بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در ریاضی محض(هندسه)

عنوان:

پیوستگی گروه های توپولوژیک

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

هادی سعیدی

(این پایان نامه از حمایت مالی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است)

مهر ۱۳۸۷

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان پیوستگی گروه های توپولوژیک قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض(هندسه) توسط دانشجو هادی سعیدی گراغانی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر غلامرضا رضایی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

هادی سعیدی گراغانی

این پایان نامه ۶ واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۷/۷/۳۰ توسط هیئت داوران بررسی و درجه خوب به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکتر غلامرضا رضایی		
استاد راهنما:			
استاد مشاور:			
داور ۱:	دکتر علیرضا احمدی لداری		
داور ۲:	دکتر نصرالله گرامی		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر اکبر گلچین		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب هادی سعیدی گراغانی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: هادی سعیدی گراغانی

امضاء

تقدیم به:

خانواده ام، بخصوص پدر و مادرم

که همیشه دعای خیرشان

بدرقه راهم بوده است.

سپاسگزاری

(سپاس خدا را که مرا در راه عِلم قرار داد و در هر قدم، معجزه آسا یاریم کرد.)

اکنون که به لطف و یاری خداوند متعال، تحقیق و نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده است بر خود لازم می دانم، از همه دوستان و عزیزانی که مرا در طی این راه مورد لطف و عنایت خویش قرار داده و با اینجانب همکاری صمیمانه داشته اند، مراتب تشکر و قدردانی را بجا آورم.

از همه اساتیدی که به نحوی حق تعلیم و تربیت بر گردن حقیر دارند به خصوص از زحمات و مساعدت های ارزشمند استاد راهنمای دلسوزم جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی که در تمام مراحل راهنما و مشوق من بوده اند و با مهربانی نکات لازم را یادآوری کرده اند تقدیر و تشکر می کنم.

در پایان از دوستان و همکلاسی های عزیزم

آقایان : دکتر جمالیزاده، دکتر نادر کوهستانی، مهدی کوهپایه، پویان خامه چی، سید ابوالفضل کهکی، هاشم ملکشاهی، مسعود فخر، عبدالله آقاسی زاده، علی فرحبخش، علی اعتصام، وحید فتاحی، محمود حدادی و

خانم ها : مریم سیف الدینی، فاطمه سعیدی، مرضیه مسعودی نژاد، الما کریم پور، سمیه خانی پور

و تمام عزیزانی که مرا در پایان رساندن این دوره همراهی نموده اند سپاسگزارم.

چکیده

ثابت می کنیم هرگاه G یک گروه ، همراه با توپولوژی متریک پذیر و بئر باشد، اگر یک زیر مجموعهٔ چگال رده دوم S از G موجود باشد بطوریکه انتقال های راست ρ_s و $\rho_{s^{-1}}$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشند وهر انتقال چپ λ_s ، $s \in G$ روی یک زیر مجموعه مانده از G تقریباً پیوسته باشد، آنگاه G یک گروه توپولوژیک است. همچنین می توان نتیجه گرفت که اگر G یک گروه توپولوژیک راست موضعاً فشرده شمارای دوم باشد، آنگاه مرکز توپولوژیک آن نیز یک گروه توپولوژیک است.

