بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

(گرایش آنالیز عددی)

عنوان

روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی

از:

پریسا دهقان شکاراسطلخی

استاد راهنما:

دکتر حسین امینی‌خواه

بهمن ماه سال۱۳۹۲

تقدیم به...

پدر، مادر و برادر عزیزم

آنان که تابش آفتاب مهرشان در قلبم جاودانی ست

سپاس گزاری

زندگی، پنجره ای باز، به دنیای وجود

تا که این پنجره باز است، جهانی باماست

آسمان، نور، خدا، عشق، سعادت باماست

فرصت بازی این پنجره را دریابیم . . .

در ابتدا خداوند هستی بخش را شاکرم که توفیق جمع آوری و تهیه این پایان نامه را به بنده عنایت نمود. و بر خود واجب می دانم از همه کسانی که در طی این پژوهش از راهنمایی و یاری شان بهره مند گشته تشکر و قدردانی نمایم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم .

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حسین امینی خواه که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و همواره از نظرات سازنده و رهنمودهای ایشان در طول این دوره تحصیلی و همچنین جمع آوری و نگارش این مهم بهره برده ام صمیمانه تقدیر و تشکر می نمایم . مراتب قدردانی خود را از نظرات ارزشمند اساتید محترم، جناب آقای دکتر محمد رضا یاقوتی و جناب آقای دکتر محمد کیانپور که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند اعلام می دارم و همچنین از جناب آقای دکتر امیر زینل که به عنوان نماینده محترم تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور داشتند نیز قدردانی می نمایم .

از خانواده عزیزم به جهت حمایت های بی دریغشان در مراحل مختلف زندگی از آغاز تا به امروز بسیار سپاسگزارم . و در نهایت از تمامی دوستان گرامی ام که در طول این مدت افتخار مصاحبت و همفکری با آنها را داشتم صمیمانه تشکر می نمایم .

پریسا دهقان

بهمن ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

۳. فصل سوم : روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی

۴. فصل چهارم: کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل تاخیری

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

چکیده

عنوان : روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی

نام دانشجو: پریسا دهقان شکاراسطلخی

در این پایان نامه، روش تبدیل دیفرانسیل که یک روش نیمه تحلیلی- عددی مبتنی بر بسط تیلور می‌باشد و منجر به تولید جوابی تحلیلی به صورت یک چند جمله‌ای می‌گردد، برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی تعمیم داده شده است. هم‌چنین تقریب پد معرفی شده و با هدف افزایش دقت و گسترش حوزه همگرایی سری جواب به‌دست آمده با روش ارائه شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش مذکور بر روی مثال‌های متعدد مورد آزمایش قرار گرفته و نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهاد شده بسیار کارآمد و ساده می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: روش تبدیل دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل تفاضلی، تقریب پد

پیشگفتار

روش‌های تحلیلی محدودی برای حل انواع معادلات تابعی وجود دارد. برای تقریب جواب معادلاتی که به وسیله‌ی روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند و یا به سختی حل می‌شوند، از روش‌های عددی استفاده می‌شود. به این ترتیب معادلاتی که با روش-های تحلیلی قابل حل هستند، با روش‌های عددی نیز حل شده و با مقایسه‌ی جواب واقعی آن‌ها با جواب تقریبی و بررسی خطای حاصل، در صورت مناسب بودن دقت جواب به‌دست آمده توسط روش عددی به‌کار گرفته شده، می‌توان از آن روش عددی برای حل معادلات مشابه که با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند استفاده نمود.

