

سورة الفاتحة



دانشگاه صنعتی اصفهان  
دانشکده فیزیک

## بررسی هامیلتونی رمبش غبار در (۱+۲)-بعد

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک، ذرات بنیادی

محسن رضایی

استاد راهنما  
دکتر احمد شیرزاد

۱۳۹۳



دانشگاه صنعتی اصفهان  
دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک آقای محسن رضایی  
تحت عنوان

**بررسی هامیلتونی رمبش غبار در (۱+۲)-بعد**

در تاریخ ۱۳۹۳/۱۰/۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

- |                         |                              |
|-------------------------|------------------------------|
| دکتر احمد شیرزاد        | ۱ - استاد راهنمای پایان نامه |
| دکتر فرهنگ لران اصفهانی | ۲ - استاد مشاور پایان نامه   |
| دکتر بهروز میرزا        | ۳ - استاد مدعو               |
| دکتر مسلم زارعی         | ۴ - استاد ممتحن داخلی        |
| دکتر فرهاد شهبازی       | سرپرست تحصیلات تکمیلی        |

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده‌ی کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه‌ی اندیشه‌های ناب آموزگاران بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه‌سار بنده‌نوازی‌هایش پایان‌نامه‌ی حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاری‌گشان نبود، هرگز این پایان‌نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر احمد شیرزاد که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر فرهنگ لران که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را متحمل شدند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

سپاس آخر را به مهربان‌ترین همراهان زندگیم، پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی‌ریای سخاوت بوده است.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج  
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی  
از تحقیق موضوع این پایان‌نامه (رساله)  
متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به  
تامی مهربانانی که همواره در کنارم بوده اند.

# فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۵	گرانش در $(2+1)$ -بعد	۲
۸	هامیلتونی گرانش	۳
۹	۱.۳ تجزیه ADM	۳
۱۴	۲.۳ جمله مرزی	۳
۱۷	سیاهچاله‌ی BTZ	۴
۱۷	۱.۴ حل‌های موضعی پاددوسیه	۴
۱۸	۲.۴ حل سیاهچاله	۴
۲۲	۳.۴ جمله‌ی مرزی سیاهچاله	۴
۲۳	۴.۴ خواص متریک BTZ	۴
۲۴	۵.۴ حل سیاهچاله توسط تثبیت پیمانه	۴
۲۶	رمبش غبار	۵
۲۷	۱.۵ مدل LTB	۵
۲۹	۲.۵ تابع جرم وانرژی	۵
۳۱	۳.۵ تکینگی در مدل LTB	۵
۳۲	۴.۵ دسته‌ی ژئودزی‌ها	۵
۳۴	۵.۵ شکل‌گیری BTZ خارجی از رمبش غبار	۵
۳۶	۶.۵ جزئیات بیشتر رمبش	۵
۳۸	دینامیک رمبش	۶
۳۹	۱.۶ هامیلتونی غبار و گرانش	۶
۴۹	۲.۶ تثبیت پیمانه	۶
۵۰	۳.۶ تابع جرم در فضای فاز	۶
۵۲	۴.۶ بررسی جمله مرزی	۶
۵۶	۵.۶ متغیرهای جدید	۶
۵۸	۶.۶ کوانتس	۶
۶۰	نتیجه‌گیری	۷
۶۳	الف ابر سطح	
۶۸	ب کنش غبار	
۷۲	پ حل معادلات اینشتین توسط نرم افزار Maple	

## چکیده

نسبیت عام در  $(2+1)$  - بعد به لحاظ سادگی ریاضی نسبت به چهار بعد، برای طرح و بررسی مسائل مربوط به گرانش مورد توجه است، در نتیجه خصوصیات گرانش  $(2+1)$  - بعدی و تفاوت‌های آن با گرانش چهار بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است. در گرانش  $(2+1)$  - بعدی اسکالر خمش وابسته به ثابت کیهانشناسی است و نیروی نیوتونی در این گرانش وجود ندارد.

