دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

کاربرد روش اختلال هموتوپی برای حل مسأله استیفن معکوس تک فاز

استاد راهنما

دکتر کریم ایواز

استاد مشاور

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

سمیه طالبی شیخ سرمست

۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به

خانواده عزیزم

سپاس گزاری...

حمد و سپاس آن خدایی را که به ما عقل داد و از طریق عقل به ما علم آموخت .

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کریم ایواز، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حسین خیری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

ازکلیه استادهای گرامی دوران تحصیلم، مخصوصاً از آقای دکتر غلامرضا حجتی ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر جعفرصادق عیوضلو معاونت آموزشی دانشکده علوم ریاضی، خانم دکتر فریبا بهرامی مدیرگروه ریاضی کاربردی، و نیز کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر عزیزم و همسر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

این جهان سراسر افسانه است جز نیکی و بدی چیزی باقی نمی ماند.

سمیه طالبی شیخ سرمست

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: طالبی شیخ سرمست نام: سمیه
عنوان: کاربرد روش اختلال هموتوپی برای حل مسأله استیفن معکوس تک فاز
استاد راهنما : دکتر کریم ایواز استاد مشاور : دکتر حسین خیری
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۲
کلید واژه‌ها: مسأله استیفن معکوس، معادله انتقال حرارت، روش اختلال هموتوپی

چکیده

در این پایان‌نامه، کاربرد روش اختلال هموتوپی برای حل مسأله استیفن معکوس تک فاز ارائه می‌شود. این مسأله شامل محاسبه توزیع دما در دامنه، بعلاوه بازسازی توابعی است که دما و شار گرما را در مرز توصیف می‌کند، زمانیکه فصل مشترک متحرک معلوم است.

فهرست مطالب

مقدمه

اکثر پدیده‌ها در جهان واقعی به طور ذاتی غیر خطی هستند و بوسیله معادلات غیر خطی مدل‌بندی می‌شوند برای حل مسائل غیر خطی دو روش: ۱- تحلیلی؛ ۲- عددی وجود دارد.

عموماً روشهای عددی در یک دامنه محاسبات پیچیده می‌توانند به کار گرفته شوند و این مزیت روش عددی نسبت به روش تحلیلی است وقتی که یک مسأله غیر خطی با یک دامنه ساده سروکار داشته باشد.

روشهای عددی ایرادهایی نیز دارد: ۱- فنون عددی نقاط منفصل یک منحنی را نتیجه می‌دهند و اغلب مشخص کردن منحنی کامل نتایج بسیار زمان‌بر است؛ ۲- از نتایج عددی درک اساسی و کامل یک مسأله غیر خطی سخت است. وقتی یک مسأله غیر خطی شامل جوابهای تکین یا جوابهای چندگانه باشد آنگاه دشواریهای اضافی روشهای عددی ظاهر می‌شود.

هر دو روش محدودیت‌ها و امتیازهای خاص خود را دارد که غیر ضروری است یکی را انجام دهیم و از دیگری غافل باشیم.

در دهه‌های اخیر با توسعه سریع مسائل غیر خطی علاقه فزاینده دانشمندان و مهندسین به روشهای تحلیلی برای حل مسائل خطی و غیرخطی آشکار شده است. در بسیاری از موارد تکنیک‌های روشهای اختلال به کار برده می‌شود روشهای اختلال[۱] اساساً بر پایه وجود پارامترها یا متغیرهای کوچک یا

[۱] Perturbation

بزرگ که کمیت اختلال نامیده می‌شوند بنا گذاشته می‌شود بطور خلاصه روشهای اختلال با استفاده از کمیت‌های اختلال یک مسأله غیرخطی را به تعداد بی‌شمار زیر مسأله‌های خطی تبدیل می‌کنند سپس بوسیله مجموع جوابهای چند زیر مسأله اول، آن را تقریب می‌زنند اما همانند دیگر روشهای تحلیلی روشهای اختلال نیز دارای محدودیتهایی هستند و محدودیتهای روشهای اختلال ناشی از ایجاد یک پارامتر کوچک در مسأله است.

