دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

تخمین خطا برای روش‌های خطی عمومی در فرم نردسیک

استاد راهنما

دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

علی شعرباف فروغی

مرداد ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به درگاه کبریا و عظمت پروردگار سپاس و ستایش می گذارم که ذات لایزالش ازلیست و ازلیت بی ابتدایش لایزال و جاویدان است.

دیده ی کوتاه بین ما یارای دیدارش ندارد و فکر کودک و کوچک ما از عهده ی تعریف و توصیفش بر نیاید.

جهان را به قدرت بی مانندش بیافرید و مشیت عطایش بنای خلقت فرو گذاشت. ابتداع کرد، اختراع کرد و در این ابتداع و اختراع به شرکت و مشورت کس نیازمند نبود.

نقش جهان را این چنین بدیع و دلارا بگذاشت و با اراده ی توانایش دستگاه خلقت را به آن سوی که خویشتن خواست به راه گماشت.

کائنات را با اراده ی خویشتن به سیر و سفر واداشت و هدف خلقت را محبت ذات اقدس خود قرار داد.

خداوندا! پیشوایان علم و اخلاق که بشر را به سوی فضیلت راهبری کنند، جز نور هدایت تو چراغی به پیش ندارند. بر محمد و آل محمد (ص) رحمت فرست و آن چراغ آسمانی را که رهنمای گمشدگان است فرا راه ما دار.

گزیده ای از «صحیفه سجادیه»

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای عزیزم، آقای دکتر غلامرضا حجتی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حسین خیری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی آن، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر مهرداد لکستانی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در کمال دقت این پایان‌نامه را مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند، سپاسگزارم.

همچنین از جناب آقای دکتر علی عبدی به خاطر کمک‌های بی‌دریغ ایشان در تمام مدت تدوین این پایان‌نامه کمال تشکر را دارم.

علی شعرباف فروغی
مرداد ۱۳۹۱

نام خانوادگی: شعرباف فروغی نام: علی

عنوان پایان‌نامه: تخمین خطا برای روش‌های خطی عمومی در فرم نردسیک

استاد راهنما: دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور: دکتر حسین خیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۸۷

کلیدواژه‌ها: معادلات دیفرانسیل معمولی، روش‌های خطی عمومی، روش‌های نردسیک، طول‌گام متغیر، خطای گسسته سازی موضعی، تخمین خطا.

چکیده: روش‌های خطی عمومی ($GLMs$)، توسط بوچر به منظور ترکیب چهارچوب روش‌های متعارف معرفی شد. خطای گسسته سازی موضعی روش‌های خطی عمومی به دنباله‌ی تمام نسبت طول‌گام‌ها بستگی دارد بنابراین به نظر می‌رسد به دست آوردن فرمولی دقیق برای تخمین خطای متناظر، عملی نباشد. در این پایان‌نامه ساختار روش‌های خطی عمومی در فرم نردسیک با طول‌گام متغیر را بررسی کرده و درباره خطای گسسته سازی موضعی بحث خواهیم کرد و همچنین رویکردی را شرح خواهیم داد که در آن تخمین خطای گسسته سازی موضعی به طور عددی تعیین می‌شود.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ث

۱ مفاهیم مقدماتی و پیشینه پژوهش ۱
۱.۱ مفاهیم مقدماتی ۱
۲.۱ روش‌های عددی ۴
۳.۱ روش‌های چندگامی خطی ۵
۱.۳.۱ فرم عمومی روش ۶
۲.۳.۱ مرتبه، سازگاری، صفر-پایداری و همگرایی ۷
۳.۳.۱ پایداری روش ۹
۴.۳.۱ خطای روش ۱۱
۵.۳.۱ روش‌های پیشگو-اصلاحگر ۱۲
۴.۱ روش‌های رانگ-کوتا ۱۴
۱.۴.۱ ساختار و ویژگی ۱۵
۲.۴.۱ درختان ریشه‌دار ۲۱
۳.۴.۱ پایداری روش ۳۱
۴.۴.۱ خطای روش ۳۲

