دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان :

روش تکراری دفتردار - جعفری و بهبود آن برای حل معادلات تابعی

استاد راهنما :

دکتر حسین جعفری

استاد مشاور :

اله بخش یزدانی چراتی

نگارش :

مریم احمدی حاجی

تیر ماه ۱۳۹۱

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که هستی مان بخشید و به طریق علم و معرفت رهنمونمان کرد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر حسین جعفری که با راهنمایی های سازنده همواره مرا مورد لطف خویش قرار داده اند تقدیر و تشکر می کنم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر اله بخش یزدانی چراتی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفته اند نهایت تشکر را دارم.

از اساتید محترم گروه آقایان پرفسور قاسم علیزاده افروزی، دکتر حسن حسین زاده، دکتر ماشاالله متین فر، دکتر سید هادی ناصری و همچنین مدیر محترم گروه جناب آقای دکتر علی تقوی که برای ادامه راه مرا یاری نموده اند کمال تشکر را دارم.

در نهایت از خانواده عزیزم که در طول تحصیل مشوق و پشتیبانم بوده اند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

مریم احمدی حاجی تیرماه ۱۳۹۱

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم : به خاطر زحمات بی دریغشان

همسر مهربان و فرزند نازنینم : که صبورانه همراهی ام نموده اند تا بتوانم در کمال آرامش و آسایش به تهیه و تنظیم این پایان نامه بپردازم .

فهرست مطالب

چکیده :

در این پایان نامه به معرفی توابع حساب کسری و برخی از خواص آنها پرداخته ایم سپس مفهوم مشتق و انتگرال از مرتبه غیر صحیح را معرفی و همچنین خواص و ارتباط بین آنها را مطرح کرده ایم و نحوه حل معادلات به روش تجزیه آدومیان ،روش هموتوپی و روش تکراری ارائه شده توسط پرفسور دفتردار و دکتر جعفری (روش دفتردار-جعفری) می پردازیم. سپس همگرایی روش دفتردار-جعفری را بیان می کنیم. در پایان به مقایسه روش دفتردار-جعفری با روش آدومیان و روش هموتوپی پرداخته ایم.

کلمات کلیدی :

حساب کسری؛ روش تجزیه آدومیان؛ روش هموتوپی؛ روش دفتردار-جعفری ؛ مسایل مقدارمرزی منفرد؛ معادله موج کسری

فصل ۱

تعاریف- مفاهیم اولیه

۱.۱ توابع پایه حساب کسری

در این بخش به معرفی توابع گاما[۱]، بتا[۲] و میتاگ لفلر[۳] می پردازیم. این توابع نقش مهمی را در مشتق گیری و انتگرال گیری از مرتبه دلخواه ایفا می کنند.

۱.۱.۱ تابع گاما

بدون شک یکی از توابع پایه حساب کسری، تابع گامای اویلر $\Gamma(z)$ است، که در سال ۱۷۲۹ توسط اویلر [۴] ارائه شده است در واقع $n!$ را تعمیم داده، اجازه می دهد که n مقادیر ناصحیح و حتی مقادیر مختلط را نیز اختیار کند.

تابع گاما $\Gamma(z)$، به صورت زیر تعریف می شود :

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{z-۱} dt, \tag{۱.۱}$$

که در نیمه راست صفحه مختلط، $Re(z) > ۰$ همگرا می شود. یعنی داریم :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+iy) &= \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{x-۱+iy} dt = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{x-۱} e^{iy\log(t)} dt \\ &= \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{x-۱} [\cos(y\log(t)) + i\sin(y\log(t))] dt \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

عبارت داخل براکت در (۲.۱) بازای هر t کراندار است.

- **خواص تابع گاما**

یکی از خواص پایه‌ای، اما مهم تابع گاما به صورت :

$$\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z), \tag{۳.۱}$$

است که به آسانی با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء اثبات می شود :

$$\Gamma(z+۱) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{z} dt = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_{t=۰}^{t=\infty} + z\int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{z-۱} dt = z\Gamma(z)\,.$$

[۱] Gamma
[۲] Beta
[۳] MittagLeffler
[۴] Euler

به وضوح $\Gamma(1) = 1$ است و برای $z = 1, 2, 3, \dots$ با استفاده از (۳.۱) داریم :

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n.\,\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!$$

هنگامی که : $Re(z) < 0$ ، تابع گاما را به صورت زیر تعمیم می دهیم :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\dots(z+k-1)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots, -k+1. \tag{4.1}$$