فرمول‌بندی هامیلتونی دارای اهمیت بسیاری در فیزیک مدرن است، به همین دلیل هامیلتونی گرانش توسط تجزیه‌ی فضا-زمان به روش  $ADM$  در حالت خلاء بررسی شده است. همچنین اهمیت جمله‌ی مرزی و نیز شمارش درجات آزادی در فرمول‌بندی هامیلتونی گرانش مورد توجه قرار گرفته است. حل سیاه‌چاله‌ی  $BTZ$  را با استفاده از دستگاه‌های قیدی محاسبه کرده‌ایم، همچنین نشان داده‌ایم که این حل را می‌توان توسط تثبیت پیمانانه در فضای فاز نیز به دست آورد. در راستای نوشتن هامیلتونی برای گرانش در حضور ماده، مدل  $LTB$  در  $(2+1)$  - بعد را به عنوان یک مدل گرانشی با حضور غبار ناهمگن و ناچرخان مورد مطالعه قرار داده و چگونگی ایجاد سیاه‌چاله‌ی  $BTZ$  با تکانه زاویه‌ای صفر ناشی از رمبش این غبار را بررسی کرده‌ایم. همچنین جنبه‌های موجود در این مدل، شامل تکینگی‌ها و افق رویداد و افق پیدا را مورد تحلیل قرار گرفته است. در جهت دست یافتن به هامیلتونی مدل  $LTB$ ، کنش غبار جفت شده با گرانش را به روش دستگاه‌های قیدی مطالعه کرده و با محاسبه‌ی قیود نوع اول و دوم آن، هامیلتونی را به دست آورده‌ایم. همچنین نشان دادیم که برای رسیدن به معادلات حرکت غبار ناچرخان، می‌توان از تثبیت پیمانانه استفاده کرد. در انتها بحث کوتاهی درباره‌ی کوانتس دستگاه فوق انجام داده‌ایم.

### کلمات کلیدی:

سیاه‌چاله‌ی  $BTZ$ ، تجزیه‌ی  $ADM$ ، مدل  $LTB$ ، دستگاه‌های قیدی،



## فصل ۱

### مقدمه

کنجکاوی بشر برای پی بردن به چگونگی رفتار طبیعت، همواره گریز ناپذیر بوده است. کنجکاوی درباره‌ی رخداد‌های مرتبط با ماده که در طبیعت صورت می‌گیرند فارغ از ابعاد این رویدادها، از حرکت اجرام آسمانی تا رفتار ماده در ابعاد بسیار کوچک، منجر به کشف قوانین حاکم بر ماده شده است. این قوانین در طی زمان کامل‌تر شده‌اند و به شکلی که اکنون آنها را می‌شناسیم درآمده‌اند. برای مثال قوانین نیوتون که حرکت اجرام را توصیف می‌کند، بعدها توسط نسبیت خاص و عام اینشتین کامل‌تر شدند. گاهی این تکامل در قوانین به صورت وحدت در دو یا چند قانون بوده است، مانند دو نیروی الکتریکی و مغناطیسی که اکنون آنها را در غالب نیروی واحد الکترومغناطیس می‌شناسیم. نیروهایی که تا کنون موفق به کشف آنها شده‌ایم شامل نیروی گرانش، الکترومغناطیس، هسته‌ای ضعیف و قوی هستند.

نیروی گرانش اولین نیرویی است که بشر شناخته است. این نیرو اکنون بوسیله نسبیت عام اینشتین به خوبی توصیف می‌شود، این نظریه توانسته است رویدادهای مربوط به اجسام سنگین شامل اجرام آسمانی را به درستی شرح دهد. در این نظریه فضا و زمان به صورت یک پیوستار چهار-بعدی به نام فضا-زمان در نظر گرفته می‌شود که اجرام باعث ایجاد خمش در بافت آن می‌شوند.

