دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

بررسی روشهای تحلیلی و عددی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی غیرکلاسیک

نگارش

مهدی تاتاری ورنوسفادرانی

رسالهٔ ارائه‌شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ

دکتری

زیر نظر

دکتر مهدی دهقان، دکتر محسن رزاقی

آذر ۱۳۸۶

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

قدردانی

به انجام رساندن این رساله با توجه به وجود مشکلات متعدد بدون لطف بزرگوارانی که در این راستا همواره مرا یاری نمودند، امکان پذیر نبود. به واسطه دوستی و آشنایی با این عزیزان همواره به خود بالیده و خداوند متعال را جهت برخورداری از این موهبت شاکرم.

در ابتدا کمال تشکر و قدردانی را از جناب آقای دکتر مهدی دهقان دارم. ایشان در این مدت همواره با شکیبایی وصف ناپذیر همچون پدری دلسوز به راهنمایی اینجانب نه تنها در امور علمی، بلکه بر تمامی ابعاد زندگی پرداخته‌اند. سلامتی و توفیقات روز افزون الهی را از درگاه پروردگار منان برای ایشان خواستارم.

از جناب آقای دکتر محسن رزاقی که مرا در انجام این رساله یاری نمودند، سپاسگزارم. عمیقترین سپاسها تقدیم جناب آقای دکتر مصطفی شمسی که بی‌دریغ مرا به عنوان استاد مشاور پشتیبانی کردند. از داوران گرامی جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیبان، جناب آقای دکتر سید محمد حسینی، جناب آقای دکتر حجت اله ادیبی و جناب آقای دکتر مسعود شفیعی که وقت گرانبهای خود را به داوری این رساله اختصاص دادند، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم کمال تشکر و قدردانی را از اساتید گروه ریاضی دانشگاه اصفهان به خصوص جناب آقای دکتر جعفر زعفرانی و جناب آقای دکتر مجید فخار که همیشه مشوق و راهنمای اینجانب بوده‌اند، داشته باشم.

از تمامی دوستانی که مایه دلگرمی بوده‌اند تشکر و سپاس بی‌پایان دارم. در این راستا از کمکهای جناب آقای دکتر بهنام سپهریان و جناب آقای دکتر مهدی امید علی بسیار بهره برده‌ام.

در انتها، این رساله را با کمال افتخار به پدر، مادر، همسر، برادر و خواهرانم که در این مدت مرا در تمام شرایط یاری نمودند، تقدیم می‌کنم.

بررسی روشهای تحلیلی و عددی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی غیرکلاسیک

چکیده

با توجه به اهمیت روز افزون معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی غیرکلاسیک در مدلسازی مسایل فیزیک و مهندسی، اینگونه معادلات زمینه مهمی از تحقیق را پدید آورده‌اند. این معادلات توجه بسیاری از پژوهشگران را در مورد خوش وضعی، وجود، یکتایی و یافتن جواب تحلیلی و عددی مساله به خود اختصاص داده‌اند. در ابتدا به معرفی و بررسی روش تجزیه ادومیان به عنوان یک روش تحلیلی پرداخته می‌شود. کارایی این روش را در حل مسایل مختلف نشان داده و از آن برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی غیرکلاسیک استفاده می‌گردد. همچنین همگرایی این روش تحت شرایط خاصی بررسی خواهد شد. در ادامه به ذکر نقاط ضعف این روش پرداخته و لزوم استفاده از روشهای عددی خاطر نشان می‌گردد. در این راستا روشهای بدون شبکه مورد مطالعه قرار گرفته و جایگاه این روشها در بین روشهای تفاضلات متناهی، روشهای عناصر متناهی، روشهای عناصر مرزی و روشهای طیفی بیان می‌گردد. همچنین از توابع پایه شعاعی بی نهایت بار مشتق پذیر با محمل سراسری به عنوان یک روش بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی غیرکلاسیک استفاده می‌گردد. در انتها نیز ضمن معرفی جواب اساسی معادله گرما به حل مساله یک بعدی مقدار اولیه گرما روی بازه‌های متناهی با استفاده از جواب اساسی آن می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی معکوس، مسایل مقدار مرزی سهموی غیر موضعی، روش تجزیه ادومیان، توابع پایه شعاعی، روش جوابهای اساسی.