که در رابطه بالا k یک عدد صحیح می باشد. این رابطه را می توان برای تعریف تابع گاما برای هر z ای که بخش حقیقی آن نا مثبت باشد، استفاده کرد. تعدادی از این مقادیر را در جدول (۱.۱) می بینیم:

$\Gamma(1) = 1$	$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(-1) = \pm\infty$
$\Gamma(2) = 1$	$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(0) = \pm\infty$
$\Gamma(3) = 2$	$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

جدول۱.۱: تعدادی از مقادیر گاما

برخی از خواص تابع گاما را به صورت زیر بیان می کنیم :

$$i)\ \ \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

$$ii)\ \ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$iii)\ \ \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\dots(z+k-1)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots, -k+1,$$

$$iv)\ \ \Gamma(z)\Gamma(z-1)=\frac{\pi}{sin(\pi z)},\quad z\neq 0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$$

$$v)\ \ \Gamma(n+1)=n!,\quad n=1,2,\cdots$$

$$vi)\ \ \Gamma(-z)=\frac{-\pi csc(\pi z)}{\Gamma(z+1)}$$

$$vii)\ \ \Gamma(mz)=\frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{\frac{(m-1)}{2}}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma(z+\frac{k}{m}),\qquad z\in C, m\in N-\{1\}$$

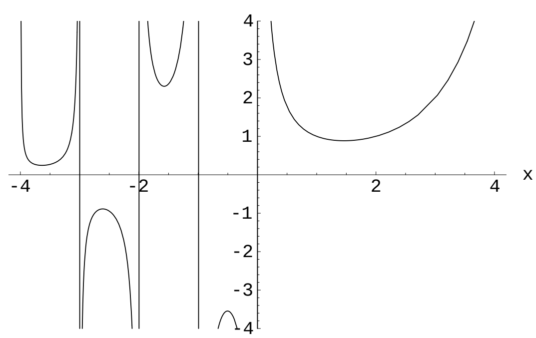
$$viii)\ \ \Gamma(n+1)\approx\sqrt{2\pi n}n^{n}e^{-n},\qquad n\to\infty$$

آخرین رابطه را دستور استرلینگ گویند.

اثبات هر یک از موارد بالا در [۳] ، [۳۰] آمده است. تابع گاما را می توان به صورت حدی نیز نمایش داد :

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)\ldots(z+n)}, \tag{۵.۱}$$

در شکل (۱.۱) نمودار تابع گاما رسم شده است.



شکل ۱.۱: نمودار تابع گاما

۲.۱.۱ تابع بتا

در بسیاری موارد استفاده از تابعی به نام تابع بتا، به جای ترکیب خاصی از مقادیر تابع گاما مناسب تر است.

تابع بتا معمولاً به صورت زیر تعریف می شود :

$$\beta(z,w)=\int_{0}^{1}\tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau\ \ ,\ \ (Re(z)>0, Re(w)>0\ ), \tag{۶.۱}$$

برای به دست آوردن رابطه بین تعریف تابع گاما در (۱.۱) و تعریف تابع بتا در (۶.۱) از تبدیل لاپلاس کمک می گیریم و به تساوی زیر می رسیم [۳۰] :

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\ , \tag{۷.۱}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که :

$$\beta(z,w)=\beta(w,z)\ \ .$$

به کمک تابع بتا می توان دو رابطه مهم زیر را برای تابع گاما به دست آورد[۳۰]:

با قرار دادن $z=\frac{1}{2}$ در رابطه:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)}\ \ (z\neq 0,\pm 1,\pm 2,\dots)\ , \tag{۸.۱}$$

به نتیجه زیر دست می یابیم:

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\ ,$$

دست می یابیم و با قرار دادن $z=n+\frac{1}{2}$ در تساوی :

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z)\ \ (2z\neq 0,-1,-2,\dots)\ ,$$

به مجموعه ای از مقادیر خاص تابع گاما می رسیم:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}\ .$$

۳.۱.۱ تابع میتاگ - لفلر

در این بخش تعریف و برخی از جزییات مربوط به تابع میتاگ - لفلر را ارائه می دهیم. علاقمندان برای مطالعه بیشتر می توانند به مراجع [۲۴، ۳۰] مراجعه نمایند.