از طرف دیگر بررسی رفتار اجسام در ابعاد بسیار کوچک‌تر از آنچه ما در اطراف خود می‌بینیم توسط مکانیک کوانتومی بیان می‌شود. این نظریه نیز همانند نسبیت عام توانسته است از آزمایش‌های طراحی شده

برای سنجش درستی آن سربلند بیرون آید. نتیجه شدن مکانیک کلاسیک از اصول مکانیک کوانتوم، باعث شده است که نظریه کوانتوم یک نظریه جهان شمول<sup>۱</sup> به نظر رسد. نیروی الکترومغناطیس اولین نیرویی بود که کوانتیده شد که حاصل آن به وجود آمدن نظریه الکترودینامیک کوانتومی است. دو نیروی هسته‌ای ضعیف و قوی به کمک نظریه‌ی پیمانانه‌ای<sup>۲</sup> فرمول بندی شدند. همچنین وحدت یافتن دو نیروی الکترومغناطیس و هسته‌ای ضعیف که الکتروضعیف نام گرفت باعث شد که همچنان ایجاد وحدت بین نیروها بیشتر مورد توجه قرار گیرد. اکنون مدل استاندارد ذرات بنیادی توانسته است برهمکنش بین ذرات بنیادی از طریق سه نیروی الکترومغناطیس، هسته‌ای ضعیف و قوی را به طور شگفت آوری توضیح دهد. با این حال کوانتومی کردن اولین نیروی شناخته شده یعنی گرانش مطابق روش‌های بکار گرفته شده برای سایر نیروها، پیش نرفته است و ما را به چالشی بزرگ فرا خوانده است.

شاید مهمترین انگیزه برای ساختن نظریه گرانش کوانتومی، وحدت بین گرانش و کوانتوم باشد. اما وجود مسائلی مانند سیاه‌چاله و کیهان اولیه انگیزه کافی برای جستجوی نظریه گرانش کوانتومی را به ما می‌دهد. به طور خاص انتظار می‌رود که گرانش کوانتومی جوابی برای مسئله‌ی آنتروپی و تابش هاوگینگ سیاه‌چاله داشته باشد.

سیاه‌چاله در اثر رمبش اجرام بسیار سنگین به درون خود، مانند ستاره‌ها، ایجاد می‌شود. هنگامی که نیروی گرانشی بین مواد تشکیل دهنده‌ی ستاره بر سایر نیروها درون ستاره‌ای غلبه می‌کند، ستاره دچار رمبش می‌شود. برای بررسی هر چه آسان‌تر رمبش گرانشی، به طور معمول از مدل‌های ساده سازی شده استفاده می‌شود، یکی از این مدل‌ها، که ابتدا توسط لیمایت<sup>۳</sup> مطرح شد و سپس توسط تولمان<sup>۴</sup> و بُندی<sup>۵</sup> مورد تحلیل بیشتری قرار گرفت به اختصار مدل *LTB* نام گرفته است [۶]، که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. گاهی لازم می‌شود که برای ایجاد سادگی ریاضی در حل این گونه مدل‌های گرانشی و کیهان‌شناسی و یا حتی پی بردن به خواص نظریه‌های گرانش کوانتومی، از فضا-زمانی با بعد کمتر از چهار، مانند فضا-زمان سه بعدی استفاده شود.

نسبیت عام در  $(۲+۱)$ -بعد، اگر چه با سادگی در محاسبات همراه است اما باید توجه داشت که گرانش در  $(۲+۱)$ -بعد دارای تفاوت‌هایی بنیادی با گرانش در  $(۳+۱)$ -بعد دارد. به عنوان نمونه، گرانش  $(۳+۱)$ -بعدی دارای دو درجه آزادی می‌باشد که نشان دهنده‌ی وجود امواج گرانشی است، اما در  $(۲+۱)$ -بعد، هیچ

<sup>۱</sup>universal

<sup>۲</sup>gauge theory

<sup>۳</sup>Lemaitre

<sup>۴</sup>Tolman

<sup>۵</sup>Bondi

درجه‌ی آزادی باقی نمی‌ماند و در نتیجه تبادل نیروی گرانشی وجود نخواهد داشت. اما با این حال، وجود یک حل خاص از معادله‌ی اینشتین در  $(2+1)$ -بعد که دارای خواص سیاه‌چاله، از جمله افق رویداد می‌باشد انگیزه کافی برای دنبال کردن گرانش در  $(2+1)$ -بعد را می‌دهد، این سیاه‌چاله که بی‌شبهت با سیاه‌چاله‌ی چرخان در  $(3+1)$ -بعد نیست،  $BTZ$  نام دارد که برای اولین بار توسط بانادوس<sup>۱</sup>، تیتلبویم<sup>۲</sup> و زانلی<sup>۳</sup> معرفی شد [۵].