کلمات کلیدی: فضای بئر، نگاشت تقریباً پیوسته، پیوستگی انتقال های گروه

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱—۱ مقدمه

توپولوژی از نیمهٔ دوم قرن نوزدهم به عنوان یکی از شاخه‌های ریاضیات مطرح شد و امروزه تقریباً در همه حوزه‌های ریاضیات و دیگر علوم کاربرد دارد. توپولوژی در لغت به معنای ((علم سطوح)) است و موضوع آن به دو شاخهٔ اصلی ریاضیات یعنی هندسه و آنالیز مربوط می شود. امروزه توپولوژی به چندین شاخه تحت عناوین نقطه—مجموعه، توپولوژی هندسی، توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل تقسیم شده است. یکی از مباحثی که در توپولوژی نقطه—مجموعه مطرح شده است، مفهوم گروه های توپولوژیک و پیوستگی گروههای توپولوژیک می باشد. در این راستا اشخاص مختلف بعد از مطالعات دقیق و مستمر نشان دادند که یک گروه جبری G یک گروه توپولوژیک است. برای مثال سولکی [۱] و سیواستاوا [۲] ثابت کردند که اگر G جدایی پذیر، انتقال های راست پیوسته و انتقال های چپ خاصیت بئر داشته باشندآنگاه G یک گروه توپولوژیک خواهد بود. در سال ۱۹۳٦ مونتگومری [۳] نشان داد، اگر G فضای متری کامل جدایی پذیر و حاصلضرب گروه به طور جداگانه پیوسته باشد آنگاه G نیز گروه توپولوژیک است. همچنین ثابت کرد که هر گروه نیم توپولوژیک متریک پذیر، گروه توپولوژیک می‌باشد. بعداً در ۱۹۵۷ الیس [۴] نشان داد که هر گروه نیم توپولوژیک موضعاً فشرده نیز یک گروه توپولوژیک است. هم اکنون زمینه و نتایج مورد تحقیق در این باب بسیار زیاد است که برای فضاهای متریک پذیر و متریک ناپذیر قابل بحث خواهد بود.

پایان‌نامه حاضر شامل چهار فصل است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی بیان شده‌اند که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌شود. در فصل دوم به تعاریف و قضایای مربوط به گروه‌های توپولوژیک پرداخته‌ایم و در فصل سوم ابتدا تعریف فضای بئر و قضیهٔ رستهٔ بئر و بعد از آن قضایای مربوط به پیوستگی معکوس را بیان کرده‌ایم و در نهایت در فصل چهار تحت فرضیات معین ثابت کرده‌ایم که G یک گروه توپولوژیک است.

---

[۱] Solecki
[۲] Srivastava
[۳] Montgomery
[۴] Ellis

۱—۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به طور خلاصه به تعاریف و قضایایی که در فصلهای بعدی از آنها استفاده می‌شود اشاره‌ای می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. نقطه‌ای مانند x از مجموعهٔ X و مجموعهٔ بازی مانند U در فضای Y داده شده‌اند، قرار می‌دهیم

$$S(x,U)=\{f \mid f\in Y^X, f(x)\in U\}$$

مجموعه‌های به صورت $S(x,U)$ تشکیل زیر پایه‌ای برای توپولوژی بر Y^X می‌دهند. این توپولوژی را توپولوژی نقطه— باز می نامند.

تعریف ۲.۱.۱: فرض کنیم X یک مجموعه باشد، یک پایهٔ توپولوژیکی در X گردایه‌ای است از زیرمجموعه‌های X (موسوم به اعضای پایه) به طوری که:

الف) به ازای هر $x\in X$ ، دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x موجود باشد.

ب) اگر x متعلق به مقطع دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد، آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود داشته باشد به طوری که $x\in B_3$ و $B_3\subset B_1\cap B_2$.

تعریف ۳.۱.۱: فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. تابع $f:X\longrightarrow Y$ را در هر $x\in X$ شبه پیوسته گوییم اگر برای هر همسایگی W از $f(x)$ و همسایگی U از x ، مجموعهٔ باز ناتهی $V\subset U$ که V شامل x است، وجود داشته باشد به طوری که $f(V)\subset W$. اگر f در هر $x\in X$ شبه پیوسته باشد آنگاه f روی X شبه پیوسته نامیده می شود.

تعریف ۴.۱.۱: تابع f از فضای توپولوژیک X بتوی فضای توپولوژیک Y را تقریباً پیوسته گوییم، اگر برای هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی V از Y، $f^{-1}(V)$ شامل یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی از X باشد.

