۱.۴ احتمال‌های پوشش فواصل اطمینان بوت‌استرپی صدکی متقارن وقتی که توزیع خطاهای سطح۱ و ۲ خی دو و احتمال پوشش اسمی $۰/۹ = \alpha - ۱$ است. ٦۷

۴.۲.۴ برآورد پارامترهای ثابت با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی مقیّد. ۷۴

۵.۲.۴ برآورد ماتریس کواریانس واریانس اثرهای تصادفی با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی مقیّد. ۷۴

۶.۲.۴ برآورد پارامترهای ثابت، فواصل اطمینان صدکی متقارن و با دم‌های برابر در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از روش بوت‌استرپ پارامتری ۷۵

۷.۲.۴ برآورد مولفه‌های واریانس بین گروهی و درون گروهی، فواصل اطمینان صدکی متقارن و با دم‌های برابر در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از روش بوت‌استرپ پارامتری ۷۵

۸.۲.۴ برآورد پارامترهای ثابت، فواصل اطمینان صدکی متقارن و با دم‌های برابر در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از روش بوت‌استرپ ناپارامتری ۷۶

۹.۲.۴ برآورد مولفه‌های واریانس بین گروهی و درون گروهی، فواصل اطمینان صدکی متقارن و با دم‌های برابر در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از روش بوت‌استرپ ناپارامتری ۷۶

۱۰.۲.۴برآورد پارامترهای ثابت، فواصل اطمینان صدکی متقارن و با دم‌های برابر در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از روش بوت‌استرپ ناپارامتری تعدیل یافته ۷۷

۱۱.۲.۴برآورد مولفه‌های واریانس بین گروهی و درون گروهی، فواصل اطمینان صدکی متقارن و با دم‌های برابر در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از روش بوت‌استرپ ناپارامتری تعدیل یافته ۷۷

فصل ۱

مقدمه

معمولا بررسی آماری روابط بین متغیرهای مستقل و وابسته که ممکن است به صورت کمی یا کیفی باشند در قالب رگرسیون، تحلیل واریانس یا کواریانس صورت می‌گیرد. یکی از فرض‌های اساسی در کاربرد اینگونه مدل‌ها، استقلال آماری بین مشاهدات است. گاهی اوقات این فرض برای موضوع مورد مطالعه صادق نیست در نتیجه بکارگیری این مدل‌ها مناسب نمی‌باشد.

بسیاری از داده‌های جمع آوری شده در زمینه‌ی علوم انسانی، علوم اجتماعی، بیولوژی دارای ساختار سلسله مراتبی هستند. به عنوان مثالی از این نوع، می‌توان به ترکیب تعداد فرزندان در بین خانواده‌ها اشاره کرد که به صورت سلسله مراتبی است؛ بدین ترتیب که فرزندان در سطح ۱ و خانواده‌ها در سطح ۲ قرار می‌گیرند. درنتیجه چون بین اعضای هر خانواده همبستگی وجود دارد تحلیل داده‌ها بدون در نظر گرفتن این همبستگی به نتایج نادرست منجر می‌شود (هاکس، ۲۰۰۲). در این راستا اگر هدف، تعمیم نتایج تحلیل مربوط به خانواده‌های انتخابی به کل جامعه‌ی خانواده‌ها باشد، خانواده‌ها نیز به عنوان یک نمونه‌ی تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین نمی‌توان با مدل‌های سنتی همچون رگرسیون معمولی یا تحلیل واریانس که استفاده از آنها بر مبنای فرض استقلال مشاهدات استوار است،

این داده‌ها را تجزیه و تحلیل کرد (هاکس، ۲۰۰۲). اگر مشاهدات به هم وابسته با فرض استقلال تحلیل شوند، خطای استاندارد پارامترهای موجود در مدل کم برآورد می‌شوند (هاکس، ۲۰۰۲).

محققانی همچون آیتکن و لانگ فورد (۱۹۸٦)، گلدستین (۱۹۸٦) و رادون‌بوش و برک (۱۹۸٦)، روش‌های تجزیه وتحلیل داده‌هایی با ساختار سلسله مراتبی را توسعه داده‌اند. این روش‌ها برای حالتی که در آنها مشاهدات مستقل و به طور نرمال توزیع شده‌اند، استفاده می‌شوند. ماسون و همکاران (۱۹۸۳) و رادون‌بوش(۱۹۸۴) مدل‌های نظری مشابهی برای داده‌هایی با ساختار سلسله مراتبی ارائه دادند. نتایج مدل‌های درون و بین گروهی که توسط این افراد ارائه شده است مبتنی بر دو فرض استقلال و نرمال بودن مشاهدات بوده است.

بدلیل اینکه روش تحلیل داده‌ها متأثر از نحوه‌ی بدست آوردن نمونه است، بنابراین از یک فرآیند نمونه‌گیری که در آن واحدها در هر دو سطح به طور تصادفی انتخاب شده‌اند استفاده می‌کنیم. چون نتایج تحلیل داده‌ها به مولفه‌های تصادفی (مولفه‌های واریانس درون و بین گروهی) وابسته‌اند بنابراین این مدل را یک مدل مولفه واریانس می‌نامند. مدل‌های آمیخته (مدل دوسطحی) از دو قسمت تصادفی و ثابت تشکیل می‌شوند. گرچه برای برآورد مولفه‌های واریانس قسمت تصادفی مدل آمیخته روش‌هایی وجود دارد اما این روش‌ها دارای نواقصی هستند که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم. چون در اغلب تحقیقات، با یک طرح نامتعادل مواجه هستیم بنابراین استفاده از روش‌های برآورد مولفه‌های واریانس که فقط برای طرح‌های متعادل استفاده می‌شوند، مفید نمی‌باشند. علاوه بر آن برآورد مولفه‌های واریانس به کمک داده‌های نامتعادل نسبت به داده‌های متعادل مشکل‌تر است (سیرل، ۱۹۷۱). همچنین برآورد مولفه‌های واریانس اغلب مستلزم محاسبات پیچیده‌ای است. علاوه بر امکان بدست آوردن برآوردهای منفی برای مولفه‌های واریانس، مشکلی که بیشتر روش‌های برآورد مولفه‌های واریانس با آن روبرو هستند این است که این روش‌ها به فرض نرمال بودن خطای تصادفی

و اثرات تصادفی وابسته هستند. هر چند که روش‌هایی که به طور کلی این مشکلات را حل کند وجود ندارد اما روش‌هایی برای کاهش این مشکلات پیشنهاد شده است.