فهرستِ مطالب

نمادگزاریها

$\mathbb{N}$	مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی
$\mathbb{Z}$	مجموعهٔ اعداد صحیح
$\Bbbk$	میدان
$\gcd$	بزرگترین مقسوم علیه مشترک
$\#A$	عدد کاردینال مجموعهٔ A
$a \bmod b$	باقیماندهٔ تقسیم صحیح a به b
$a \mid b$	b بر a بخش‌پذیر است
$a \nmid b$	b بر a بخش‌پذیر نیست
$\mathscr{S}$	یک مجموعه از اعداد صحیح مثبت مجزای نسبت به هم اول
$I_{\mathscr{S}}$	ایده‌آل توریک وابسته به $\mathscr{S}$
I_σ	ایده‌آل تعریف خم Γ
$\Bbbk[S]$	$\Bbbk$ ـ جبر نیمگروهی وابسته به S
S	نیمگروه آفین (مشمول در یک $\mathbb{Z}^n$)
$\mathrm{Hilb}(S)$	پایهٔ هیلبرت S
σ	نیمگروه عددی
$e(\sigma)$	بعد نشاندن σ
$F(\sigma)$	عدد فرابنیوس σ
$\sigma(n)$	مجموعه اپری وابسته به $n \in \sigma$
$\mathrm{type}(\sigma)$	نوع کوهن ـ مکولی σ
$\mathrm{unStable}(\sigma)$	مجموعهٔ عناصر ناپایدار σ
$\mathrm{Stable}(\sigma)$	مجموعهٔ عناصر پایدار σ
$\mathrm{StdBasis}(\sigma)$	پایهٔ پایدار σ

$\mathrm{StbBasis}(\sigma)$	پایهٔ استاندارد σ
$\mathrm{ord}_{\mathscr{S}}(a)$	$\mathscr{S}$ ـ مرتبهٔ a
H_M	تابع هیلبرت مدول M
$\beta_{i,j}$	اعداد بتی
$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}$	فانکتور همانستگی موضعی
P_M	چند جمله‌ای هیلبرت
$\mathrm{Supp}(M)$	مجموعهٔ ایده‌آلهای اول محمل M
$\mathrm{projdim}(M)$	بعد پروژکتیو M
$\mathrm{depth}(M)$	عمق M
$\dim(M)$	بعد کرول M
$a(M)$	ناوردای a مدول M
$\mathrm{reg}(M)$	نظم کاستلنوو ـ مامفورد M
$\lceil r \rceil$	کوچکترین عدد صحیح نا کمتر از r
$\lfloor r \rfloor$	بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از r
Δ	عملگر تفاضلات متناوب
Γ	خم تکجمله‌ای آفین
$\mathfrak{C}$	خم تکجمله‌ای تصویری
Xel	ترتیب قاموسی معکوس
$\mathrm{in}(\mathfrak{a})$	ایده‌آل تکجمله‌ای پیشرو
$\mathrm{in}(f)$	جملهٔ پیشرو f
$\mathfrak{a}_M$	ایده‌آل توریک تعریف شده توسط ماتریس M
$\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$	فضای آفین n ـ بعدی روی $\Bbbk$
$\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$	فضای تصویری n ـ بعدی روی $\Bbbk$

فصل ۱

پیشگفتار

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی توسط معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیر کلاسیک سهموی مدلسازی می‌گردند. در اینجا منظور از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیر کلاسیک عبارت است از

۱) معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی معکوس. در این نوع مسایل علاوه بر جواب مساله یک پارامتر وابسته به زمان که به صورت ضریبی از جواب در معادله ظاهر می‌گردد نیز مجهول می‌باشد. علاوه بر شرایط اولیه و مرزی یک شرط اضافی نیز داده می‌شود. این شرط اضافی می‌تواند به صورت مقدار جواب در یک نقطه دامنه یا انتگرالی شامل جواب مساله روی دامنه مورد نظر باشد.

۲) معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی غیر موضعی. در این نوع مسایل همه شرایط مرزی معادله دیفرانسیل پاره‌ای سهموی یا برخی از آنها به صورت انتگرالی شامل جواب مساله داده می‌شوند. حدود انتگرالگیری می‌تواند تمام دامنه مساله یا قسمتی از آن باشد.

اهمیت این معادلات به اندازه‌ای می‌باشد که با وجود گذشت زمان نسبتا کمی از مطرح شدن این مسایل کارهای زیادی در رابطه با شرایط وجود و یکتایی جواب و نیز خوش وضعی مساله انجام شده است. همچنین حل عددی این مسایل نیز توجه تعداد زیادی از پژوهشگران را به خود اختصاص داده است. در این رساله سعی بر ارایه روشهای عددی و تحلیلی برای حل این مسایل می‌باشد.