در این پایان‌نامه روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی به‌کار گرفته می‌شود. در سال‌های اخیر، با پیشرفت علم و تکنولوژی، نیاز زیادی به حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی غیرخطی به وجود آمده است. معادلات دیفرانسیل تفاضلی غیرخطی کاربردهای وسیعی در شاخه‌های گوناگون علوم شامل مهندسی مکانیک، فیزیک ماده چگال، بیوفیزیک و تئوری کنترل دارند. و مدل‌های تفاضلی کاربرد وسیعی در مسائل زیست شناسی، فیزیک و مهندسی دارند. هرگاه پدیده‌ای گسسته مورد بررسی قرار می گیرد و یا معادله دیفرانسیلی گسسته سازی شود، معادلات دیفرانسیل تفاضلی به وجود می‌آیند. در سال‌های اخیر مطالعه روی معادلات دیفرانسیل گسسته به سرعت توسعه یافته است. در دهه‌های گذشته روش‌های زیادی نظیر روش تجزیه آدومین، روش توابع بیضوی ژاکوبی، روش تابع نمایی، روش تانژانت هایپربولیک و ... برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی غیرخطی ارائه شده‌اند. و دردهه‌ی اخیر، روش تبدیل دیفرانسیل به عنوان یک روش عددی که از دقت و همگرایی بالایی برخوردار است برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی، تعمیم داده شده و مورد استفاده قرار گرفته است.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل به صورت زیر می‌باشد

در فصل اول تعاریف و مقدمات اولیه مورد نیاز در کل پایان‌نامه بیان شده است. در فصل دوم روش تبدیل دیفرانسیل با ارائه چندین مثال معرفی می‌شود. در فصل سوم ابتدا روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادله تفاضلی به کار گرفته شده و با ذکر چند مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد، و سپس به تعمیم روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادله دیفرانسیل تفاضلی پرداخته و با ذکر مثال‌های متنوع دقت روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل چهارم روش تبدیل دیفرانسیل برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل تاخیری به‌کار گرفته شده و با ارائه چند مثال دقت روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در حل همه‌ی مثال‌ها از نرم افزار برنامه نویسی میپل[1] استفاده شده است.

[1] Maple

فصل اول

تعاریف و مقدمات اولیه

۱-۱ مقدمه

در این فصل به ارائه تعاریف و مقدمات اولیه مورد نیاز در کل پایان نامه می پردازیم.

۱-۲ تعاریف و مفاهیم اولیه در معادلات دیفرانسیل

ایزاک نیوتن[1] برای اولین بار موفق شد تا ضابطه حرکت اجرام مکانیکی در خلاء را با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان نماید. از آن زمان تاکنون، روز به روز بر اهمیت معادلات دیفرانسیل افزوده می‌شود. چرا که عملا بسیاری از پدیده‌های علمی شامل پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی، جامعه‌شناسی و... را با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌توان بیان نمود. از حرکت یک سیستم مکانیکی ساده نظیر یک پاندول گرفته، تا تحلیل حرکت اجسام سماوی، تحلیل جمعیت یک نوع به خصوص از حیوانات، پیش-بینی رشد اقتصادی یک کشور و بسیاری دیگر از مسایل از این دست معادلات دیفرانسیل به طور طبیعی ظاهر می‌گردد.

تعریف ۱-۲-۱ : یک معادله دیفرانسیل رابطه ای بین یک تابع مجهول، متغیر(های) تابع مجهول و مشتق‌های تابع مجهول می‌باشد. بنابراین آن چیزی که یک معادله دیفرانسیل را از یک معادله جبری متمایز می‌کند، وجود مشتق تابع مجهول در معادله می‌باشد.

تعریف ۱-۲-۲ : اگر در معادله دیفرانسیل تابع مجهول بر حسب یک متغیر باشد آن‌گاه معادله دیفرانسیل را یک معادله دیفرانسیل معمولی[2] می‌نامند.

تعریف ۱-۲-۳ : اگر در معادله دیفرانسیل تابع مجهول دارای بیش از یک متغیر مستقل باشد آن‌گاه معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل جزئی[3] یا پاره‌ای می‌نامند.

مثال ۱-۲-۱ : فرض کنید y یک تابع بر حسب متغیر x باشد. آن‌گاه روابط زیر یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب y می‌باشند.