تعریف ۵.۱.۱: فرض کنید (X,τ) فضای توپولوژیک و A و B متعلق به $P(X)$ باشند. در این صورت A را در B چگال می گوییم، اگر $B \subseteq \overline{A}$. از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر A در X چگال باشد آنگاه $\overline{A} = X$. به سادگی نتیجه می‌شود که شرط لازم و کافی برای آنکه A در X چگال باشد آن است که به ازای هر G متعلق به $\tau \setminus \{\emptyset\}$، $G \cap A \neq \emptyset$.

تعریف ۶.۱.۱: فرض کنید (X,τ) فضایی توپولوژیک و A زیر مجموعه ای از X باشد. در این صورت مجموعه A را در X هیچ جا چگال می‌گوییم، اگر هیچ مجموعه باز ناتهی مانند G موجود نباشد که $G \subseteq \overline{A}$.

تعریف ۷.۱.۱: فضای توپولوژیک (X,τ) را جدایی پذیر می‌گوییم هرگاه X دارای یک زیرمجموعه چگال شمارا مانند D باشد.

تعریف ۸.۱.۱: اگر (X,d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از X باشد آنگاه تحدید تابع d به A، $d\mid_A$ یک متر روی A است و بنابراین یک توپولوژی روی A القا می‌کند. در واقع این توپولوژی عبارت است از گردایهٔ تمام مجموعه‌های باز در A یعنی:

$$\tau_{d|A} = \{G \cap A : \ G \in \tau_d\}$$

پس با در دست داشتن توپولوژی القا شده روی X توسط متر d قادر به تعریف یک توپولوژی روی هر زیرمجموعهٔ ناتهی از X خواهیم بود.

در واقع این روش قابل تعمیم به هر فضای توپولوژیک دلخواه است، یعنی اگر (X,τ) یک فضای توپولوژیک و A زیر مجموعه‌ای غیرتهی از X باشد آنگاه گردایهٔ

$$\tau\mid_A = \{G \cap A : \ G \in \tau\}$$

تشکیل یک توپولوژی روی A می‌دهد.

چون $\emptyset \in \tau$ و $\emptyset \cap A = \emptyset$ پس $\emptyset \in \tau |_A$. از طرفی چون $X \in \tau$ و $X \cap A = A$ پس $A \in \tau |_A$. اگر

$$\{A_i : \ i \in I\} \subseteq \tau |_A$$

آنگاه چون برای هر $i \in I$، $G_i \in \tau$ وجود دارد که $G_i \cap A = A$ پس

$$\bigcup_{i\in I}(G_i \cap A) = (\bigcup_{i\in I} G_i) \cap A$$

که چون $\bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$ پس $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau |_A$. اینک اگر

$$\{A_i : \ ۱ \leq j \leq n\} \subseteq \tau |_A$$

آنگاه برای هر $۱ \leq j \leq n$، $G_j \in \tau$ وجود دارد که $G_j \cap A = A_j$. از این جا

$$\bigcap_{j=۱}^{n} A_j = \bigcap_{j=۱}^{n} (G_j \cap A) = (\bigcap_{j=۱}^{n} G_j) \cap A$$

که چون $\bigcap_{j=۱}^{n} G_j \in \tau$ پس $\bigcap_{j=۱}^{n} A_j \in \tau \mid A$.

بنابراین مجموعهٔ $\tau |_A$ تشکیل یک توپولوژی روی A می‌دهد که به آن توپولوژی نسبی یا توپولوژی زیرفضایی می‌گوییم. فضای توپولوژیک $(A, \tau |_A)$ را یک زیرفضای (X, τ) می‌گوییم.

تعریف ۹.۱.۱: فرض کنید (X, τ) فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$. خانوادهٔ β_x از اعضای τ را که شامل x هستند یک پایه موضعی در x می‌گوییم، هرگاه به ازای هر G متعلق به τ که $x \in G$، عضوی مانند B در β_x موجود باشد، به طوری که $B \subseteq G$.