در فصل دوم از این رساله در ابتدا به معرفی روش تجزیه ادومیان که یک روش تحلیلی است، پرداخته می‌شود. در سالهای اخیر در مورد جنبه‌های مختلف

این روش کارهای زیادی صورت گرفته است. متاسفانه در برخی از آثار منتشر شده در این زمینه با وجود اشاره به کارایی و ذکر مزایای این روش، اشاره‌ای به نقاط ضعف این روش نگردیده است. در برخی از موارد توصیف این روش به گونه‌ای اغراق آمیز بوده که حتی استفاده از روشهای عددی مثل روشهای تفاضلات متناهی، روشهای عناصر متناهی و غیره روشهایی کم دقت و پر هزینه معرفی شده‌اند. این در حالی است که روش تجزیه ادومیان نیز همانند روشهای عددی یا تحلیلی دیگر در همه موارد کارا نمی‌باشد. برای نشان دادن نقاط ضعف و قوت این روش مسایلی را با به کار بردن این روش حل می‌کنیم که برای اولین بار توسط این روش مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در ابتدا به یافتن اکسترمم یک تابعی به عنوان یک مساله حساب تغییرات پرداخته می‌شود. ایده حل این مسایل توسط روش ادومیان حل معادله اویلرـلاگرانژ نظیر به مساله تغییراتی می‌باشد. در ادامه به حل مسایل مقدار مرزی چند نقطه‌ای پرداخته می‌شود [21]. با توجه به مثالهای ارایه شده به طور کلی می‌توان گفت که روش ادومیان روشی است که به سادگی به کار گرفته می‌شود و از کارایی بالایی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی برخوردار می‌باشد.

حل معادله لاپلاس روی قرص با استفاده از فرمولبندی انتگرال مرزی و روش تجزیه ادومیان ارایه گردیده است [59]. استفاده از فرمولبندی انتگرال مرزی به عنوان ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای توسط روش تجزیه ادومیان که برای اولین بار در اینجا مطرح شده، می‌تواند به عنوان روشی برای پیاده سازی روش تجزیه ادومیان روی اینگونه معادلات به کار رود.

به عنوان کاربرد دیگری از روش تجزیه ادومیان به حل معادله دیفرانسیل جزیی فوکر پلانک پرداخته شده است [60]. در این رابطه به معرفی حالات خطی و غیر خطی این معادله و معادلات مشابه پرداخته شده و ضمن ارایه مثالهایی به نقاط ضعف و قوت این روش اشاره شده است. عمده نقاط ضعف این روش عدم اطلاع قبلی از روند همگرایی روش و غیر ممکن بودن یافتن تمام جملات سری جواب می‌باشد که منجر به محدود شدن دامنه همگرایی جواب می‌شود.

در فصل سوم به مطالعه روش ادومیان برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی معکوس پرداخته می‌شود. همگرایی روش تحت شرایط خاصی نشان داده می‌شود [26, 27, 61]. با توجه به مشکلات گفته شده در به کار گیری روش تجزیه ادومیان، لزوم استفاده از روشهای عددی برای حل این نوع از مسایل خاطر نشان می‌گردد.

روشهای بدون شبکه به عنوان خانواده‌ای از روشهای عددی می‌باشند که برای حل مسایل مختلف به کار می‌روند. مزیت استفاده از این روشها عدم نیاز به تولید یک شبکه منظم در دامنه مساله می‌باشد. از آنجایی که تولید شبکه در دامنه مساله مستلزم صرف هزینه زیادی در روشهای وابسته به شبکه می‌باشد، استفاده از این روشها در سالهای اخیر بسیار مورد توجه بوده است.

در فصل چهارم به حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی غیر کلاسیک با استفاده از توابع پایه شعاعی بی‌نهایت بار مشتق پذیر با محمل سراسری پرداخته می‌شود. در حقیقت انتقالهایی از این توابع مستقل خطی می‌باشند که به عنوان پایه‌های تقریب به کار می‌روند. از جمله کاربردهای این توابع می‌توان به درونیابی چند بعدی اشاره نمود. البته همانطور که می‌دانیم استفاده از چند جمله‌ایها در درونیابی چند بعدی همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد. استفاده از این توابع به عنوان روشی بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای شناخته می‌شود.