روشهای جدید زیادی مانند روش اختلال هموتوپی توسط جی هوان هی[۲] برای رفع این محدودیت مطرح شده‌اند.

در فصل یک پایان‌نامه پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی آورده شده است، در فصل دوم ضمن معرفی روش اختلال هموتوپی، همگرایی روش نیز مورد بررسی قرار گرفته است، در فصل سوم حل مسأله استیفن معکوس تک فاز با روش اختلال هموتوپی مطرح شده است، در فصل چهارم نتایج عددی آورده شده است، در فصل پنجم نتیجه‌گیری آورده شده است و در نهایت برنامه‌های کامپیوتری که تحت نرم‌افزار میپل نوشته شده است به عنوان ضمیمه آورده شده است. مطالب این پایان‌نامه براساس مقاله [۱۳] گردآوری شده است.

[۲] Ji-Huan-He

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز می‌شود، می‌پردازیم.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. مرتبه یک معادله دیفرانسیل بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود. منظور از جواب یک معادله‌ی دیفرانسیل، یافتن تابعی است که اولاً تا مرتبه معادله مشتق پذیر بوده، ثانیاً در معادله صدق کند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید تابع $y = f(x)$ بر بازه $I : a < x < b$، تعریف شده باشد. هر معادله‌ای شامل متغیر مستقل x، تابع $y = f(x)$ و مشتقهای $f(x)$ را یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه nام به صورت

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

یا

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

است.

تعریف ۵.۲.۱. معادله دیفرانسیل به شکل

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + a_n(x)y(x) = Q(x)$$

را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n گویند.

تعریف ۶.۲.۱. یک معادله دیفرانسیل جزئی معادله‌ای متشکل از یک تابع مجهول با بیش از یک متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی آن است.

برای مثال معادله زیر برای تابع مجهول دو متغیره $u(x,t)$ یک معادله دیفرانسیل جزئی است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

تعریف ۷.۲.۱. منظور از $c^m[a,b]$ مجموعه توابع تعریف شده روی $[a,b]$ هستند که تا مرتبه mام بطور پیوسته مشتق پذیر باشند(مجموعه توابع مشتق پذیر مرتبه mام پیوسته).

تعریف ۸.۲.۱. اگر علاوه بر معادله دیفرانسیل داده شده مقدار y و مشتقات متوالی آن در نقطه $x = x_0$ معین باشد آن را مسأله مقدار اولیه می‌گویند.

تعریف ۹.۲.۱. اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در حالت خاص دارای شرایطی در دو نقطه جداگانه $x_0 = a$ و $x_0 = b$ باشد، آنگاه مسأله را مسأله مقدار مرزی می‌نامند.

تعریف ۱۰.۲.۱. سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ که در آن a_n دنباله‌ای از اعداد و z متغیری مستقل می‌باشد یک سری توانی نامیده می‌شود.

قضیه ۱۱.۲.۱. *(قضیه تیلور):اگر تابع f در همسایگی نقطه x_0 مشتق مرتبه $(n+1)$ام متناهی داشته باشد، در این صورت مقدار f در هر نقطه x متعلق به این همسایگی به صورت*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

بدست می‌آید که در آن

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

و

$$f^k(x) = \frac{d^k f}{dx^k}|_{x=x_0}$$

و ξ نقطه‌ای بین x و x_0 است.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و d تابعی به صورت $d : X \times X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ باشد زوج (X, d) را یک فضای متریک گویند و d را یک متر روی X گویند هرگاه $\forall x, y, z \in X$ داشته باشیم

۱. $d(x,y) \geq 0 \qquad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

۲. $d(x,y) = d(y,x)$

۳. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی X گویند، هرگاه $\forall x, y, z \in X$ و $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