فرمول‌بندی هامیلتونی به دلیل داشتن نقش مهمی در مکانیک کوانتومی و همچنین به کار گرفتن از گروه‌های پواسون و وجود تبدیلات بندادی<sup>۴</sup> که به این فرمول‌بندی زیبایی و غنای خاصی می‌بخشد، از اهمیت بالایی در فیزیک مدرن برخوردار است. برای نوشتن هامیلتونی یک دستگاه فیزیکی، در مواردی به لاگرانژی‌هایی برمی‌خوریم که به طور صریح رابطه‌ی بین شتاب‌ها برحسب سرعت‌ها و مختصات را نمی‌دهد و برای بررسی کامل دینامیک سیستم نیاز به پیدا کردن روابطی بین مختصات و سرعت‌ها داریم. در این گونه موارد برای پیدا کردن هامیلتونی دستگاه از روشی با عنوان دستگاه‌های قیدی استفاده می‌شود که به طور مفصل بررسی شده‌اند [۲]. برای به دست آوردن هامیلتونی دستگاه‌های گرانشی می‌توان از دستگاه‌های قیدی استفاده کرد. به نظر می‌رسد که با استفاده از هامیلتونی دستگاه گرانشی در حضور غبار و کوانتس آن به روش دیراک می‌توان به درک ما از خواص سیاه‌چاله کمک کرد [۱۰]، [۱۱].

در فصل دوم از این پایان‌نامه به گرانش در  $(2+1)$ -بعد و تفاوت‌های اساسی آن با گرانش در  $(3+1)$ -بعد می‌پردازیم. بوسیله‌ی تحلیل تانسور خمش در  $(2+1)$ -بعد، چگونگی وابستگی خمش فضا-زمان به ثابت کیهان‌شناسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین از روی معادله‌ی ژئودزی برای میدان گرانشی ضعیف، نشان می‌دهیم که در  $(2+1)$ -بعد نیروی نیوتونی بین اجرام وجود ندارد.

در فصل سوم هامیلتونی گرانش بوسیله‌ی تجزیه‌ی فضا-زمان به روش  $ADM$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از مشخص شدن هامیلتونی و قیود دستگاه، درجات آزادی گرانش شمارش می‌شود و در انتها به اهمیت جمله‌ی مرزی در گرانش پرداخته می‌شود.

در فصل چهارم سیاه‌چاله‌ی  $BTZ$  را از حل قیود در فضای فاز به دست می‌آوریم. با تحلیل جمله‌ی مرزی، جرم و تکانه زاویه‌ای سیاه‌چاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین نشان می‌دهیم که سیاه‌چاله‌ی  $BTZ$  را می‌توان بوسیله‌ی تثبیت پیمانانه نیز به دست آورد.

در فصل پنجم رمبش غبار در  $(2+1)$ -بعد توسط مدل  $LTB$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مدل،

<sup>۱</sup>M.Banados

<sup>۲</sup>C.Teitelboim

<sup>۳</sup>J.Zanelli

<sup>۴</sup>canonical

غبار ناهمگن و ناچرخان فرض می‌شود. با معرفی دو تابع جرم و انرژی برای غبار در حال رمبش، نشان داده می‌شود که می‌توان فرآیند رمبش را توسط این دو تابع بیان کرد. توابع جرم و انرژی در بررسی جمله‌ی مرزی موجود در هامیلتونی دارای اهمیت هستند. نشان می‌دهیم که چگونه رمبش این غبار منجر به ایجاد سیاه‌چاله‌ی *BTZ* با تکانه زاویه‌ای صفر می‌شود. همچنین تکنیکی‌های موجود در این مدل بررسی می‌شوند.