در ابتدا از این توابع برای گسسته سازی متغیرهای زمان و فضا در کل دامنه برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یک بعدی استفاده می‌کنیم [28, 62]. با توجه به قابلیت بالای این روش در به کار گیری در ابعاد بالاتر، گسسته سازی هر دو متغیر کار ساده ای می‌باشد. مشکل اساسی در این کار بد وضعی ماتریس حاصل از گسسته سازی معادله می‌باشد که با بزرگتر شدن ابعاد ماتریس این مشکل نمایان‌تر می‌گردد. با توجه به عدد شرطی بالای این ماتریس، خوش حالت کردن آن کار ساده‌ای نمی باشد. استفاده از روشهای تفاضلات متناهی برای گسسته سازی متغیر زمان و استفاده از توابع پایه شعاعی برای گسسته سازی متغیر فضا در سطوح زمانی کار مفیدی نمی‌باشد. زیرا با توجه به بد وضع بودن ماتریس حاصل از گسسته سازی متغیر فضا و خطای برشی تقریب مشتق در گسسته سازی متغیر زمان، تقریب مناسبی به خصوص برای مقادیر بزرگتر از زمان به دست نمی‌آید [29].

برای برطرف کردن این مشکل ابتدا مساله را در کل دامنه فضایی و یک بازه کوچک ابتدایی از دامنه زمانی با استفاده از گسسته سازی متغیرهای فضا و زمان توسط توابع پایه شعاعی حل می‌کنیم. سپس مساله برای زیر بازه‌های زمانی دیگر با استفاده از جواب بدست آمده از حل مساله در زیر دامنه قبلی حل می‌شود. قابل ذکر است در صورتی که آرایش نقاط در هر زیر دامنه یکسان اختیار گردد با توجه به خاصیت شعاعی بودن توابع استفاده شده، ماتریس بدست آمده از گسسته سازی در هر زیر دامنه یکسان خواهد بود. بنابراین فقط نیاز به یکبار تجزیه کردن یک ماتریس با بعد پایین می‌باشد. برای بدست آوردن جواب در زیر

دامنه‌های بعدی فقط نیاز به یک جایگذاری پیشرو و پسرو می‌باشد. با اینکار در زمان محاسبه صرفه‌جویی شده و بدست آوردن جواب برای مقادیر بزرگتری از زمان نیز امکان‌پذیر می باشد [63]. در ادامه نیز یک روش موضعا یک بعدی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی دو بعدی ارایه می‌گردد [65].

در فصل پنجم این رساله به معرفی جواب اساسی مساله مقدار اولیه گرما پرداخته می گردد. استفاده از جواب اساسی یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای حل عددی آن معادله در موارد بسیاری به کار گرفته شده است. کارهای انجام شده در این زمینه ذکر می‌گردد. همچنین با استفاده از جواب اساسی مساله مقدار اولیه گرما به حل عددی این معادله روی بازه‌های متناهی می‌پردازیم. همگرایی روش نیز تحت شرایط خاصی بررسی می‌گردد [64].

در این رساله سعی بر آن بوده که مطالب به طریقی ساده و عاری از هرگونه مقدمات اضافی ارایه گردند.

فصلِ ۲

روش تجزیه ادومیان

۱.۲ مقدمه

روش تجزیه ادومیان[۱] برای اولین بار توسط ریاضیدان آمریکایی، ادومیان (۱۹۲۳ تا ۱۹۹۶) معرفی گردید. این روش برای حل معادلاتی به شکل زیر مفید می‌باشد

$$u = \Theta(u) + h,$$

که در آن Θ یک عملگر (خطی یا غیرخطی)، h یک تابع داده شده و u نامعلوم می‌باشد. این روش جواب را به صورت یک سری نامتناهی به صورت زیر

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

در نظر می‌گیرد که در آن

$$u_0 = h,$$

$$u_n = A_{n-1},$$

که در آن A_nها چندجمله‌ایهای ادومیان[۲] می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [1, 2]

$$A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\Theta\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\Big|_{\lambda=0}, \ \ n = 0, 1, 2, ...,$$

[1] Adomian Decomposition Method

[2] Adomian's polynomials

این روش یک روش تحلیلی محسوب می‌گردد ولی با توجه به همگرایی سریع آن می‌توان مجموعِ جزیی سری جواب را

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} u_n,$$

به ازای یک m به اندازه کافی بزرگ، به عنوان تقریب مناسبی برای جواب در نظر گرفت. همگرایی روش در [1, 2] نشان داده شده است. همچنین در برخی از مسایل غیر خطی که امکان محاسبه چندجمله‌ایهای ادومیان وجود ندارد یا مشکل است محاسبه تنها تعداد محدودی از جملات دقت قابل قبولی از جواب را فراهم می‌کند.