۲ روش‌های خطی عمومی ۳۴
۱.۲ شکل کلی روش‌های خطی عمومی ۳۴
۲.۲ روش‌های چندگامی خطی به عنوان روش‌های خطی عمومی ۳۶
۳.۲ روش‌های رانگ-کوتا به عنوان روش‌های خطی عمومی ۳۸
۴.۲ بعضی روش‌های خاص به عنوان روش‌های خطی عمومی ۴۱
۵.۲ سازگاری، صفر-پایداری و همگرایی ۴۲
۶.۲ شرایط مرتبه و مرتبه‌ی مرحله‌ای ۴۶
۷.۲ پایداری روش ۴۸
۸.۲ انواع روش‌های خطی عمومی ۵۰
۹.۲ روش‌های خطی عمومی در فرم نردسیک ۵۱
۱.۹.۲ نمایش GLM در فرم نردسیک ۵۱
۲.۹.۲ تبدیل $DIMSIMs$ به فرم نردسیک ۵۴
۳.۹.۲ روش نردسیک با طول گام متغیر ۵۶
۴.۹.۲ چند مثال از روش‌های نردسیک ۵۸

۳ تخمین خطا برای روش‌های نردسیک ۶۰
۱.۳ خطای گسسته سازی موضعی روش‌های نردسیک ۶۰
۲.۳ تخمین خطای گسسته سازی موضعی روش‌های نردسیک ۶۵
۳.۳ آزمون‌های عددی ۶۹

نتیجه‌گیری و پیشنهاد ۸۰

مراجع ۸۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

مقدمه

حل بسیاری از مسائل عملی در علوم مختلفی مانند فیزیک، مهندسی، نجوم و ... نیازمند حل معادلات دیفرانسیل است و علی‌رغم وجود روش‌های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل، عملاً در اکثر موارد جواب تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل موجود نیست. بنابراین در چنین مواردی از روش‌های عددی استفاده می‌کنیم و از آنجائی که یک معادله دیفرانسیل از مرتبه بالاتر را می‌توان به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد، بنابراین حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول اهمیت خاصی دارد. مطالعه خطای روش‌های عددی نیز از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا با کنترل خطای روش می‌توان جواب‌های دقیق‌تری را انتظار داشت.

یکی از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل، روش‌های خطی عمومی است که در سال ۱۹۶۶ توسط بوچر [۳] به عنوان تعمیمی از روش‌های متعارف معرفی شد. تاکنون تلاش‌های زیادی برای یافتن روش‌هایی از این دسته بزرگ انجام شده است. یکی از این رویکردها استفاده از کلاس روش‌های $DIMSIMs$ است که توسط بوچر [۴] معرفی شد و سپس ژاسکویچ [۱۰] و رایت [۳۰] به مطالعه بیشتر این روش‌ها پرداختند. یک تخمین خطا برای این دسته از روش‌ها توسط بوچر و ژاسکویچ [۱۳] در سال ۲۰۰۱ بیان شده است.

در فصل اول این پایان‌نامه به تعاریف و قضایای مقدماتی پرداخته و ساختار و خواص روش‌های چندگامی خطی و رانگ-کوتا را مرور خواهیم کرد و در فصل دوم به بررسی ساختار روش‌های خطی عمومی و همچنین روش‌های نردسیک خواهیم پرداخت و در نهایت در فصل سوم تخمینی برای خطای روش‌های نردسیک به دست آورده و آن را روی چند مثال اجرا خواهیم کرد.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر تهیه شده است:

J.C. Butcher, Z. Jackiewicz, Error estimation for Nordsieck methods, Numer. Algorithms, 31 (2002) 75-85.

مبنای کلمات کتاب تکوینی و تدوینی نظام هستی
مبتنی بر اساس استوار ریاضیات است.
علامه حسن زاده آملی

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیشینه پژوهش

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف، قضایا و مفاهیمی خواهیم پرداخت که پیش‌نیازی برای مطالب آتی خواهند بود. همچنین ساختار کلی روش‌های متعارف حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی را مرور نموده و سازگاری، پایداری و خواص این روش‌ها را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱.۱. یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی رابطه‌ای بین یک متغیر مستقل، یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به متغیر مستقل است. بنابراین شکل کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه nام در حالت استاندارد به صورت زیر بیان می‌شود