۱. $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

۲. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

۳. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

تعریف ۱۴.۲.۱. دنباله x_n از عناصر فضای نرم دار X را همگرا در X گویند، هرگاه$\alpha \in X$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\lim_{X \to \infty} \|x_n - \alpha\| = 0$$

و این مستلزم آن است که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \quad (n \geq N \longrightarrow \|x_n - \alpha\| < \epsilon)$$

تعریف ۱۵.۲.۱. دنباله x_n از عناصر فضای نرم‌دار X را دنباله کوشی گویند هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, k \quad (n \geq N \longrightarrow \|x_{n+k} - x_n\| < \epsilon)$$

تعریف ۱۶.۲.۱. فضای تام به فضایی گفته می‌شود که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. گردایه τ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک توپولوژی[1] در X گوییم اگر τ در سه خاصیت زیر صدق کند:

۱. $X, \emptyset \in \tau$

۲. هرگاه به ازای $V_i \in \tau$ داشته باشیم $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$ (اشتراک هر زیرگردایه متناهی از τ در τ باشد)

۳. هرگاه V_α زیر گردایه دلخواهی از τ(متناهی،شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر)باشد، آنگاه

$$\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$$

و به (X, τ) فضای توپولوژیک گویند.

قضیه ۱۸.۲.۱. *اگر B یک پایه برای فضای توپولوژی X و C یک پایه برای فضای توپولوژی Y باشد، در این صورت گردایه $D = \{b \times c \mid b \in B, c \in C\}$ یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی $X \times Y$ است.*

برهان. رجوع کنید به [۹]. □

تعریف ۱۹.۲.۱. فضای هیلبرت: فضای خطی متریک H را فضای هیلبرت گویند، هرگاه H با متر تعریف شده تام باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱. فضای خطی نرم‌دار X را فضای باناخ گویند، هرگاه X با متر تعریف شده بوسیله نرمش یک فضای تام باشد. هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

[1] Topology

تعریف ۲۱.۲.۱. اگر T یک عملگر از فضای خطی X به روی خودش باشد، آنگاه $x \in X$ را نقطه ثابت T گویند، هرگاه $Tx = x$.

تعریف ۲۲.۲.۱. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را در گوی $\bar{B}(z_0, r)$ نگاشت انقباض گویند، هرگاه ثابتی جون $0 \leq \theta < 1$ موجود باشد بطوریکه

$$\forall x_1, x_2 \in \bar{B}(z_0, r) \quad \|Tx_1 - Tx_2\| \leq \theta \|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|$$

که در آن θ را ضریب انقباض گویند و گوی $\bar{B}(z_0, r)$،گوی بسته‌ای به مرکز z_0 و شعاع r است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{B}(z_0, r) = \{z| \quad \|z - z_0\| \leq r\}$$

قضیه ۲۳.۲.۱. *(قضیه نگاشت انقباض یا نقطه ثابت باناخ):*

فرض کنید

۱. *X یک فضای باناخ*

۲. $T : X \to X$

۳. *T در گوی $\bar{B}(u_0, r)$ یک نگاشت انقباض، با ضریب انقباض $0 \leq \theta < 1$ باشد*

۴. $\frac{1}{1-\theta} \|u_1 - u_0\| = r_0 \leq r$

آنگاه

الف) *T دارای نقطه ثابت منحصربفرد u^* درون گوی $\bar{B}(u_0, r)$ می‌باشد.*

ب) *$\forall n = 1, 2, \cdots$ دنباله تکرار $u_k = T(u_{k-1})$ به نقطه ثابت u^* همگرا است.*

ج) $\|u_k - u^*\| \leq \theta^k r_0$.

