بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

ریاضی‌محض-جبر

بررسی کران‌ها برای مقادیر ویژه گراف

استاد راهنما:

دکتر سعید علیخانی

استاد مشاور:

دکتر بیژن دواز

پژوهش‌گر:

زهرا محمدپناه

مهرماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و همسر و فرزند دلبندم

سپاس گذاری

سپاس مزدای پاک را که با ارزانی داشتن ارمغان خرد به مردم، او را از تاریکی و نادانی به روشنایی دانش و رستگاری راهنما شد؛ اینک که به یاری ایزد، این پژوهش به پایان رسیده است بر خود بایسته می دانم از همه سرورانی که به هر گونه در انجام این امر مرا همراه بوده اند سپاس گزاری کنم.

در آغاز از آقای دکتر سعید علیخانی که راهنمایی این پژوهش نامه را پذیرفته و در سراسر راه روشن گر من بودند.

آقای دکتر بیژن دواز استاد مشاور پژوهش نامه که همواره مرا یاری نمودند.

آقایان دکتر محمد علی ایرانمنش و دکتر علی ایرانمنش که در جایگاه داوری این پژوهش نامه قرار دارند.

همچنین یکایک اساتید ارجمند دانشکده ریاضی دانشگاه یزد که افتخار شاگردیشان را داشته ام.

دوستان مهربان و، بی شمار ارزشمندم، که همواره موجب دلگرمی ام بوده اند.

خانواده مهربانم که پس از خدا هر چه دارم از ایشان است.

همه باشندگان این نشست و تمام کسانی که اندیشه گرانمند من توانایی به یاد سپردن نام زیبایشان را نداشت.

زهرا محمدپناه

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده است. ماتریس مجاورت گراف G یک ماتریس $n\times n$، $A=(a_{ij})$ است که $a_{ij}=1$ اگر دو رأس i و j در گراف G مجاور باشند و در غیر این صورت $a_{ij}=0$. چندجمله‌ای $\phi(G,x)=det(xI-A(G))$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی گراف G می‌باشد. ریشه‌های این چندجمله‌ای همان مقادیر ویژه‌ی گراف G می‌باشند، و از آن‌جایی‌که A ماتریس حقیقی و متقارن است، تمام مقادیر ویژه‌ی G حقیقی هستند.

ماتریس لاپلاسین گراف G، ماتریس $L=D-A$ است که در آن A ماتریس مجاورت گراف و D ماتریس درجات گراف است که ماتریسی قطری است که عناصر روی قطر آن متناظر با درجات رأس‌های گراف هستند. به وضوح ماتریس لاپلاسین، ماتریسی حقیقی و متقارن است که به مقادیر ویژه‌ی آن مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین گراف می‌گوئیم.

در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی مقادیر ویژه‌ی گراف‌ها پرداخته و کران‌های بالا و پائین برای مقادیر ویژه‌ی G را مطالعه خواهیم کرد. هم‌چنین به اختصار به بررسی کران‌های بالا و پائین مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین گراف خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای مشخصه-مقدار ویژه-شعاع طیفی-عدد غالب.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت گراف G را مقادیر ویژه‌ی G نامیده و آن‌ها را با $\lambda_1(G)$، $\ldots$، $\lambda_n(G)$ و در صورت نبودن ابهام با λ_1، $\ldots$، λ_n نشان می‌دهند. همواره برای مقادیر ویژه‌ی یک گراف ترتیبی نزولی به‌صورت $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ در نظر می‌گیرند.

فرض کنید $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ مقادیر ویژه گراف ساده G هستند. یافتن بهترین کران بالا برای λ_1 و بهترین کران پائین برای λ_n از دیر باز مورد توجه ریاضی‌دانان بسیاری بوده است. سوتکوویچ[1] و همکارانش نشان دادند که اگر T یک درخت n رأسی باشد، آن‌گاه $\lambda_1 \leqslant \sqrt{n-1}$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر T ستاره n رأسی باشد [8]. فورون [2] و همکارانش به مطالعه‌ی بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی گراف و ارتباط آن با عدد جورسازی (تطابق) G پرداخته اند [12].