(۱) $y' - y = 0,$

(۲) $(y')^3 + x^2yy' = e^x,$

(۳) $yy'' + y''' = \sin(x),$

اگر u تابعی بر حسب x و y باشد، آن‌گاه روابط زیر یک معادله دیفرانسیل جزئی بر حسب تابع دو متغیره u می‌باشند.

(۴) $u_x + u_y = 0,$

(۵) $u_{xx} + u_{yy} = \sin(xy),$

---

[1] Isaac Newton
[2] Ordinary differential equation (ODE)
[3] Partial differential equation (PDE)

تعریف ۱-۲-۴ : بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده (چه مشتق معمولی و چه مشتق جزئی) در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل می‌نامند. بر این مبنا معادلات دیفرانسیل را می‌توان به معادلات دیفرانسیل مرتبه ۱، مرتبه ۲ و... دسته بندی کرد.

به عنوان مثال معادلات (۱)، (۲) و (۴) از مرتبه اول، معادله (۵) از مرتبه دوم و معادله (۳) از مرتبه سوم می‌باشند.

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام با متغیر مستقل x و متغیر وابسته y به صورت

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{۱-۱}$$

می‌باشد. و فرم کلی یک معادله دیفرانسیل جزئی متشکل از متغیرهای مستقل $x, y, z, t, \ldots$ و متغیر وابسته u به صورت

$$F\left(x, y, z, t, \ldots, u, u_x, u_y, u_z, u_t, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, \ldots, u_{xy}, u_{xz}, \ldots\right) = 0, \tag{۲-۱}$$

می‌باشد، که در آن

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{xz} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \ldots.$$

تعریف ۱-۲-۵ : هرگاه معادله دیفرانسیل را بتوان بر حسب مشتقات به صورت یک چندجمله‌ای نوشت، آن‌گاه بالاترین توان مشتق را درجه معادله دیفرانسیل می‌نامند.

به عنوان مثال معادلات (۱) و (۳) درجه یک و معادله (۲) درجه سه هستند.

تعریف ۱-۲-۶ : یک معادله دیفرانسیل را خطی[1] گویند هرگاه ضابطه معادله بر حسب تابع مجهول و مشتقات آن خطی باشد. در غیر این صورت معادله را غیرخطی می‌نامند. به عنوان مثال معادلات (۱) و (۴) خطی و معادلات (۲)، (۳) و (۵) غیرخطی می‌باشند. فرم کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n خطی به صورت

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x), \tag{۳-۱}$$

می‌باشد. در معادله خطی فوق اگر $f(x) \equiv 0$ آن‌گاه معادله را همگن[2] می‌نامند. هم‌چنین هرگاه توابع $0 \le i \le n$ ،$a_i(x)$، اعداد ثابت باشند، معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب غیرثابت نامیده می‌شود.

فرم کلی معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه یک و دو به صورت

$$\begin{aligned} &A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y), \\ &A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = f(x,y), \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

[1] Linear
[2] Homogeneous

می‌باشند. در معادلات دیفرانسیل جزئی اگر خطی بودن برای بالاترین مراتب مشتق برقرار باشد، آن گاه معادله را نیمه خطی[1] می‌نامند. فرم کلی یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم نیمه خطی به صورت

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y), \tag{۱-۵}$$

می‌باشد. در فیزیک معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بیشتر از معادلات دیگر ظاهر می‌شوند.

تعریف ۱-۲-۷ : جواب معادله دیفرانسیل (۱-۱) در بازه $\alpha < x < \beta$، تابع $y=\varphi(x)$ است به طوری‌که φ'، φ''، ... و $\varphi^{(n)}$ در این بازه موجود هستند و این تابع در (۱-۱) صدق می‌کند. یعنی

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \qquad \alpha < x < \beta.$$

به طور کلی جواب یک معادله دیفرانسیل به سه دسته جواب عمومی، جواب خصوصی و جواب غیرعادی (منفرد) تقسیم می-شود.