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}).$$

این معادله جوابی به شکل $y = \phi(x)$ دارد، اگر تابع ϕ تا مرتبه nام مشتق‌پذیر بوده و خود تابع و مشتقات آن در رابطه فوق صدق کنند. همچنین معادله بالا را همراه با مقادیر معلوم $y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)$ درنقطه $x = x_0$ یک مساله مقدار اولیه می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ تعریف شده بر روی ناحیه $R \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ را در نقطه $x_0 \in R$ پیوسته[۱] گویند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in R$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\| x - x_0 \| < \delta \quad \Rightarrow \quad \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon.$$

---

[۱] continuous

تعریف ۳.۱.۱. تابع $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ تعریف شده بر روی ناحیه $R \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ نسبت به مؤلفه $y \in \mathbb{R}^m$ در شرط لیپ‌شیتز[۲] صدق می‌کند هرگاه عدد ثابتی مانند $L > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $(x, y), (x, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1}$ داشته باشیم

$$\parallel f(x, y) - f(x, y^*) \parallel \leq L \parallel y - y^* \parallel .$$

یک مساله‌ی مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول را می‌توان به شکل غیرخودگردان[۳] زیر نشان داد

$$\begin{aligned} &y^{'}(x) = f(x, y(x)), \qquad x \in [x_0, \bar{x}], \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که در آن $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ و $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ توابع برداری هستند و m بعد دستگاه است و همچنین می‌توان به شکل خودگردان[۴] زیر نشان داد

$$\begin{aligned} &y^{'}(x) = f(y(x)), \qquad x \in [x_0, \bar{x}], \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

که در آن $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ و $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ توابع برداری هستند و m بعد دستگاه است. دستگاه (۱.۱) را می‌توان با تغییر متغیرهای

$$\widetilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{y}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{f}(\widetilde{y}) = \begin{bmatrix} f(x, y(x)) \\ 1 \end{bmatrix},$$

به شکل خودگردان زیر با بعد $m + 1$ تبدیل کرد

$$\begin{aligned} &\widetilde{y}^{'}(x) = \widetilde{f}(\widetilde{y}(x)), \qquad x \in [x_0, \bar{x}], \\ &\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{y}_0, \end{aligned}$$

[۲] Lipschitz condition
[۳] non-autonomous
[۴] autonomous

که در آن $\widetilde{f}:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{m+1}$ و $\widetilde{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{m+1}$.

هر مساله‌ی مقدار اولیه از معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه nام به صورت

$$u^{(n)}=g(x,u,u',u'',\cdots,u^{(n-1)}),$$
$$u(x_0)=u_0,u^{'}(x_0)=u_0^{'},\cdots,u^{(n-1)}(x_0)=u_0^{(n-1)},$$

را می‌توان با تعریف مؤلفه‌های

$$y_1=u,y_2=u^{'},\cdots,y_n=u^{(n-1)},$$

به شکل (۲.۱) تبدیل کرد که در آن

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},\qquad f(x,y)=\begin{bmatrix}y_2\\y_3\\\vdots\\g(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{bmatrix},\qquad y_0=\begin{bmatrix}u_0\\u_0^{'}\\\vdots\\u_0^{(n-1)}\end{bmatrix}.$$

بنابراین حل مساله‌ی مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول حائز اهمیت است.

قضیه ۴.۱.۱. [۱۸] فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^m$ برای تمام (x,y) ها در ناحیه

$$R=\{(x,y):a\le x\le b,-\infty<y_i<\infty,i=1,2,\cdots,m\},$$

تعریف شده و پیوسته باشد و نسبت به مؤلفه دوم در شرط لیپ‌شیتز صدق کند. آنگاه مساله‌ی مقدار اولیه (۱.۱) دارای جواب منحصر بفرد است.

در این پایان‌نامه فرض بر این است که مساله‌ی مقدار اولیه (۱.۱) در قضیه فوق صادق بوده و بنابراین دارای جواب منحصر بفرد است.