همان طور که قبلاً متذکر شدیم اغلب روش‌های موجود برای برآورد مولفه‌های واریانس در مدل آمیخته، بر مبنای این فرض که عبارت‌های خطا و اثرات تصادفی در مدل دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و یک ساختار واریانس کواریانس می‌باشند استوار است. با این حال، ممکن است که در برخی مواقع در تحقیقات عملی، عبارت‌های خطا و اثرات تصادفی در مدل نرمال نباشند.

رائو(۱۹۷۱) برآوردگر نااریب با مینیمم نرم توان دوم[۱] ($MINQUE$) را برای مولفه‌های واریانس پیشنهاد داد. در این روش به فرض نرمال بودن خطاها و اثرات تصادفی نیازی نیست و در آن یک تابع خطی از مولفه‌های واریانس با استفاده از یک تابع درجه دوم از مشاهدات برآورد می‌شود که این تابع درجه دوم تابعی از وزن‌های از قبل تعیین شده است. بنابراین برآوردهای $MINQUE$ به انتخاب وزن‌ها بستگی دارد. برای حل مشکل وابستگی برآوردهای $MINQUE$ به وزن‌ها، براون(۱۹۷۶) روشی پیشنهاد داد که در آن پس از محاسبه‌ی برآورد $MINQUE$، این مقادیر به عنوان وزن‌ها در نظر گرفته شده و دوباره برآوردهای $MINQUE$ بدست آورده می‌شوند. این فرآیند به طور مکرر تکرار می‌شود تا اینکه برآوردگرها در دو تکرار متوالی برابر شوند. این روش را $MINQUE$ مکرر یا $I-MINQUE$ نامند. می‌توان نشان داد که برآوردگرهای $I-MINQUE$ به طور مجانبی دارای توزیع نرمال هستند (براون، ۱۹۷۶). با این وجود سیرل (۱۹۷۹) نشان داد که این برآوردگرها فاقد ویژگی‌هایی همچون نااریبی، ناوردای انتقالی و مینیمم نرم که برآوردگرهای $MINQUE$ داشتند هستند. چون روش $MINQUE$ به ویژگی‌های توزیعی نرمال بستگی ندارد برای برآورد مولفه‌های واریانس، یک روش مفید می‌باشد.

[۱] Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimator

افرون (۱۹۷۹) روشی تحت عنوان بوت‌استرپ پیشنهاد داد که از آن می‌توان برای برآورد اندازه‌ی دقت و توزیع نمونه‌ای آماره‌ها بدون نیاز به هر گونه ویژگی توزیعی استفاده نمود. فرض کنید $\chi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ی مفروض باشد. از این نمونه، نمونه‌ای با جایگذاری به حجم n استخراج می‌کنیم. بازنمونه‌ی bام را $\chi^* = \{X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*\}$ و برآورد بوت‌استرپ بدست آمده از این بازنمونه را با $\hat{\theta}_b^*$ نشان می‌دهیم. در هر تکرار b، $b = 1, 2, ..., B$، برآوردگر $\hat{\theta}_b^*$ را بدست می‌آوریم. اگر F، تابع توزیع یک کمیت مجهول در جامعه باشد در این صورت تابع توزیع بوت‌استرپی $(\hat{F})$ تقریب خوبی برای تابع توزیع F می‌باشد(افرون، ۱۹۸۲). افرون (۱۹۸۲) نشان داد که روش بوت‌استرپ در بسیاری از مواقع برآوردهای قابل قبولی را نتیجه می‌دهد. جزئیات بیشتر در مورد روش‌های مختلف بوت‌استرپ در فصل ۳ آورده شده است.

برآورد مولفه‌های واریانس در تحلیل داده‌های چندسطحی مهم است. چون برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برای مولفه‌های واریانس دارای اریبی منفی هستند، بنابراین، روش‌های ماکسیمم درستنمایی مقیّد[۲] $(REML)$ به منظور حذف این اریبی منفی پیشنهاد داده شد (هیندرسون، ۱۹۵۰). این روش، هر چند که نتوانست این مشکل را به طور کامل حل کند، اما برآوردهای مولفه‌های واریانس حاصل از آن، دارای اریبی کمتری نسبت به برآوردهای حاصل از روش ماکسیمم درستنمایی هستند. بدست آوردن برآوردهای مولفه‌های واریانس از روش $REML$، بدلیل محاسبات زیاد و پیچیده برای بدست آوردن تابع درستنمایی و مشتق گیری از آن نسبت به پارامترها مشکل است. برای حل این مشکل، لاموت (۲۰۰۷) با استفاده از عملگرهای ماتریسی یک تابع درستنمایی جدید پیشنهاد داد که با تابع درستنمایی اولیه یکسان است. استفاده از روش بوت‌استرپ راه‌حل دیگری است که برای این مشکل پیشنهاد شده است. استفاده از این روش‌ها برای کنترل نامنفی بودن برآوردهای مولفه‌های

[۲] Restricted Maximum Likelihood