تعریف ۱۰.۱.۱: فضای توپولوژیک (X, τ) را شمارای اول گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، پایهٔ موضعی شمارایی مانند β_x در x موجود باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱: فضای توپولوژیک (X, τ) را شمارای دوم می‌گوییم هرگاه τ دارای یک پایهٔ شمارا باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱: فرض کنید (X,τ) فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. مجموعه A را از رده اول می گوییم اگر و تنها اگر A اجتماع شمارایی از مجموعه های هیچ جا چگال باشد. در غیر این صورت A را از رده دوم می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱: فرض کنید (X,τ) فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت A را یک مجموعه مانده نامیم اگر و تنها اگر $X \setminus A$ در X از رده اول باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱: فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند و F خانواده‌ای از توابع $X \longrightarrow Y$ باشد. خانوادهٔ F در $x_\circ \in X$ همپیوسته است اگر

$$\forall \epsilon > \circ \ , \ \exists \, \delta > \circ \ , \ \forall f \in F \ , \ \ d(x_\circ, x) < \delta \ \ \Rightarrow \ \ d(f(x_\circ), f(x)) < \epsilon.$$

اگر خانوادهٔ F در تمام نقاط $x \in X$ همپیوسته باشد آنگاه گوییم که روی X همپیوسته است.

تعریف ۱۵.۱.۱: یک نگاشت f را پیوستهٔ مانده گوییم هرگاه زیرمجموعهٔ $I \subseteq X$ از ردهٔ اول وجود داشته باشد بطوریکه $f_{|X \setminus I}$ پیوسته باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱: فرض کنیم $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{P(X)}$ خانواده‌ای ناتهی باشد. $\mathbf{A}$ را یک σ—حلقه می‌گوییم هرگاه:

الف) برای هر $A \in \mathbf{A}$، $X \setminus A \in \mathbf{A}$

ب) اگر $\{A_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbf{A}$ آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{A}$

واضح است که اشتراک هر تعداد σ—حلقه یک σ—حلقه است. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، کوچکترین σ—حلقه‌ای که τ را در بر دارد، خانوادهٔ مجموعه‌های برل نامیده می شود

که با β نمایش می‌دهیم. در حقیقت، β اشتراک تمام σ–حلقه‌هایی است که τ را در بر دارند. هر عضو خانوادهٔ β را یک مجموعهٔ برل می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۷: (اصل انتخاب) اگر $\mathbf{A}$ گردایهٔ مفروضی از مجموعه‌های ناتهی جدا از هم باشد آنگاه مجموعه‌ای مانند C موجود است که دارای یک عضو مشترک با هر عضو $\mathbf{A}$ است، یعنی به ازای هر $A \in \mathbf{A}$ مجموعهٔ $C \cap A$ فقط یک عضو دارد.

فصل ۲

گروه های توپولوژیک

در این فصل به معرفی گروه‌های توپولوژیک می پردازیم. در بخش اول تعاریف و مفاهیم اساسی این گروه‌ها، گروه های نیم توپولوژیک و گروه های پاراتوپولوژیک را بررسی می کنیم. در بخش دوم دستگاه همسایگی و دستگاه اساسی همسایگی و نتایج و قضایای مرتبط با آنها را بیان می کنیم. در بخش سوم نیز اصول موضوع جداسازی را معرفی و چند قضیه مربوط به آن را اثبات می کنیم. در نهایت در بخش چهارم زیرگروه‌ها را معرفی می کنیم و در بخش پنجم نشان می دهیم که حاصلضرب گروههای توپولوژیک و گروههای نیم توپولوژیک نیز به ترتیب گروه توپولوژیک و گروه نیم توپولوژیک خواهد بود.