در برخی از موارد در جملات سری جواب جملاتی با علامت مخالف و قدر مطلق یکسان ظاهر می‌گردند، این جملات، جملات نویز و این حالت پدیده نویز[3] نامیده می‌شود. این حالت که بروز آن فقط برای معادلات غیر همگن ممکن است این امکان را فراهم می‌کند که جواب مساله را فقط با استفاده از دو جمله از سری جواب یافت. اطلاعات بیشتر در این زمینه را می‌توان در [68] و مراجع موجود در آن یافت.

روش تجزیه ادومیان به حل مساله بدون گسسته‌سازی مساله می‌پردازد لذا عدم نیاز به حل دستگاههای خطی یا غیرخطی حاصل از روشهای عددی و نیز اجتناب از ناپایداریهای عددی از مزایای این روش می‌باشد. روش مذکور برای حل انواع مختلفی از مسایل مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال در [42] این روش برای حل مساله کوشی برای معادلات گرما و موج به کار گرفته شده است. در [46] معادله فیشر با استفاده از این روش مورد مطالعه قرار گرفته است. در [4] روش جدیدی برای محاسبه چندجمله‌ایهای ادومیان ارایه شده است. همچنین در [17] این روش به عنوان ابزاری برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری به کار گرفته شده است.

با توجه به اینکه در برخی از موارد یافتن تعداد محدودی از جملات سری جواب میسر می‌باشد، در دامنه کوچکی سری جواب تقریب مناسبی را برای جواب مساله پدید می‌اورد. یک روش بسیار کارا برای افزایش دامنه همگرایی روش تجزیه ادومیان با استفاده از تقریب پاده در [34] ارایه شده است. در بخشهای بعد به معرفی مسایلی پرداخته می‌شود که با وجود غیرخطی بودن به راحتی قابل حل توسط روش تجزیه ادومیان می‌باشند.

---

[3] Noise phenomena

با وجود محاسن گفته شده در مورد روش تجزیه ادومیان، در برخی از موارد استفاده از این روش امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال در مواقعی که این روش برای حل یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد در صورت جدایی ناپذیر بودن جواب مساله، تعداد کمی ازجملات سری جواب قابل محاسبه می‌باشند. لذا در ادامه برای مطالعه روی مسایل مربوطه به یک روش عددی روی می‌آوریم.

۲.۲ مسایل حساب تغییرات

در تعداد زیادی از مسایل ناشی از آنالیز، مکانیک، هندسه و غیره یافتن ماکزیمم یا می‌نیمم یک تابعی لازم می‌شود. به خاطر اهمیت این موضوع در علوم و مهندسی، تلاشهای زیادی برای حل این مسایل که تحت عنوان مسایل تغییراتی نامیده میشوند، صورت گرفته است.

به عنوان یک مثال بارز از این نوع مسایل می‌توان به مساله براچیستکرون[۴] اشاره نمود که در سال ۱۶۹۶ توسط یوهان برنولی[۵] مطرح گردید. در این مساله هدف یافتن منحنی است که دو نقطه ثابت A و B را که در سطوح متفاوتی از افق قرار گرفته‌اند را به گونه‌ای به یکدیگر متصل نماید که یک جسم متحرک روی این منحنی در کوتاهترین زمان از نقطه بالاتر به نقطه پایین‌تر برسد. این مساله توسط یوهان برنولی، یاکوب برنولی[۶]، لایب نیتز[۷]، نیوتن[۸] و هپیتال[۹] حل شده و نشان داده شده است که جواب این مساله قطعه‌ای از یک چرخزاد می‌باشد.

اطلاعات بیشتر در این زمینه را می‌توان در [30, 31] یافت.

یک مساله تغییراتی در ساده‌ترین حالت به صورت زیر می‌باشد

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$$

[4] Brachistochrone

[5] Johann Bernoulli

[6] Jacob Bernoulli

[7] Leibnitz

[8] Newton

[9] L'Hospital

که در آن v یک تابعی می‌باشد که اکسترمم آن باید یافته شود. برای یافتن اکسترمم این تابعی نقاط مرزی منحنیهای مجاز به صورت زیر داده می‌شوند:

$$y(x_0) = \alpha, \quad y(x_1) = \beta. \tag{۱}$$

یکی از راههای یافتن جواب مسایل تغییراتی، روشهای مستقیم می‌باشند که در این روشها جواب مساله تغییراتی به صورت ترکیب خطی از توابع مستقل خطی نوشته می‌شود. سپس با استفاده از روشهای عددی جواب مساله تغییراتی پیدا می‌شود [50, 51]. در مقابل این روشها، روشهای غیرمستقیم می‌باشند. در این روشها به حل معادله اویلر_لاگرانژ[۱۰] نظیر به مساله تغییراتی پرداخته می‌شود. در حقیقت یک شرط لازم برای جواب مساله تغییراتی با شرایط مرزی داده شده این است که در معادله اویلر_لاگرانژ به صورت زیر صدق کند:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