تعریف ۱-۲-۸ : هرگاه جواب معادله دیفرانسیل توسط رابطه‌ای با ثابت‌های دلخواه بیان شود، آن جواب را جواب عمومی معادله می‌گویند.

تعریف۱-۲-۹ : جوابی را که از جواب عمومی با محاسبه پارامتر دلخواه تحت شرایط داده شده به دست می‌آید، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل می‌گویند.

تعریف ۱-۲-۱۰ : جوابی که تحت هیچ شرایط اولیه‌ای، از جواب عمومی بدست نیاید و منحنی آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی مماس باشد را جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل می‌نامند.

مثال ۱-۲-۳ : معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2) = 9$ با شرط اولیه $y(0) = 3$ را در نظر بگیرید. این معادله دارای جواب عمومی $(x-c)^2 + y^2 = 9$ است زیرا در معادله صدق می کند. هم‌چنین از شرط اولیه داده شده خواهیم داشت $c = 0$ از این رو $x^2 + y^2 = 9$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل است. از طرفی بدیهی است خطوط $y = \pm 3$ نیز جواب معادله است که تحت هیچ شرط اولیه‌ای از جواب عمومی به دست نخواهد آمد، بنابراین جواب غیرعادی معادله خواهد بود.

توجه شود، بعضی از معادلات دارای جواب عمومی نیستند، به عنوان مثال معادلات $|y'| + |y| = 0$ یا $y'^2 + y^2 = 0$ تنها یک جواب $y = 0$ دارند. هم چنین برخی از معادلات در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارند مانند معادله $y'^2 + 1 = 0$.

از جمله روش‌های حل معادله دیفرانسیل یا همان یافتن جواب عمومی، می‌توان به روش‌های کلاسیک و روش سری‌ها اشاره کرد. منظور از روش‌های کلاسیک، آن دسته از روش‌هایی است که ابتدا نوع معادله تشخیص داده می‌شود و سپس یک روش مشخص برای یافتن جواب عمومی دنبال می‌شود. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های فاکتور انتگرال‌گیری، روش کاهش

---
[1] Semi-linear

مرتبه و... اشاره نمود. در این روش‌ها برای جواب عمومی یک ضابطه مقدماتی ارایه می‌گردد. منظور از ضابطه مقدماتی عبارتی است که از ترکیب تعداد متناهی از توابع مقدماتی از قبیل توابع ثابت، چند جمله‌ای،کسری، مثلثاتی، نمایی و... تشکیل می‌شود. اکثر معادلات دیفرانسیل دارای جواب مقدماتی نمی‌باشند و لذا تلاش برای حل این معادلات با روش‌های کلاسیک بی‌نتیجه خواهد بود. در چنین حالاتی ممکن است بتوانیم با کمک روش سری‌ها یک جواب به صورت سری برای معادله استخراج کنیم. توجه شود که چون تعداد بی‌نهایت عمل جمع در یک سری به کار رفته است، لذا جواب به صورت سری را نمی‌توان یک جواب مقدماتی در نظر گرفت (مگر آن که سری را بتوان به یک تابع مقدماتی ساده کرد). البته روش سری‌ها اغلب برای معادلات خطی مرتبه دوم به کار می‌روند.

برای بدست آوردن جواب هر معادله دیفرانسیل شرایط دیگری نیز نیاز می‌باشد. این شرایط ممکن است شرایط اولیه و یا شرایط مرزی باشند. شرایط اولیه، مقدار تابع مجهول را در سراسر ناحیه در زمان آغازی معین می‌کند و شرایط مرزی، مقدار تابع مجهول را در نقاط مرزی ناحیه تعیین می‌کند. در موارد بسیاری شرایط اولیه یا مرزی به صورت مشتقات تابع در مرز داده می‌شود. اگر در یک معادله شرایط اولیه یا مرزی مربوط به خود تابع باشد، معادله را با شرط دیریکله[1] و در صورتی که آهنگ تغییرات تابع داده شده باشد، معادله را با شرط نیومن[2] گویند.