در فصل ششم به روش دستگاه‌های قیدی، هامیلتونی مربوط به دستگاه غبار و گرانش را به همراه قیود آن محاسبه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که شرط ناچرخان بودن غبار می‌تواند توسط شرط تثبیت پیمانانه حاصل شود. با محاسبه‌ی متغیرهای فضای فاز بر حسب مختصه‌های فضا-زمان، تابع جرم بر حسب متغیرهای بنادادی به دست می‌آید. از تابع جرم و تکانه‌ی همیوگ آن به عنوان مختصه‌های بنادادی جدید استفاده شده و توسط تبدیلات بنادادی، هامیلتونی بر حسب مختصه‌های جدید نوشته می‌شود. هامیلتونی جدید می‌تواند به عنوان نقطه‌ی شروع برای کوانتش دستگاه استفاده گردد که در انتها به طور مختصر به کوانتش دستگاه اشاره می‌شود.

## فصل ۲

### گرانش در (۲+۱)-بعد

آنچه ما تا کنون درباره‌ی تعداد ابعاد فیزیکی دنیای اطرافمان آموخته‌ایم این است که رویدادهای فیزیکی شناخته شده، در فضایی چهار بُعدی شامل سه بعد فضایی و یک بعد زمانی رخ می‌دهند. چگونگی درهم آمیختن فضا و زمان توسط نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین توضیح داده می‌شود. اما اینشتین پا را فراتر از این گذارده و در نظریه‌ی نسبیت عام خود شرح داده که چگونه این فضا-زمان چهار بُعدی توسط انرژی و ماده دچار خمش شده و این خمش در بافت فضا-زمان همان نیروی گرانشی است که ما آن را می‌شناسیم. با این حال گاهی برای ساده سازی در مدل‌های مرتبط با گرانش و یا بررسی خواص نظریه‌های گرانش کوانتومی، لازم است که به فضا-زمانی با ابعاد کمتر از چهار بعد وارد شویم. بحث بسیار جامع‌تر درباره‌ی کوانتوم گرانشی در (۲+۱)-بعد در مرجع [۱] موجود است، همچنین چارچوب کلی مطالب این فصل از این مرجع استفاده شده است.

در گرانش اینشتین برهمکنش فضا-زمان با ماده-انرژی توسط معادله‌ی زیر بیان می‌شود،

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

سمت چپ این معادله خواص فضا-زمان شامل متریک  $g_{\mu\nu}$ ، تانسور ریچی  $R_{\mu\nu}$  و اسکالر ریچی  $R$  قرار

دارند و در سمت راست آن تانسور تکانه-انرژی  $T_{\mu\nu}$  قرار گرفته است. همچنین  $\Lambda$  ثابت کیهان شناسی است. معادله‌ی (۱.۲) در خلاء به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(R - \Lambda), \quad (۲.۲)$$

با رد گرفتن از دو طرف این معادله در  $(۲+۱)$ - بعد نتیجه می‌گیریم که  $R = -۶\Lambda$ . تعداد مؤلفه‌های مستقل تانسور خمش از رابطه‌ی  $\frac{1}{4}n^2(n^2 - 1)$  محاسبه می‌شود که در سه بعد تعداد این مؤلفه‌ها برابر ۶ است که با تعداد مؤلفه‌های مستقل تانسور ریمان در سه بعد برابر است. با توجه به رابطه‌ی  $R_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}R_{\gamma\alpha\delta\beta}$  می‌توان نتیجه گرفت تمام مؤلفه‌های تانسور خمش را می‌توان بر حسب تانسور ریچی نوشت. تانسور خمش در مختصات موضعی لخت به صورت زیر است [۳]،

$$R_{\gamma\alpha\delta\beta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}, \quad (۳.۲)$$

که در آن  $A_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial_\beta$  و  $\gamma_{\alpha\beta}$  متریک در مختصات موضعی لخت است. با تنجش بر روی  $\gamma$  و  $\delta$  به دست می‌آوریم،

$$R_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}. \quad (۴.۲)$$

اسکالر خمش نتیجه می‌دهد،  $R = ۴A$  که با جایگذاری در رابطه‌ی فوق،  $A_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - R/۴\gamma_{\alpha\beta}$ . در نهایت با جایگذاری  $A_{\alpha\beta}$  در تانسور خمش، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود،

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{4}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R. \quad (۵.۲)$$

رابطه‌ی فوق بیانگر تفاوت بنیادی در نسبت عام  $(۲+۱)$ - بعدی با  $(۳+۱)$ - بعدی است و نشان می‌دهد که تانسور خمش در  $(۲+۱)$ - بعد به صورت خطی با تانسور ریچی مرتبط است.