شرایط مرزی نظیر به این معادله در (۱) داده شده است. این مساله مقدار مرزی لزوما دارای یک جواب منحصربفرد نمی‌باشد. در بسیاری از مسایل تغییراتی وجود جواب مساله تغییراتی با توجه به مفهوم فیزیکی یا هندسی مساله واضح می‌باشد. در نتیجه اگر جواب معادله اویلر_لاگرانژ با شرایط مرزی یکتا باشد دراین صورت جواب بدست آمده، جوابی برای مساله تغییراتی است [30].

معادله اویلر_لاگرانژ معمولا غیرخطی است و حل آن کار ساده‌ای نیست. در این بخش با ارایه یک مثال کارایی روش ادومیان را برای حل این معادلات نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۲.۲ مساله براچیستکرون زیر را در نظر بگیرید

$$\min v = \int_0^1 \left[\frac{1 + y'^2(x)}{1 - y(x)} \right]^{1/2} dx,$$

با شرایط مرزی داده شده به صورت زیر

$$y(0) = 0, \quad y(1) = -0.5.$$

معادله اویلر_لاگرانژ نظیر به این مساله تغییراتی به شکل زیر است

$$y'' = -\frac{1}{2} \frac{1 + y'^2}{y - 1},$$

[10] Euler-Lagrange equation

که می‌توان آن را به صورت زیر هم نوشت

$$y(x) - y(0) - y'(0)x = -\int_0^x \int_0^{t_2} \frac{1}{2}\frac{1 + y'^2(t_1)}{y(t_1) - 1} dt_1 dt_2.$$

حال با به کار گیری روش تجزیه ادومیان و با توجه به شرایط مرزی، جملات سری جواب به صورت زیر بدست می‌آیند

$$y_0(x) = y'(0)x,$$

$$y_{n+1}(x) = -\int_0^x \int_0^{t_2} N_n dt_1 dt_2, \quad n \geq 0,$$

که در آن

$$N_n(y_0, y_1, ..., y_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\Big|_{\lambda=0}, \;\; n = 0, 1, 2, ...,$$

و

$$N(y) = \frac{1}{2}\frac{1 + y'^2}{y - 1}.$$

قابل ذکر است که یافتن مقادیر همه $y_n(x)$ها امکان‌پذیر نمی‌باشد. با اعمال شرایط مرزی در $x = 1$ روی تقریب چهار جمله‌ای حاصل از روش تجزیه ادومیان

$$\phi_3 = \sum_{k=0}^{3} y_k,$$

و حل معادله غیر خطی مربوطه داریم

$$y'(0) = -0.785031.$$

و حل در این حالت داریم [21]

$$v(\phi_3) - v(y) = 0.2232 \times 10^{-6}.$$

نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که روش تجزیه ادومیان می‌تواند برای حل مسایل غیرخطی کارا و از دقت بالایی برخوردار است. در روشهای مستقیم عددی برای حل مسایل تغییراتی معمولا نیاز به حل یک دستگاه غیرخطی از معادلات

می‌باشد که حل این دستگاه معادلات غیرخطی مستلزم صرف وقت و انرژی زیادی می‌باشد. اما همانگونه که در مثال فوق دیده شد روش تجزیه ادومیان بدون نیاز به حل دستگاه غیرخطی یک جواب تقریبی با دقت قابل قبول و فرم بسته تولید می‌کند. نکته دیگر در این مورد این است که دربرخی از مسایل غیرخطی امکان محاسبه تمام جملات در سری جواب امکان پذیر نمی‌باشد ولی همانطور که دیده شد حتی محاسبه تعداد محدودی از جملات سری مذکور تقریب مناسبی را برای جواب فراهم می‌کند.

۳.۲ مسایل مقدار مرزی چند نقطه‌ای

مسایل مقدار مرزی چند نقطه‌ای در مدلسازی تعداد زیادی از مسایل فیزیکی ظاهر می‌گردند [66]. معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه n به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ...y^{(n-1)}).$$

فرض کنید $x \in [0,1]$ و نیز g به گونه‌ای باشد که معادله فوق به ازای m نقطه با $m \leq n$، داده شده از جواب یا مشتقاتی از جواب، دارای جواب منحصربفرد باشد. دراین صورت به مساله فوق یک مساله مقدار مرزی m نقطه‌ای[11] گفته می‌شود. کارهای زیادی روی جنبه‌های نظری این نوع از مسایل انجام گرفته است [45, 69]. با این وجود تلاش زیادی برای حل عددی اینگونه معادلات صورت نگرفته است. با توجه به ساختار این مسایل و نیز نحوه عملکرد روش ادومیان، حل اینگونه از مسایل با استفاده از روش ادومیان به خوبی امکان پذیر می‌باشد.