۱-۳ سری‌های توانی

در این بخش به معرفی سری‌های توانی[3] به طور مختصر می‌پردازیم [۱].

تعریف ۱-۳-۱: یک سری نامتناهی به شکل

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad (۱-۷)$$

را یک سری توانی از $x - x_0$ می‌نامیم. اعداد a_0، a_1،...، a_n،... ضرایب سری و x_0 مرکز سری نامیده می‌شود. هم‌چنین می‌گوییم (۱-۷)، یک سری توانی حول نقطه x_0 است. در حالت خاص سری

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad (۱-۸)$$

یک سری توانی از x نامیده می‌شود. سری (۱-۷) را همواره می‌توان با قرار دادن $X = x - x_0$ به شکل (۱-۸) نوشت. از این رو می‌توان خواص سری‌های به صورت (۱-۸) را بررسی نمود.

می‌گوییم سری توانی (۱-۷) در نقطه x_1 یا به ازای $x = x_1$ همگراست هرگاه

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(x_1 - x_0)^n,$$

[1] Dirichlet
[2] Neumann
[3] Power series

موجود باشد. در این حالت مقدار حد، مجموع سری در نقطه x_1 نامیده می‌شود. اگر حد موجود نباشد، سری در نقطه x_1 واگرا گفته می‌شود.

سری توانی (۱-۷) به ازای $x = x_0$ همگراست. ممکن است این سری فقط در این نقطه همگرا باشد، یا به ازای همه مقادیر x همگرا باشد، یا عدد مثبتی مانند R باشد به طوری که سری برای $|\ x - x_0\ | < R$ همگرا و برای $|\ x - x_0\ | > R$ واگرا باشد. در این صورت R را شعاع همگرایی سری می‌نامیم.

شعاع همگرایی سری توانی (۱-۷) را می‌توان از فرمول

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n + 1}\right|, \tag{۱-۹}$$

یا از فرمول

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n\,|}}, \tag{۱-۱۰}$$

به‌دست آورد. اگر $R = 0$، سری (۱-۷) فقط در $x = x_0$ همگراست. اگر $R = \infty$، سری برای همه مقادیر x همگراست. اگر $0 < R < \infty$، سری در بازه $(x_0 - R, x_0 + R)$ همگراست و این بازه را بازه همگرایی سری (۱-۷) می‌نامیم. در نقاط انتهایی بازه همگرایی، یعنی در نقاط $x_0 - R$ و $x_0 + R$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

۱-۴ سری تیلور و سری مک لورن

در ریاضیات، سری تیلور[1] یا گسترش تیلور نمایش یک تابع به صورت مجموع بی‌نهایت جمله است که از مشتق‌های تابع در یک نقطه به‌دست می‌آید. ریاضیدان انگلیسی، بروک تیلور[2]، در سال ۱۷۱۵ میلادی، مفهوم سری تیلور را به طور رسمی معرفی کرد. اگر سری را دور نقطه صفر گسترش دهیم، سری به سری مک لورن[3] نیز معروف است که به نام ریاضیدان اسکاتلندی، کالین مک لورن[4]، که در قرن ۱۸ام استفاده بسیاری از این حالت خاص سری تیلور کرد، نام‌گذاری شده است. مرسوم است که توابع را حول یک نقطه با تعدادی متناهی از جملات سری تیلور تقریب بزنند. قضیه تیلور مقدار خطای این تقریب زنی را به صورت کمّی تخمین میزند. هر تعداد متناهی از جملات اول سری تیلور به چندجمله‌ای تیلور معروف است. سری تیلور یک تابع، حد چند جمله‌ای‌های تیلور آن است (اگر حد وجود داشته باشد). یک تابع ممکن است با سری تیلورش برابر نباشد حتی اگر سری تیلور آن در هر نقطه همگرا باشد. تابعی که در یک بازه‌ی باز (یا یک دیسک در صفحه مختلط) با سری تیلورش برابر باشد، تابع تحلیلی خوانده می‌شود.