با جایگذاری معادله‌ی (۲.۲) در رابطه‌ی (۵.۲) نتیجه‌ی زیر را برای تانسور خمش به دست می‌آوریم،

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}). \quad (۶.۲)$$

این به این معنا است که هر حل خلاء معادله‌ی اینشتین با  $\Lambda = ۰$  تانسور ریمان صفر دارد یعنی تخت است و

هنگامی که ثابت کیهان‌شناسی مخالف صفر باشد، حل خلاء دارای خمشی ثابت و متناسب با  $\Lambda$  است. تفاوت بسیار مهم دیگر بین گرانش  $(2+1)$ -بعدی و  $(3+1)$ -بعدی در تعداد درجات آزادی آنها است. با استفاده شمارش درجات آزادی در فضای فاز که در فصل بعد به آن می‌پردازیم، مشخص شده است که در  $(2+1)$ -بعد هیچ درجه‌ی آزادی وجود ندارد که این به معنای عدم وجود امواج گرانشی است. از عدم انتشار امواج گرانشی در  $(2+1)$ -بعد می‌توان انتظار داشت که نیروی نیوتونی در حد میدان‌های ضعیف نیز وجود نداشته باشد.

از نسبت عام می‌دانیم که معادله‌ی ژئودزی برای میدان گرانشی ضعیف به صورت معادله‌ی حرکت نیوتون حاصل می‌شود. به طور کلی معادله‌ی ژئودزی در  $n$ -بعد به شکل زیر است،

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{2(n-3)}{n-2} \partial_i \Phi = 0, \quad (7.2)$$

که  $\Phi$  پتانسیل گرانشی است و در رابطه‌ی  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$  صدق می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود این معادله برای  $n = 4$  معادله‌ی حرکت نیوتون یک ذره در میدان گرانشی را نتیجه می‌دهد، اما برای  $n = 3$  ذره‌ی آزمون هیچ نیروی نیوتونی از طرف میدان گرانشی احساس نمی‌کند.

### فصل ۳

#### همیلتونی گرانش

در یک نظریه میدان برای نوشتن همیلتونی به چگالی لاگرانژی احتیاج داریم. کنش گرانش اینشتین به عنوان یک نظریه میدان در  $n$ -بعد به شکل زیر است،

$$I = \int d^n x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (1.3)$$

برای به دست آوردن چگالی لاگرانژی کنش فوق باید آن را به صورت زیر نوشت،

$$I = \int dt \int d^{n-1} \mathcal{L}. \quad (2.3)$$

با توجه به پیوستار بودن فضا-زمان در نسبیت عام، برای نوشتن کنش به صورت فوق، می‌توان فضا-زمان را به فضا و زمان تجزیه کنیم. در اینجا این کار بوسیله تجزیه متریک به روش  $ADM$  انجام می‌شود [۲].



### ۱.۳ تجزیه ADM

در این روش که توسط آرنوید<sup>۱</sup>، دزیر<sup>۲</sup> و میزنر<sup>۳</sup> معرفی شد، خمینه‌ی فضازمان  $M$  به صفحات زمان ثابت  $\Sigma_t$  برش<sup>۴</sup> داده می‌شود. در پیوست (الف) جزئیات تقسیم خمینه به صفحات یا همان ابرسطح‌ها<sup>۵</sup> مورد بررسی قرار گرفته است. هرکدام از صفحات توسط سیستم مختصاتی  $x^i$  و متریک القایی<sup>۶</sup>  $g_{ij}(t, x^i)$  بیان می‌شوند. برای بدست آوردن کامل متریک، باید رابطه‌ی بین صفحات  $\Sigma_t$  و  $\Sigma_{t+dt}$  را بدانیم. برای این کار از نقطه‌ای روی صفحه  $\Sigma_t$  با مختصات  $x^i$  شروع می‌کنیم و آن را به اندازه بینهایت کوچک در راستای عمود بر صفحه  $\Sigma_t$  جابه‌جا می‌کنیم. در این جابه‌جایی، تغییر در زمان ویژه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$d\tau = N dt \quad (۳.۳)$$