تابع $E_\alpha(z)$ را که به صورت زیر تعریف شده است، تابع یک پارامتری میتاگ - لفلر [۵] گویند :

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}. \tag{۹.۱}$$

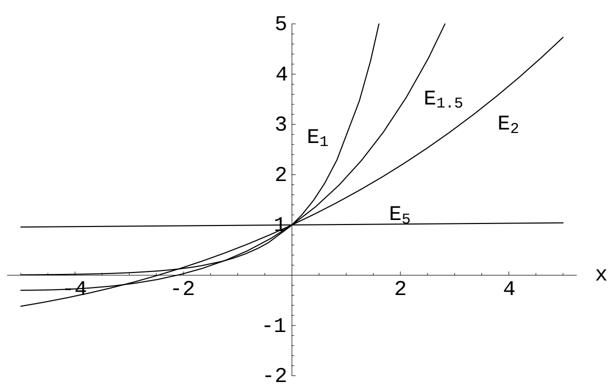
میتاگ - لفلر ریاضیدان سوئدی تعاریف پایه‌ای مربوط به این تابع را ارائه داده است [۲۷، ۲۸].

تابع میتاگ - لفلر تابع مهمی است که در زمینه حساب کسری مورد استفاده فراوانی قرار می گیرد. در واقع این تابع تعمیمی از تابع نمایی است. همان طور که تابع نمایی نقش مهمی را در جواب معادله های دیفرانسیل ایفا می کند، تابع میتاگ - لفلر نیز نقش مشابهی را در جواب معادله های دیفرانسیل از مرتبه غیر صحیح بازی می کند.

در حالت خاص، هنگامی که $\alpha=۱$ و $\alpha=۲$ خواهیم داشت :

$$E_۱(z)=e^z,\quad E_۲(z)=cosh(\sqrt{z})$$

در شکل (۲.۱) نمودار تابع میتاگ-لفلر برای $\alpha=۱,۱/۵,۲,۵$ رسم شده است:



شکل ۲.۱: نمودارتابع میتاگ-لفلر

تابع دو پارامتری میتاگ -لفلر، توسط آگراوال[۶] [۳] ارائه شده است و این تابع به صورت زیر تعریف شده است :

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\qquad(\alpha>0\,,\;\;\beta>0)\,, \tag{۱۰.۱}$$

[۵] G.M. Mittag Leffler
[۶] R. P. Agrawal

با توجه به تعریف تابع دو پارامتری میتاگ- لفلر (۱۰.۱) ، روابط زیر حاصل می شود [۹]:

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z) \\
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{e^z-1}{z} \\
E_{1,m}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+m)} = \frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right\} \\
E_{\frac{1}{2},1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = e^{z^2} erfc(-z), \quad erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-t^2}dt.
\end{aligned}
$$

sinh و cosh نیز نمونه هایی خاص از تابع میتاگ - لفلر دو پارامتری (۱۰.۱) می باشند :

$$
\begin{aligned}
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \\
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}
\end{aligned}
$$

۲.۱ قاعده لایب نیتز

قاعده لایب نیتز [۷] برای محاسبه مشتق n ام حاصلضرب دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ به صورت زیر است :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(f(t)g(t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(t)g^{(k)}(t)\ . \tag{۱۱.۱}$$

۳.۱ قانون لایب نیتز برای مشتق گیری از انتگرال

اگر بخواهیم از انتگرال $\int_{f(x)}^{h(x)} G(x,t)dt$ نسبت به x مشتق بگیریم با توجه به قانون لایب نیتز داریم :

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{h(x)} G(x,t)dt = G(x,h(x))\frac{dh(x)}{dx} - G(x,f(x))\frac{df(x)}{dx} + \int_{f(x)}^{h(x)}\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}dt$$

[۷] Leibnitz Rule

که دراین جا $G(x,t)$ و $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ توابعی پیوسته در دامنه D می باشند به طوری که D حاوی مستطیل R ،

$a \leq x \leq b$, $t_۰ \leq t \leq t_۱$ می باشد. از طرفی $g(x)$ و $f(x)$ توابعی هستند که دارای مشتق پیوسته می باشند.

۴.۱ معادلات دیفرانسیل منفرد

در این بخش به طور مختصر معادلات دیفرانسیل منفرد را معرفی می کنیم که بدین منظور لازم است نقاط عادی و منفرد(غیر عادی یا تکین)را تعریف کنیم.