اگر فرض کنیم ν و $\overline{\nu}$ به ترتیب عدد تطابق گراف G و $\overline{G}$ است، آن‌گاه $\nu + \overline{\nu} \geqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil$ که در آن $n = |V(G)|$. هم‌چنین $-\lambda_n \leqslant \nu + \overline{\nu}$ می‌باشد.

در فصل یک مقدماتی بر نظریه‌ی گراف و قضایا و تعریف‌هایی که بعداً در فصول بعد مورد نیاز است، آورده شده است. در فصل دوم چندجمله‌ای مشخصه‌ی گراف G و خواص آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم ویژگی‌های مقادیر ویژه‌ی گراف و مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین گراف را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم کران‌هایی برای مقادیر ویژه‌ی گراف به‌دست می‌آوریم. به طور خاص، ثابت می‌کنیم که اگر G یک گراف با مرتبه‌ی $n \geqslant 2$ و ماکسیمم درجه Δ و کمر با حداقل ۵ رأس باشد، آن‌گاه $\lambda_1 \leqslant min\{\Delta, \sqrt{n-1}\}$ است. هم‌چنین ارتباط بین $\mu(G)$ و عدد غالب γ را مطالعه خواهیم کرد.

[1] Cvetkovic

[2] Favaron

فصل ۱

مقدماتی بر نظریه گراف

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اساسی

بسیاری از پدیده‌های دنیای واقعی را می‌توان به راحتی به‌وسیله‌ی نموداری متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که زوج‌های معینی از این نقاط را به هم وصل می‌کنند، توصیف کرد. مثلاً، نقاط می‌توانند معرف افراد باشند، خطوط واصل بین زوج‌ها می‌توانند معرف دوست‌ها باشند و یا نقاط ممکن است مراکز ارتباطی و خطوط، معرف ارتباط‌های بین آن‌ها باشند. توجه کنید در چنین نمودارهایی آن‌چه بیشتر مورد توجه است آن است که آیا دو نقطه‌ی مفروض به‌وسیله‌ی یک خط به هم وصل شده‌اند یا نه؛ شیوه‌ی وصل نقاط به هم مهم نیست. تجرید ریاضیاتی وضعیت‌هایی از این نوع، به پیدایش مفهوم گراف [۱] منجر شده است.

تعریف ۱.۱.۱. یک گراف ساده G زوج مرتبی مانند $(V(G), E(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه متناهی و ناتهی از اشیاء و $E(G)$ مجموعه‌ای متشکل از زیر مجموعه‌های دو عضوی $V(G)$ است. اعضای $V(G)$ را رأس گراف و اعضای $E(G)$ را یال گراف می‌گویند. گرافی را که هیچ یالی نداشته باشد، گراف پوچ می‌نامند. هم‌چنین گرافی با تنها یک رأس را بدیهی و دیگر گراف‌ها را غیر بدیهی می‌نامند.

درجه‌ی رأس v در G که با $d(v)$ نشان داده می‌شود، تعداد یال‌های G است که v بر آن‌ها واقع است. مینیمم درجه را با $\delta(G)$ و ماکسیمم درجه را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهند. گراف H، زیر گراف گراف G است، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و آن را با نماد $H \subseteq G$ نشان می‌دهند. یک زیر گراف فراگیر از گراف G، گرافی مانند H $(H \subseteq G)$ است به‌طوری‌که $V(H) = V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. $G' = (V', E')$ را یک زیر گراف القایی از $G = (V, E)$ گوئیم هرگاه $V' \subseteq V$ و E' مجموعه‌ی تمام یال‌هایی از G باشد که دو سر آن در V' واقع است.

فرض کنید G یک گراف است. در این صورت منظور از یک گشت یا یک قدم، دنباله‌ای متناهی از یال‌ها به صورت $v_0v_1 \ v_1v_2 \ \cdots \ v_{n-1}v_n$ می‌باشد که در آن هر دو یال متوالی یکسان یا مجاور هستند. (مجاور بودن یعنی در رأسی مشترک بودن). یک گشت که در آن یال تکرار نشود یک گذر نامیده می‌شود. یک گذر که در آن رأسی تکرار نشود یک مسیر نامیده می‌شود.

---

[۱] Graph