که  $N(x^i, t)$  تابع گذر<sup>۷</sup> نامیده می‌شود. چنین جابه‌جایی نه تنها مختصه‌ی زمان را انتقال می‌دهد بلکه مختصه مکانی را نیز دچار تغییر می‌کند. تحول زمانی مختصه‌ی  $x^i$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x^i(t + dt) = x^i(t) - N^i dt \quad (۴.۳)$$

که  $N^i(t, x^i)$  بردار انتقال<sup>۸</sup> نام دارد. با استفاده از نسخه‌ی لورنتسی قضیه فیثاغورث (شکل ۱.۳)، فاصله‌ی دو نقطه‌ی  $(t, x^i)$  و  $(t + dt, x^i + dx^i)$  برابر است با

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (۵.۳)$$

رابطه‌ی فوق، متریک ADM نامیده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که اندیس‌های  $i, j, \dots$  توسط قسمت فضایی متریک  $g_{ij}$  و بالا و پایین می‌شوند و نه با تمام متریک فضازمانی.

<sup>۱</sup>R. Arnowitt

<sup>۲</sup>S. Deser

<sup>۳</sup>C. W. Misner

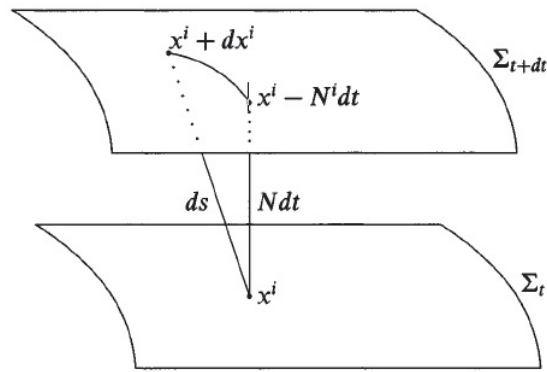
<sup>۴</sup>slicing

<sup>۵</sup>hypersurfaces

<sup>۶</sup>induced

<sup>۷</sup>lapse function

<sup>۸</sup>shift vector



شکل ۱.۳: تجزیه ADM و نمایش فاصله بر اساس نسخه‌ی لورنتسی قضیه فیثاغورث

معکوس متریک (۵.۳) با رابطه‌ی زیر داده می‌شود،

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} -1 & N^i \\ N^j & (N^2 g^{ij} - N^i N^j) \end{pmatrix}. \quad (۶.۳)$$

هندسه‌ی برش فضا-زمان به صفحات  $\Sigma_t$  دارای دو خاصیت است، یکی خمش ذاتی صفحات به عنوان خمینه‌ی ۲-بعدی و دیگری خمش غیر ذاتی که ناشی از غوطه‌وری  $\Sigma_t$  در فضا-زمان  $M$  می‌باشد. همانطور که خمش ذاتی توسط رفتار بردار مماس بر  $\Sigma_t$  تحت انتقال موازی معین می‌شود، خمش غیر ذاتی نیز توسط رفتار بردار عمود بر  $\Sigma_t$  معین می‌شود. همانطور که در پیوست (الف) مورد بحث قرار گرفته است، خمش غیر ذاتی  $K_{ij}$  صفحه  $\Sigma$  توسط رابطه‌ی (الف.۱۳) داده می‌شود. در تجزیه‌ی ADM بردار عمود بر  $\Sigma_t$  دارای مؤلفه‌ی  $n_\mu = (N, 0, 0)$  است، در نتیجه می‌توان نشان داد،

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\partial_t g_{ij} - {}^{(2)}\nabla_j N_i - {}^{(2)}\nabla_i N_j). \quad (۷.۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی اسکالر خمش (الف.۱۷)، می‌توان نشان داد که کنش هیلبرت-اینشتین در (۲+۱)-بعد به شکل زیر حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} I &= \int d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \\ &= \int dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{{}^{(3)}g} [{}^{(3)}R - 2\Lambda + K_{ij} K^{ij} - K^2] + B, \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