۱.۴.۱ نقاط عادی ومنفرد

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{۱۲.۱}$$

نقطه $x = x_۰$ را یک نقطه عادی معادله فوق می نامند هرگاه $p(x)$ ، $q(x)$ و $g(x)$ هر سه در این نقطه تحلیلی باشند، یعنی دارای بسط تیلور در نقطه $x_۰$ باشد. اگر یکی از توابع $p(x)$ و $q(x)$ و $g(x)$ در $x = x_۰$ تحلیلی نباشند، این نقطه را نقطه منفرد(تکین یا غیر عادی) معادله می نامند. هرگاه $x = x_۰$ یک نقطه منفرد معادله دیفرانسیل فوق بوده و توابع $(x - x_۰)p(x)$ و $(x - x_۰)^۲q(x)$ هر دو در این نقطه تحلیلی باشند آنگاه $x = x_۰$ را نقطه منفرد منظم و در غیر این صورت $x = x_۰$ را نقطه منفرد نامنظم معادله می نامند.

مثال ۱.۱ *:در معادله زیر نقطه یا نقاط منفرد را مشخص کنید.*

$$(۲x^۴ - x^۵)y'' + xy' + (x^۲ + ۱)y = ۰ \tag{۱۳.۱}$$

حل:

$$y'' + \frac{۱}{x^۳(۲ - x)}y' + \frac{(x^۲ + ۱)}{x^۴(۲ - x)}y = ۰ \tag{۱۴.۱}$$

نقاط $x = 0, 2$ نقاط منفرد معادله فوق هستند. برای $x = 0$ دو عبارت

$$xp(x) = \frac{1}{x^2(2-x)}, \qquad x^2q(x) = \frac{x^2+1}{x^2(2-x)}$$

هیچکدام تحلیلی نیستند. پس $x = 0$ یک نقطه منفرد نامنظم است. برای $x = 1$ هر دو عبارت

$$(x-2)p(x) = \frac{-1}{x^3}, \qquad (x-2)^2q(x) = \frac{-(x^2+1)(x-2)}{x^4}$$

تحلیلی هستند، پس $x = 2$ یک نقطه منفرد منظم است.

۵.۱ تعاریف وقضایا

قضیه ۱.۵.۱ *(قضیه نقطه ی ثابت باناخ) : اگر Ω یک تابع انقباض بر فضای متریک کامل (X, ρ) باشد، آنگاه معادله ی $x = \Omega(x)$ یک و تنها یک جواب دارد.*

تعریف ۱ *: فضای نرمدار X را کامل گویند هرگاه X با متر حاصل از نرم کامل باشد، یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.*

تعریف ۲ *: فرض کنید Y, X دو فضای نرم دار باشد و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد، گوییم T کراندار است اگر $K > 0$ ی وجود داشته باشد بطوریکه*

$$\|Tx\| \leqslant K\|x\| \quad , \forall x \in X$$

قضیه ۲.۵.۱ *: فرض کنید Y, Xدو فضای نرم دار باشد و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد در این صورت احکام زیر معادلند:*

الف) T در یک نقطه پیوسته باشد.

ب)Tدر هر نقطه پیوسته است.

ج)T کراندار است.

قضیه ۳.۵.۱ : فرض کنید Y, X دو فضای نرم دار باشد و $B(X,Y)$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از X به Y باشد. در این صورت $B(X,Y)$ با اعمال زیر

$$(T+\zeta)(x) = Tx + \zeta x \quad ,\forall x \in X, \quad \zeta, T \in B(X,Y)$$

$$(\lambda T)(x) = \lambda(Tx)$$

یک فضای برداری است و با نرم

$$\|T\| = sup\{|Tx| \ : \ \|x\| \leq ۱\}$$

یک فضای نرم دار است. بعلاوه اگر Y باناخ باشد آنگاه $B(X,Y)$ نیز باناخ است.

تعریف ۳ [۲۰]: گوییم F دارای مشتق جهتی در $x \in X$ است اگر تابع خطی پیوسته $A : X \to Y$ موجود باشد که:

$$F(x+h) - F(x) = Ah + \omega(x,h). \tag{۱۵.۱}$$

به طوری که:

$$lim \frac{\|\omega(x,y)\|}{\|h\|} = ۰. \tag{۱۶.۱}$$
$$\|h\| \to ۰$$

A مشتق جهتی F در x نامیده می شود و مقدار آن در h به صورت $F'(x)h$ مشخص می شود. F' تابع خطی از X به $L(X,Y)$ می باشد.

تعریف ۴ : مشتق دوم از F با F'' نشان داده می شود و یک تابع خطی از X به $L(X,(X,Y))$ است با این نکته که $L(X,(X,Y))$ متناظر با $L(X \times X, Y)$ می باشد.