۲.۱ روش‌های عددی

روش‌های عددی برای حل مساله‌ی مقدار اولیه (۱.۱)، الگوریتم‌هایی هستند که با استفاده از آنها مقادیر تقریبی $y(x)$ را در نقاط گرهی[۵]

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_N$$

به دست می‌آوریم که در آن

$$x_n = x_0 + nh, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N,$$

و h طول‌گام[۶] نامیده می‌شود. بنابراین بعد از حل عددی مساله، مقادیر $y_0, y_1, \cdots, y_N$ معلوم می‌شوند و در صورت نیاز می‌توان مقدار y را در هر نقطه $x \in [x_0, \bar{x}]$ با استفاده از درونیابی تعیین نمود.

تعریف ۱.۲.۱. یک روش عددی را از مرتبه[۷] p گوییم هرگاه

$$y(x_n) - y_n = O(h^{p+1}), \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

که در آن $y(x_n)$ جواب دقیق و y_n جواب عددی تولید شده توسط روش عددی است که با استفاده از مقادیر آغازین دقیق بدست آمده است.

روش اویلر[۸] از نخستین روش‌های حل عددی مساله‌ی مقدار اولیه می‌باشد که در واقع آن را می‌توان اساس روش‌های عددی دیگر دانست. در روش اویلر تنها با استفاده از مقدار y در نقطه گرهی x_{n-1} یعنی y_{n-1} به تقریبی از y_n می‌رسیم و بنابراین روش اویلر تک گامی محسوب می‌شود و آن را بصورت زیر بیان می‌کنیم

$$y_0 = y(x_0),$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \cdots, N.$$

۵ node point
۶ step size
۷ order
۸ Euler

با جایگذاری این رابطه در بسط تیلور y حول نقطه x_{n-1} وبا فرض $y_{n-1} = y(x_{n-1})$ داریم

$$\begin{aligned} y(x_n) - y_n &= \frac{h^2}{2!} y^{''}(x_{n-1}) + \frac{h^3}{3!} y^{'''}(x_{n-1}) + \cdots \\ &= O(h^2). \end{aligned}$$

بنابراین روش اویلر از مرتبه یک است. تعمیمی از روش اویلر وجود دارد که در آن برای محاسبه y_n علاوه بر مقدار y_{n-1} از مقادیر $y_{n-2}, y_{n-3}, \cdots, y_{n-k}$ $(k \geq 2)$، نیز استفاده می‌شود که به روش‌های چندگامی[۹] معروفند. در روش اویلر در هر گام تنها یک‌بار از تابع f استفاده می‌شود، روش‌های دیگری نیز وجود دارد که به روش‌های رانگ-کوتا[۱۰] معروفند و در آنها تابع f بیش از یک‌بار محاسبه می‌شوند. تعمیم‌های دیگری نیز از روش اویلر مانند روش‌های سری تیلور و روش‌های ابرشکف[۱۱] وجود دارند که در آنها علاوه بر مشتق مرتبه اول، یعنی f، از مشتقات بالاتر جواب نیز استفاده می‌شود.

۳.۱ روش‌های چندگامی خطی

تعمیمی از روش اویلر به این صورت که جواب تقریبی در یک نقطه به مقادیر جواب و مشتق جواب در چندین گام قبلی بستگی داشته باشد، پیشنهاد مبتکرانه‌ی بشفورث[۱۲] و آدامز[۱۳] [۱] در سال ۱۸۸۳ بود و سپس در سال ۱۹۲۶، جزئیات بیشتری توسط مولتون[۱۴] شرح داده شد. همچنین نیستروم[۱۵] در سال ۱۹۲۵، و سپس میلن[۱۶] نوع خاصی از روش‌های چندگامی را ارائه دادند. دالکوئیست[۱۷] نیز در سال ۱۹۵۶، قضایای مهم و جدیدی را برای این روش‌ها ارائه داد.