مثال ۱.۳.۲ معادله دیفرانسیل معمولی سه نقطه‌ای مرتبه سوم [36]

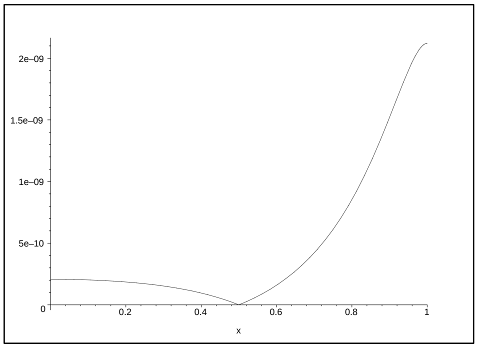
$$y''' - k^2 y' + a = 0,$$

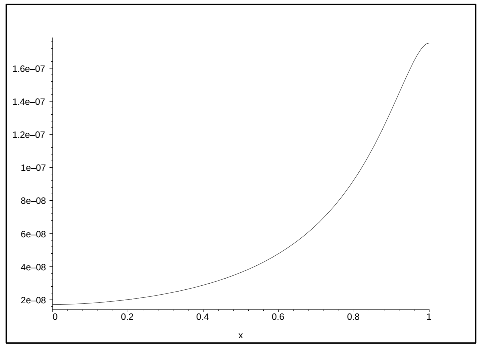
با شرایط مرزی

$$y'(0) = y'(1) = 0, \quad y(0.5) = 0,$$

را در نظر بگیرید که در آن ثابتهای فیزیکی $k = 5$ و $a = 1$ داده شده‌اند. تابع $y(x)$ نشان دهنده جابجایی در یک میله گرد می‌باشد. جواب تحلیلی این مساله به

[11] m-point boundary value problem





شکلِ ۲.۱: نمودار خطای $|\phi_{10}-y|$ (سمت چپ) و $\frac{|\phi_{10}-y|}{|y|}$ (سمت راست).

صورت زیر است

$$y(x)=\frac{a}{k^3}\left(\sinh\frac{k}{2}-\sinh kx\right)+\frac{a}{k^2}(x-\frac{1}{2})+\frac{a}{k^3}\tanh\frac{k}{2}\left(\cosh kx-\cosh\frac{k}{2}\right).$$

با به کار بردن روش تجزیه ادومیان برای این مساله داریم

$$y=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2}y''(0)-L^{-1}(1)+L^{-1}(25y'(t_1)),$$

که در آن

$$L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}dt_1dt_2dt_3.$$

با قرار دادن $A_0=y_0$ و $A_2=y''(0)$ داریم

$$\begin{aligned}y_0&=A_0+A_2\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{1}{6}x^3,\\ y_1&=\tfrac{25}{24}A_2x^4-\tfrac{5}{24}x^5,\end{aligned}$$

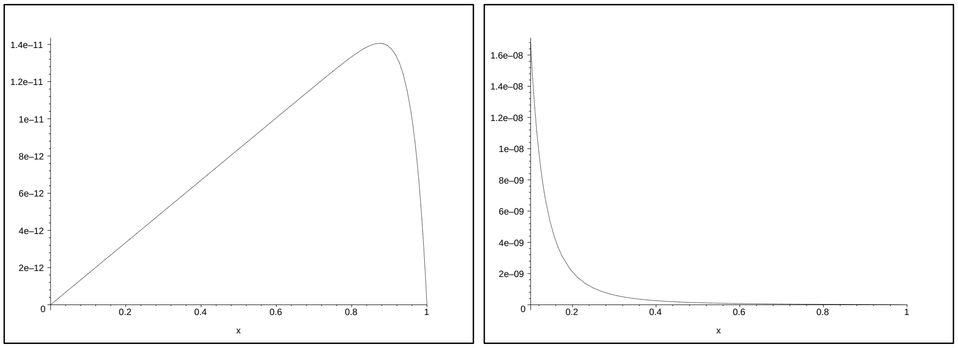
و الی آخر. با استفاده از یازده جمله از سری جواب به عنوان تقریبی از جواب اصلی و استفاده از شرایط مرزی در $x=0.5$ و $x=1$ مقادیر A_0 و A_2 به صورت زیر یافته می‌شوند

$$A_0=-0.1210,\quad A_2=0.1973.$$

در شکل ۲.۱ مقادیر $|\phi_{10}-y|$ و $\frac{|\phi_{10}-y|}{|y|}$ نشان داده شده‌اند.