قضیه ۴.۵.۱ : نگاشت $F''(x) \in L(X^{۲}, Y)$ متقارن است، یعنی $F''(x)(x_{۱}, x_{۲}) = F''(x)(x_{۲}, x_{۱})$ و $x_{۱}, x_{۲} \in X$.

قضیه ۵.۵.۱ (قضیه تیلور) : فرض کنید $F \in C^{n}(u)$ و U یک زیر مجموعه باز از X که شامل بخش خطی از $X_{\circ}$ به h است. آنگاه:

$$
\begin{aligned}
F(x_{\circ}+h) &= F(x_{\circ}) + F^{'}(x_{\circ})(h) + \frac{۱}{۲!}F^{''}(x_{\circ})(h,h) + \cdots + \frac{۱}{(n-۱)!}F^{(n-۱)}(x_{\circ})(h,\cdots,h) \\
&\quad + \frac{۱}{(n-۱)!}\int_{\circ}^{۱}(۱-t)^{n-۱}F^{(n)}(x_{\circ}+th)(h,\cdots,h)dt \\
&= \sum_{k=\circ}^{n} F^{k}(x_{\circ})(h,\cdots,h) + q(x), \qquad (۱۷.۱)
\end{aligned}
$$

فصل ۲

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

مقدمه

هنگامی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی، مرتبه مشتق ها و انتگرال ها غیر صحیح (حقیقی یا مختلط) باشند، حساب دیفرانسیل معمولی تبدیل به حساب دیفرانسیل کسری می شود. ایده اولیه این کار، طی نامه ای توسط لایب نیتز[۱] بههوپیتال[۲] مطرح شد. آبل [۳] دانشمند نروژی اولین کسی بود که از حساب کسری برای حل یک مسأله استفاده کرد. تعاریف زیادی درخصوص مفهوم انتگرال و مشتق از مرتبه غیر صحیح وجود دارد. از جمله این تعریف ها می توان به گرانولد - لتنیکوف، ریمان - لیوویل، کاپوتو، نی شی موتو، هادامار و ... اشاره کرد. در این فصل تعاریف ریمان - لیوویل و کاپوتو را ارائه می دهیم.

۱.۲ مشتق و انتگرال کسری ریمان ـ لیوویل

۱.۱.۲ انتگرال کسری ریمان - لیوویل

عملگر انتگرال ریمان - لیوویل تعمیمی از دستور انتگرال کوشی است. در واقع در دستور انتگرال کوشی مقادیر n را که متعلق به اعداد صحیح می باشند، به مقادیر غیر صحیح تعمیم دهیم، در این صورت، سمت راست دستور انتگرال کوشی، در واقع تعریف انتگرال ریمان - لیوویل می باشد. دستور انتگرال کوشی چنین است :

$$\int_a^x dx_۱ \int_a^{x_۱} dx_۲ \cdots \int_a^{x_{n-۱}} f(t)dt = \frac{۱}{(n-۱)!}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{۱-n}}dt \qquad (۱.۲)$$

عملگر انتگرال کسری ریمان - لیوویل را با $I_a^\alpha f(x)$ نشان می دهیم:

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{۱}{(n-۱)!}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{۱-n}}dt$$

[۱] Leibniz
[۲] Hospital
[۳] Abel

اگر $f \in C[a,b]$ و $\alpha > 0$، آنگاه:

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad x > a \tag{۲.۲}$$

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad x < b \tag{۳.۲}$$

به ترتیب، انتگرال کسری چپ و انتگرال کسری راست ریمان - لیوویل نیز نامیده می شود [۳۰].

۲.۱.۲ خواص انتگرال کسری ریمان – لیوویل

۱. $I_a^{\alpha} f(x)$ بازای هر $x \in [a,b]$ موجود است.

۲. فرض می‌کنیم $f \in C[a,b]$، $\alpha, \beta \geq 0$ و $\gamma \geq -1$ آنگاه :

$$i)\, {}_aI_x^{0} f(x) = f(x)$$

$$ii)\, {}_aI_x^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$$

$$iii)\, {}_aI_x^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x)$$

$$iv)\, {}_aI_x^{\alpha} x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$

که در آن $C[a,b]$ همه توابع پیوسته بر $[a,b]$ باشد.

اثبات (i)

از دستور انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم :

$${}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha} f'(\tau) d\tau$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ داریم:

$${}_aI_x^{0} f(x) = f(a) + \int_a^x f'(\tau) d\tau = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$$