[۹] Multistep methods
[۱۰] Runge-Kutta
[۱۱] Obreshkov
[۱۲] Bashforth
[۱۳] Adams
[۱۴] Moulton
[۱۵] Nystrom
[۱۶] Milne
[۱۷] Dahlquist

۱.۳.۱ فرم عمومی روش

فرم کلی یک روش $k-$ گامی خطی برای حل (۱.۱)، به صورت

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \tag{۳.۱}$$

بیان می‌شود که در آن α_j و β_j اعداد حقیقی ثابت هستند و $f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$. برای منحصر بفرد بودن ضرایب فرض می‌کنیم $\alpha_k = 1$ و نیز برای این که تعداد گام‌های روش یک گام کم‌تر نشود فرض می‌کنیم $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$. حال اگر تقریبی از y را در نقاط گرهی $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+(k-1)}$، داشته باشیم می‌توانیم مقدار تقریبی $y(x_{n+k})$ را با رابطه (۳.۱) به دست آوریم.

در رابطه (۳.۱)، اگر داشته باشیم $\beta_k = 0$ در این صورت روش چندگامی خطی، یک روش صریح[۱۸] خواهد بود و اگر $\beta_k \neq 0$ در این صورت روش چندگامی خطی، به یک روش ضمنی[۱۹] تبدیل خواهد شد. در روش ضمنی عبارت مجهول y_{n+k} در دو طرف معادله ظاهر می‌شود که اگر f نسبت به y خطی باشد، به آسانی قابل حل است ولی اگر f غیرخطی باشد در این صورت جواب یکتای y_{n+k} را با انتخاب مقدار دلخواه $y_{n+k}^{[0]}$ از رابطه تکراری زیر محاسبه می‌کنیم

$$y_{n+k}^{[s+1]} = g + h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}),$$

که در آن

$$g = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}.$$

برای همگرا بودن این رابطه تکراری باید داشته باشیم

$$h < \frac{1}{L \mid \beta_k \mid},$$

[۱۸] explicit
[۱۹] implicit

که در آن L ثابت لیپ‌شیتز f نسبت به مؤلفه y است. روش‌های چندگامی خطی با ویژگی $\alpha_{k-1} = 1$ و $\alpha_j = 0$ برای $j = 0, 1, \cdots, k-2$، اگر صریح باشند به روش‌های آدامز-بشفورث و در صورت ضمنی بودن به روش‌های آدامز-مولتون معروفند. همچنین روش‌هایی با ویژگی $\beta_k \neq 0$ و $\beta_j = 0$ برای $j = 0, 1, \cdots, k-1$، به روش‌های تفاضلی پسرو[۲۰] یا روش‌های مشتق‌گیری پسرو[۲۱] یا به روش‌های BDF معروفند.

۲.۳.۱ مرتبه، سازگاری، صفر-پایداری و همگرایی

تعریف ۱.۳.۱. برای تابع دلخواه $y(x)$، عملگر تفاضلی L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L[y(x); h] = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x + jh) - h\beta_j y^{'}(x + jh)].$$

بنابراین متناظر با هر روش چندگامی (۳.۱)، عملگر تفاضلی L به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$L[y(x); h] = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j}))]. \tag{۴.۱}$$

حال اگر بسط تیلور را حول نقطه x_n بکار بریم خواهیم داشت

$$L[y(x_n); h] = C_0 y(x_n) + C_1 h y^{'}(x_n) + C_2 h^2 y^{''}(x_n) + \cdots + C_q h^q y^q(x_n) + \cdots \tag{۵.۱}$$

که در آن

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k), \\ C_q &= \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + 3^q\alpha_3 + \cdots + k^q\alpha_k \\ &\quad - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \cdots + k^{q-1}\beta_k), \qquad q = 2, 3, \cdots. \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

[۲۰] backward difference formulae
[۲۱] backward differentiation formulae

تعریف ۱.۳.۲. روش چندگامی خطی (۱.۳) را از مرتبه p گویند هرگاه در عملگر تفاضلی $L[y(x_n);h]$ داشته باشیم

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0, \qquad C_{p+1} \neq 0,$$

مقدار C_{p+1} ثابت خطا نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۳. روش عددی را سازگار[۲۲] گوییم هرگاه مرتبه روش حداقل برابر یک باشد.