برهان. T یک نگاشت انقباض است بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\forall k \quad \|u_{k+1}-u_k\| &= \|Tu_k - Tu_{k-1}\| \\
&\leq \theta\|u_k - u_{k-1}\| \\
&= \theta\|Tu_{k-1} - Tu_{k-2}\| \\
&\leq \theta^2\|u_{k-1} - u_{k-2}\| \\
&= \theta^2\|Tu_{k-2} - Tu_{k-3}\| \\
&\leq \theta^3\|u_{k-2} - u_{k-3}\| \\
&\vdots \\
&= \theta^k\|u_1 - u_0\| \\
&= \theta^k(1-\theta)r_0
\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $k = 0, 1, \cdots$، می‌توان نوشت

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leq \theta^k(1-\theta)r_0 \qquad (۱.۱)$$

ثابت می‌کنیم به ازای هر k می‌توان نوشت

$$\|u_k - u_0\| \leq r_0(1-\theta^k) \qquad (۲.۱)$$

اثبات به استقراء:

به ازای $k = 1$ طبق فرض مسئله برقرار است. فرض کنیم به ازای k برقرار باشد، ثابت می‌کنیم به

ازای $k+1$ نیز برقرار است.

$$\begin{aligned}
\forall k \quad \|u_{k+1}-u_0\| &= \|u_{k+1}-u_k+u_k-u_0\| \\
&\leq \|u_{k+1}-u_k\| + \|u_k-u_0\| \\
&\leq \theta^k(1-\theta)r_0 + r_0(1-\theta^k) \\
&= (\theta^k-\theta^{k+1})r_0 + (1-\theta^k)r_0 \\
&= r_0(1-\theta^{k+1})
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۲.۱) می‌توان نوشت

$$\|u_k-u_0\| \leq r_0(1-\theta^k) \leq r$$

لذا

$$u_k \in \bar{B}(u_0,r)$$

حال نشان می‌دهیم $\{u_k\}$ یک دنباله کوشی است یعنی

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n,k \ \ (n\geq N \Rightarrow \|u_{n+k}-u_k\|<\epsilon)$$

فرض کنید ϵ یک عدد مثبت دلخواه باشد

$$\begin{aligned}
\|u_{n+k}-u_k\| &= \|u_{n+k}-u_{n+k-1}+u_{n+k-1}-\cdots+u_{k+1}-u_k\| \\
&\leq \|u_{n+k}-u_{n+k-1}\|+\cdots+\|u_{k+1}-u_k\| \\
&\leq \theta^{n+k-1}\|u_1-u_0\|+\cdots+\theta^k\|u_1-u_0\| \\
&\leq \theta^k[\theta^{n-1}+\theta^{n-2}+\cdots+\theta+1](1-\theta)r_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \theta^k(1-\theta)r_0(\frac{1}{1-\theta}) \\ &= \theta^k r_0 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

پس دنباله $\{u_k\}$ کوشی است و چون X فضای باناخ است درنتیجه دنباله $\{u_k\}$همگراست.
با حدگیری از طرفین دنباله $u_k = Tu_{k-1}$ می‌توان نوشت

$$Tu^* = u^*$$

یعنی u^* نقطه ثابت T است.
با توجه به رابطه (۲.۱) داریم:

$$\|u_k - u_0\| \leq r_0(1-\theta^k)$$

با حدگیری از طرفین رابطه بالا داریم:

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u_0\| \leq \lim_{k\to\infty} (1-\theta^k)r_0$$

آنگاه

$$\|u^* - u_0\| \leq r_0 \Rightarrow u^* \in \bar{B}(u_0, r)$$

یعنی u^* درون گوی $\bar{B}(u_0, r)$ می‌باشد.
اکنون ثابت می‌کنیم u^* یکتاست. فرض کنیم u_m نقطه ثابت دیگری برای نگاشت انقباض T باشد یعنی

$$\exists u^*, u_m \in X \quad ; \quad u^* = Tu^* \quad , \quad u_m = Tu_m$$

در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned} \|u^* - u_m\| &= \|Tu^* - Tu_m\| \\ &\leq \theta\|u^* - u_m\| \\ &< \|u^* - u_m\|. \end{aligned}$$

که این یک تناقض است، پس u^* یکتاست. $\square$

فصل ۲

روش اختلال هموتوپی