مثال ۲.۳.۲ در این مثال معادله دیفرانسیل غیر خطی چهار نقطه‌ای مرتبه چهارم [36]

$$y^{(4)}+yy'-4x^7-24=0,\quad 0\le x\le 1,$$



شکلِ ۲.۲: نمودار خطای $|\phi_2 - y|$ (سمت چپ) و $\frac{|\phi_2-y|}{|y|}$ (سمت راست).

را با شرایط مرزی

$$y(0) = 0, \quad y^{(3)}(0.25) = 6, \quad y''(0.5) = 3, \quad y(1) = 1,$$

در نظر می‌گیریم. جواب دقیق این مساله برابر است با $y = x^4$. در این مساله داریم

$$y = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^6}{6}y^{(3)}(0) + L^{-1}(4t_1^7 + 24) - L^{-1}(y(t_1)y'(t_1)),$$

که در آن

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} (.)dt_1dt_2dt_3dt_4.$$

با به کارگیری روش تجزیه ادومیان برای حل این مساله داریم

$$y_0 = A_1x + \tfrac{1}{2}A_2x^2 + \tfrac{1}{6}A_3x^3 + \tfrac{1}{1980}x^{11} + x^4,$$
$$y_n = -L^{-1}(N_n), \quad n \geq 1,$$

که در آن $A_i = y^{(i)}$ به ازا $i = 1, 2, 3$ و $N_n(x) = N_n(y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x))$ چند جمله‌ایهای ادومیان برای عملگر غیر خطی $N(y) = yy'$ می‌باشند. با به کار گیری فقط سه جمله از سری جواب و استفاده از شرایط مرزی داریم

$$A_1 = -0.1674 \times 10^{-10}, \quad A_2 = -0.3665 \times 10^{-13}, \quad A_3 = -0.1635 \times 10^{-13}.$$

در شکل ۲.۲ نمودارهای خطای $|\phi_2 - y|$ و $\frac{|\phi_2-y|}{|y|}$ نشان داده شده‌اند.

۴.۲ معادله لاپلاس روی قرص

معادله لاپلاس را برای $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ به صورت زیر

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega,$$

با شرط مرزی دیریکله

$$u = f \text{ on } \partial\Omega,$$

در نظر بگیرید که در آن $f \in C(\partial\Omega)$ داده شده و Ω دامنه مساله به صورت یک ناحیه باز، کراندار و همبند ساده می‌باشد. نوع دیگری از شرط مرزی که برای معادله لاپلاس در نظر گرفته می‌شود، شرط مرزی نویمان برای $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\partial u}{\partial n_p} = f \text{ on } \partial\Omega,$$

که در آن $f \in C(\partial\Omega)$ و n بردار نرمال خارجی می‌باشد که در هر نقطه p روی $\partial\Omega$ بر آن عمود است. معادله لاپلاس یک مدل بسیار معروف می‌باشد و مطالعات زیادی در مورد آن صورت گرفته است. در [35] این معادله از لحاظ نظری و نیز حل عددی مورد بررسی دقیق قرار گرفته است. روش جوابهای اساسی برای حل این معادله با شرایط مرزی دیریکله روی قرص در [57] به کار گرفته شده است. به عنوان کاربرد این معادله در حساب تغییرات، می‌توان به این نکته اشاره کرد که شرط لازم برای تابع $u(x,y)$ که اکسترمم تابعی

$$v[u(x,y)] = \int\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy,$$

باشد این است که در معادله لاپلاس با شرط مرزی دیریکله رو ی Ω صدق کند.

برای حل این معادله با استفاده از روش تجزیه ادومیان روی ناحیه باز Ω، در ابتدا معادله اصلی به صورت یک معادله انتگرال روی مرز Ω نوشته می‌شود این فرمولبندی مجدد، فرمولبندی انتگرال مرزی معادله انتگرال مرزی نامیده می‌شود.

نمایش دو لایه‌ای[۱۲] برای تابع همساز در معادله لاپلاس روی نقاط درونی ناحیه Ω به شکل زیر می‌باشد [5]

$$u(A) = \int_{\partial\Omega} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} [\log |A - Q|] d\sigma_Q, \quad A \in \Omega. \qquad (۲)$$

[12] Double layer representation