تعریف بالا برای روش چندگامی خطی معادل است با دو تساوی زیر

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j.$$

تعریف ۱.۳.۴. معادله مشخصه[۲۳] اول و دوم را برای روش چندگامی خطی (۱.۳)، به ترتیب با $\rho(\zeta)$ و $\sigma(\zeta)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j, \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j.$$

نتیجه ۱.۳.۵. روش چندگامی خطی (۱.۳) سازگار است اگر داشته باشیم

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho^{'}(1) = \sigma(1).$$

بنابراین برای روش سازگار، $\zeta_1 = 1$ یک ریشه معادله مشخصه اول است، این ریشه را ریشه اصلی[۲۴] و $k-1$ ریشه دیگر را ریشه‌های بدلی[۲۵] یا اضافی می‌نامند و هرگاه تعداد گام‌های روش (k) بیشتر از یک باشد، این ریشه‌های اضافی تولید می‌شوند که جهت همگرا شدن روش باید کنترل شوند. سازگاری فقط ریشه اصلی را کنترل می‌کند، بنابراین برای کنترل ریشه‌های اضافی به مفهوم دیگری به نام پایداری نیاز داریم.

[۲۲] consistent
[۲۳] characteristic polynomials
[۲۴] principal root
[۲۵] spurious roots

تعریف ۶.۳.۱. روش چندگامی خطی (۳.۱) را صفر-پایدار[۲۶] گوییم هرگاه اندازه ریشه‌های $\rho(\zeta)$، بیشتر از یک نباشد و ریشه‌هایی که از اندازه یک هستند، ساده باشند.

تعریف ۷.۳.۱. روش چندگامی خطی (۳.۱) را برای مساله‌ی مقدار اولیه (۱.۱)، همگرا[۲۷] گوییم هرگاه

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=x-x_0}} y_n = y(x_n)$$

برای هر $x\in[x_0,\bar{x}]$ برقرار باشد و برای تمام جواب‌های y_n از مساله‌ی مقدار اولیه (۱.۱) با $y(x_0)=\eta$ که $y_\mu=\eta_\mu(h)$ داشته باشیم

$$\lim_{h\to 0}\eta_\mu(h)=\eta, \qquad \mu=0,1,\cdots,k-1,$$

که در آن $y(x_n)$ جواب دقیق و y_n جواب عددی تولید شده توسط روش عددی است.

قضیه ۸.۳.۱. [۲۴] روش چندگامی خطی همگراست اگر و فقط اگر سازگار و صفر-پایدار باشد.

قضیه ۹.۳.۱. [۱۸] مرتبه یک روش $k-$ گامی خطی صفر-پایدار، برای k زوج حداکثر $k+2$ و برای k فرد حداکثر $k+1$ است.

تعریف ۱۰.۳.۱. روش $k-$ گامی خطی صفر-پایدار، از مرتبه $k+2$ را روش بهینه[۲۸] می‌نامند.

۳.۳.۱ پایداری روش

پایداری روش چندگامی خطی (۳.۱) را با اعمال روش روی مساله‌ی آزمون دالکوئیست [۱۵] $y'(x)=\lambda y(x)$ بررسی می‌کنیم که در این صورت خواهیم داشت

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\overline{h}\beta_j)y_{n+j}=0,$$

که در آن $\overline{h}=h\lambda$.

[۲۶] zero-stable
[۲۷] convergent
[۲۸] optimal

تعریف ۱۱.۳.۱. برای روش چندگامی خطی، چند جمله‌ای پایداری[۲۹] [۲۴] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\pi(r,\overline{h}) = \rho(r) + \overline{h}\sigma(r).$$

با توجه به این تعریف، وقتی $\overline{h}=0$، ریشه‌های $\pi(r,\overline{h})$ و $\rho(\zeta)$ با هم برابر می‌شوند، از طرفی از سازگاری و صفر-پایداری نتیجه می‌شود که $\rho(\zeta)$ یک ریشه ساده در $\zeta_1 = 1$ دارد. فرض کنیم $r_1(\overline{h})$ ریشه‌ای از $\pi(r,\overline{h})$ باشد که $\lim_{\overline{h}\to 0} r_1(\overline{h}) = \zeta_1 = 1$ در این صورت r_1 را ریشه اصلی چند جمله‌ای پایداری می‌نامند. بقیه ریشه‌ها به یک میل نمی‌کنند زیرا در این صورت ریشه‌های $\rho(\zeta)$ تکراری شده و روش صفر-پایدار نخواهد بود.