۲—۱ رستهٔ گروه‌های توپولوژیک

تعریف ۲.۱.۱: هر رسته، رده ای از اشیاء A, B, C,... است به همراه:

الف— یک رده از مجموعه های از هم جدا که با $hom(A,B)$ نمایش داده می‌شوند. برای هر جفت از اشیاء A و B در رسته، $hom(A,B)$ را یک ریخت رسته نامیده و به صورت $f: A \longrightarrow B$ نمایش می‌دهند.

ب— برای هر دسته سه تایی (A,B,C) از اعضای رسته یک تابع به صورت زیر وجود دارد:

$$hom(A,B) \times hom(B,C) \longrightarrow hom(A,C)$$

$$(f,g) \longrightarrow fog$$

به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

a) خاصیت شرکت پذیری: اگر $f: A \longrightarrow B \quad , \quad g: B \longrightarrow C \quad , \quad h: C \longrightarrow D$ ریختهایی از رسته باشند آن‌گاه،

$$ho(gof) = (hog)of$$

b) عنصر همانی: برای هر B متعلق به رسته، یک ریخت $I_B: B \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که برای

$$g: B \longrightarrow C \quad , \quad f: A \longrightarrow B$$

داریم: $goI_B = g \quad , \quad I_Bof = f$

مثال ۲.۱.۲: رستهٔ S از مجموعه‌ها، شامل اشیاء C, B, A,... از مجموعه‌ها همراه با ترکیب معمولی توابع و نگاشت $I_A : a \to a$ ،$a \in A$ می‌باشد.

مثال ۳.۱.۲: رستهٔ M از گروه‌ها، شامل اشیاء C, B, A,... از گروه هاست و ریخت ها هومورفیسم گروه می‌باشند که ترکیب توابع و نگاشت همانی مانند مثال قبل تعریف می شود. اگر $f : A \longrightarrow B \quad , \quad g : B \longrightarrow C$ آنگاه gof و I_A نیز هومورفیسم گروه خواهند بود.

مثال ۴.۱.۲: رستهٔ $\mathcal{T}$ از فضاهای توپولوژیک، شامل اشیاء C, B, A,... از فضاهای توپولوژیک و ریخت ها به صورت $f : A \longrightarrow B$ تعریف می شوند که نگاشت‌هایی پیوسته هستند.

تعریف ۵.۱.۲: یک گروه نیم توپولوژیک عبارت است از یک گروه G به‌طوری که:

۱) G یک فضای توپولوژیک باشد ،

۲) نگاشت ضرب

$$g_1 : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x.y$$

در هر متغیر به طور جداگانه پیوسته باشد(توپولوژی روی $G \times G$ حاصل ضربی است).

تعریف ۶.۱.۲: یک گروه پاراتوپولوژیک عبارت است از یک گروه G به‌طوری که:

۱) G یک فضای توپولوژیک باشد ،

۲) نگاشت ضرب

$$g_1 : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x.y$$

در هر متغیر به طور همزمان پیوسته باشد.

تعریف ۷.۱.۲: یک گروه توپولوژیک عبارت است از یک گروه G به طوری که :

۱) G یک فضای توپولوژیک است،

۲) نگاشت ضرب

$$g_1 : G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto x.y$$

ونگاشت معکوس

$$g_2 : G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto x^{-1}$$

پیوسته باشند.

گزاره ۸.۱.۲: هر گروه توپولوژیک یک گروه نیم توپولوژیک است اما عکس آن لزوماً برقرار نمی باشد.

اثبات: به [۸] مراجعه شود.

تعریف ۹.۱.۲: فرض کنید G گروه توپولوژیک باشد و $U, V \subseteq G$ آنگاه UV و U^{-1} به صورت

$$UV = \{xy : x \in U \ \ , y \in V\}$$

$$U^{-1} = \{x^{-1} : x \in U\}$$

تعریف می‌شوند و اگر G گروه جمعی باشد به جای آنها از $U + V$ و $-U$ استفاده می‌شود که به صورت

$$U + V = \{x + y \mid x \in U, y \in V\}$$