<sup>۱</sup>embedding

که  $B$  جمله‌ی مرزی است. در بخش (۲.۳) به جمله‌ی مرزی خواهیم پرداخت. اکنون می‌توان به نوشتن هامیلتونی برای کنش هیلبرت-اینشتین پرداخت. تنها مشتق زمانی موجود در کنش، جمله‌ی  $\partial_t g_{ij}$  در عبارت  $K_{ij}$  است، بنابراین تکانه‌ی بنیادی همیوگ آن به صورت زیر است،

$$\pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t g_{ij})} = \sqrt{({}^{\nu})g}(K^{ij} - g^{ij}K). \quad (۹.۳)$$

با توجه به اینکه مشتق‌های زمانی  $N$  و  $N^i$  در کنش وجود ندارند، تکانه همیوگ آنها قیود اولیه دستگاه هستند،

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_t N)} \approx 0 \\ \Pi_i &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_t N^i)} \approx 0. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

گروه پواسون تکانه‌ها و میدان‌ها به صورت زیر هستند،

$$\begin{aligned} \{\Pi_\mu, N^\nu\}_{x^*=y^*} &= \delta_\nu^\mu \delta(x - x') \\ \{g_{ij}, \pi^{kl}\}_{x^*=y^*} &= \frac{1}{4}(\delta_i^l \delta_j^k + \delta_i^k \delta_j^l) \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (۱۱.۳)$$

که  $\Pi_\mu = (\Pi, \Pi_i)$  و  $x$  بردار فضایی است. همچنین تابع دلتا  $\delta$  که مستقل از متریک است به شکل زیر نوشته می‌شود،

$$\int dx^\nu \delta(x - x') f(x) = f(x'). \quad (۱۲.۳)$$

با گرفتن رد از دو طرف رابطه (۹.۳) بدست می‌آوریم،

$$\pi = \pi_i^i = 2\sqrt{g}K, \quad (۱۳.۳)$$

که رابطه‌ای به صورت زیر حاصل می‌شود،

$$K^{ij} = -\frac{1}{\sqrt{g}}(\pi^{ij} - \frac{1}{4}\pi g^{ij}). \quad (۱۴.۳)$$

اکنون می‌توان هامیلتونی کانونیک را از تعریف زیر به دست آورد،

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \Pi_\mu \partial_t N^\mu - \pi^{ij} \partial_t g_{ij} - \mathcal{L} \\ &= \gamma \pi^{ij} \nabla_j N^i - N \frac{1}{\sqrt{g}} (-\pi_{ij} \pi^{ij} + \frac{1}{\gamma} \pi^\gamma + {}^{(\gamma)} R g - \gamma \Lambda g) \end{aligned} \quad (15.3)$$

که در آن مشتق زمانی متریک از رابطه‌ی (۷.۳) جایگزین شده است. با استفاده از انتگرال جزئی و چشم پوشی از جمله مرزی، هامیلتونی کانونیک حاصل می‌شود،

$$H_c = \int dx^\gamma (N \mathcal{H} + N_i \mathcal{H}^i) \quad (16.3)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{\sqrt{{}^{(\gamma)} g}} (\pi_{ij} \pi^{ij} - \pi^\gamma) - \sqrt{{}^{(\gamma)} g} ({}^{(\gamma)} R - \gamma \Lambda), \\ \mathcal{H}^i &= -\gamma {}^{(\gamma)} \nabla_j \pi^{ij}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

هامیلتونی کل بوسیله‌ی اضافه کردن قیود اولیه دستگاه به صورت زیر به دست می‌آید،

$$H_T = H_c + \int v^\mu \Pi_\mu \quad (18.3)$$

که  $v^\mu$  ضریب نامعین لاگرانژ است. با استفاده از شرط سازگاری قیود اولیه داریم،

$$\dot{\Pi}_\mu = \{\Pi_\mu, H_T\} \approx 0, \quad (19.3)$$

که نتیجه می‌گیریم  $\mathcal{H}$  و  $\mathcal{H}_i$ ، قیود ثانویه دستگاه به حساب می‌آیند که بر روی سطح قیدی صفر هستند،

$$\mathcal{H} \approx 0, \quad \mathcal{H}_i \approx 0. \quad (20.3)$$

قید  $\mathcal{H}$  را قید هامیلتونی و  $\mathcal{H}_i$  را قید تکانه می‌نامیم. شرط سازگاری این قیود چیز جدیدی نمی‌دهد و گروه