تعریف ۱۲.۳.۱. روش چندگامی خطی را به طور مطلق پایدار[۳۰] گوییم هرگاه اندازه تمام ریشه‌های چند جمله‌ای پایداری کم‌تر از یک باشد، یعنی

$$\mid r_i(\overline{h}) \mid < 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, k,$$

ناحیه پایداری مطلق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R = \{\overline{h} \in \mathbb{C} : \quad \mid r_i(\overline{h}) \mid < 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, k\}.$$

تعریف ۱۳.۳.۱. روش چندگامی خطی را به طور نسبی پایدار[۳۱] گوییم هرگاه

$$\mid r_i \mid < \mid r_1 \mid, \qquad i = 1, 2, \cdots, k.$$

تعریف ۱۴.۳.۱. روش چندگامی خطی را $A-$ پایدار می‌نامند هرگاه ناحیه پایداری مطلق، شامل نیم صفحه‌ی چپ صفحه‌ی مختلط باشد، یعنی

$$\{\overline{h} \in \mathbb{C} : Re(\overline{h}) < 0\} \subseteq R.$$

تعریف ۱۵.۳.۱. روش چندگامی خطی را $A(\alpha)-$ پایدار می‌نامند هرگاه ناحیه پایداری مطلق آن به صورت زیر باشد

$$R = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \leq 0, -\tan(\alpha) \mid x \mid \leq y \leq \tan(\alpha) \mid x \mid\},$$

[۲۹] stability polynomial
[۳۰] absolutely stable
[۳۱] relatively stable

که در آن α یک زاویه در $(0,\pi)$ می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱۶. روش چندگامی خطی را $L-$ پایدار [۱۶] می‌نامند هرگاه روش $A-$ پایدار باشد و زمانی که روش روی مساله‌ی $y^{'}(x)=\lambda y(x)$ با $Re(\lambda)<0$ بکار برده می‌شود داشته باشیم

$$\lim_{\lambda\to\infty} y_n = 0.$$

۱.۳.۴ خطای روش

تعریف ۱.۳.۱۷. خطای برشی موضعی[۳۲] (LTE) روش چندگامی خطی (۱.۳) در نقطه x_{n+k} عبارت است از عملگر تفاضلی $L[y(x_n);h]$، این خطا را با T_{n+k} نیز نشان می‌دهند.

با فرض موضعی بودن یعنی دقیق بودن مقادیر ورودی و با استفاده از روابط (۱.۳) و (۱.۴) خواهیم داشت

$$y(x_{n+k})-y_{n+k}=h\beta_k[f(x_{n+k},y(x_{n+k}))-f(x_{n+k},y_{n+k})]+T_{n+k},$$

حال اگر قضیه مقدار میانگین[۳۳] را برای تابع f بکار بریم، خواهیم داشت

$$(1-h\beta_k\frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+k},\eta_{n+k}))(y(x_{n+k})-y_{n+k})=T_{n+k},$$

که در آن η_{n+k} بین y_{n+k} و $y(x_{n+k})$ قرار دارد. حال اگر روش چندگامی خطی صریح باشد آنگاه $\beta_k=0$ بنابراین خواهیم داشت

$$y(x_{n+k})-y_{n+k}=T_{n+k}.$$

---

[۳۲] local truncation error

[۳۳] mean value throrem

ولی اگر روش ضمنی باشد این تساوی برقرار نیست. در هر صورت اگر $y(x)$ دارای مشتقات پیوسته مراتب بالا باشد، خواهیم داشت

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k} = C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}), \tag{۷.۱}$$

که در آن p مرتبه روش است و عبارت $C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n)$ را خطای برشی موضعی اصلی گوییم.

تعریف ۱۸.۳.۱. خطای برشی کلی در نقطه x_{n+k} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e_{n+k} = y(x_{n+k}) - y_{n+k}.$$

۵.۳.۱ روش‌های پیشگو-اصلاحگر

در حل مساله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۱)، اگر از یک روش چندگامی ضمنی استفاده کنیم، در هر گام برای تعیین y_{n+k} باید معادله‌ی

$$y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g,$$

را حل نمود که در آن

$$g = \sum_{j=0}^{k-1}(-\alpha_j y_{n+j} + h\beta_j f_{n+j}).$$

معمولاً معادله‌ی بالا غیرخطی است و در صورتی که داشته باشیم $h < 1/L \mid \beta_k \mid$ آنگاه جواب یکتای y_{n+k} وجود خواهد داشت و با تکرارهای

$$y_{n+k}^{[s+1]} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) + g, \qquad s = 0, 1, \cdots , \tag{۸.۱}$$

می‌توان به دلخواه به آن نزدیک شد که در آن $y_{n+k}^{[0]}$ تقریب اولیه‌ی دلخواه است. واضح است که هر اندازه تقریب اولیه‌ی $y_{n+k}^{[0]}$ دقیق باشد، تعداد تکرارهای لازم برای تعیین جواب قابل قبول برای y_{n+k} کمتر می‌شود. بنابراین با استفاده از یک روش صریح مقدار y_{n+k} را تخمین زده و این مقدار را به عنوان حدس اولیه برای $y_{n+k}^{[0]}$ اتخاذ می‌کنیم. در عمل برای حل مساله‌ی مقدار اولیه، یک روش چندگامی ضمنی را به تنهائی به کار نمی‌بریم، بلکه از آن برای بهتر نمودن تقریب‌های حاصل از روش‌های چندگامی صریح استفاده می‌کنیم. این روند را که ترکیبی از روش‌های صریح و ضمنی است، روش پیشگو-اصلاحگر[۳۴] می‌نامند که در آن روش صریح به عنوان پیشگو و روش ضمنی به عنوان اصلاحگر خواهد بود. فرآیند بالا را می‌توان به دو روش انجام داد. اولین روش عبارت است از ادامه‌ی تکرارها در رابطه‌ی (۸.۱)، تا این که تکرارها به جواب همگرا شوند. در این حالت پیشاپیش نمی‌توان گفت که چه تعداد تکرار ضروری خواهد بود ولی در روش دوم هدف این است که تعداد دفعات ارزیابی تابع f محدود شود، برای این کار تعداد دفعاتی را که روش اصلاحگر را در هر گام به کار می‌بریم، برابر m در نظر می‌گیریم. فرض کنید با یک روش به عنوان پیشگو $y_{n+k}^{[0]}$ محاسبه شده و بعد مقدار $f_{n+k}^{[0]}$ ارزیابی شود، سپس با به کار بردن یک روش به عنوان اصلاحگر $y_{n+k}^{[1]}$ محاسبه شود، در این صورت این مراحل را با PEC نشان می‌دهیم. به علاوه اگر مقدار $f_{n+k}^{[1]}$ را با $f_{n+k}^{[1]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[1]})$ ارزیابی کرده و دوباره با روش اصلاحگر مقدار $y_{n+k}^{[2]}$ محاسبه شود، در این صورت این مراحل را با $PECEC$ یا $P(EC)^2$ نشان می‌دهیم و با به کار بردن mبار روش اصلاحگر به طور مشابه روش پیشگو-اصلاحگر را با $P(EC)^m$ نشان می‌دهیم که در آن $y_{n+k}^{[m]}$ به عنوان جواب عددی در نقطه‌ی x_{n+k} پذیرفته می‌شود و آخرین مقدار محاسبه شده برای f_{n+k} به صورت $f_{n+k}^{[m-1]}$ است و اگر آخرین مقدار برای f_{n+k} را از عبارت $f_{n+k}^{[m]}$ تعیین کنیم در این صورت روش را با $P(EC)^mE$ نشان می‌دهیم. از آن جائی که هر دو روش پیشگو و اصلاحگر جهت تعیین گام بعدی y_{n+k+1} به f_{n+k} وابسته خواهند بود بنابراین انتخاب $f_{n+k}^{[m-1]}$ یا $f_{n+k}^{[m]}$ به عنوان مقدار f_{n+k} در مرحله‌ی بعدی محاسبات مؤثر خواهد بود. به ازای مقادیر $m = 1, 2, \cdots$، شکل کلی روش‌های پیشگو-اصلاحگر در فرم

[۳۴] predictor-corrector