[1] Taylor series
[2] Brook Taylor
[3] Maclaurin series
[4] Colin Maclauriin

قضیه ۱-۴-۱ : (قضیه باقی‌مانده تیلور) اگر $f \in C^n[a,b]$ و $f^{(n+1)}$ بر (a,b) موجود باشد، آن‌گاه برای هر x و c متعلق به بازه $[a,b]$ ، عددی مانند $\eta \in (a,b)$ چنان موجود است که

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x), \tag{۱-۱۱}$$

به طوری که

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)(x-c)^{n+1}, \tag{۱-۱۲}$$

چند جمله‌ای $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k$ را چند جمله‌ای تیلور درجه n تابع f و $E_n(x)$ را باقی‌مانده $P_n(x)$ می‌نامند.

تعریف ۱-۴-۱ : اگر $f \in C^\infty[a,b]$، آن‌گاه برای هر x و c متعلق به بازه $[a,b]$ داریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k, \tag{۱-۱۳}$$

و آن را سری تیلور $f(x)$ حول نقطه $x=c$ می‌نامند.

تعریف ۱-۴-۲ : سری تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x=0$ را سری مک لورن تابع $f(x)$ می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots, \tag{۱-۱۴}$$

تعریف ۱-۴-۳ : تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 تحلیلی گویند، هرگاه بسط سری توانی آن به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

در یک همسایگی x_0 موجود باشد که در آن a_nها از رابطه $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ به دست می‌آیند. به عنوان مثال توابع $\sin(x)$، $\cos(x)$ و e^x در تمامی نقاط تحلیلی هستند.

۱-۵ مقدمه‌ای بر معادلات تفاضلی

در این بخش به طور مختصر به معرفی معادلات تفاضلی[1] می‌پردازیم [۲].

توابع $J^+_{x_0}$ یا $J^+_{x_0',h}$ تعریف شده روی مجموعه نقاط گسسته را به صورت

$$J^+_{x_0} = \{x_0, x_0+1, \ldots, x_0+k, \ldots\},$$
$$J^+_{x_0',h} = \{x_0', x_0'+h, \ldots, x_0'+kh, \ldots\},$$

[1] Difference equations

در نظر می‌گیریم که در آن $x_0{}' = hx_0 \in \mathbb{R}$ و $x_0 \in \mathbb{R}$ (گاهی $x_0 \in \mathbb{C}$). در اینجا $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به ترتیب نشان دهنده‌ی مجموعه اعداد حقیقی و مختلط هستند.

تعریف ۱-۵-۱ : فرض کنید $y : J_x^+ \to \mathbb{C}$، آن‌گاه $\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ که به صورت $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$ تعریف می‌شود، یک عملگر تفاضلی[1] است و $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ که به صورت $Ey(x) = y(x+1)$ تعریف می‌شود، یک عملگر انتقال[2] نامیده می‌شود.

به سادگی ثابت می‌شود که هر دو عملگر Δ و E،خطی و تعویض‌پذیر می‌باشند. زیرا برای هر دو تابع y و z و مجموعه تعریف J_x^+ و هر دو اسکالر α و β، داریم

$$\Delta(\alpha y(x) + \beta z(x)) = \alpha \Delta y(x) + \beta \Delta z(x),$$
$$E(\alpha y(x) + \beta z(x)) = \alpha E y(x) + \beta E z(x),$$

و $\Delta E y(x) = E \Delta y(x)$.

تفاضل دوم روی $y(x)$، به صورت

$$\Delta^2 y(x) = \Delta(\Delta y(x)) = y(x+2) - 2y(x+1) + y(x),$$

تعریف می‌شود. و در حالت کلی برای هر $k \in \mathbb{N}^+$،

$$\Delta^k y(x) = \Delta(\Delta^{k-1} y(x)), \qquad E^k y(x) = y(x+k),$$

با $\Delta^0 y(x) = E^0 y(x) = Iy(x)$ و I عملگر همانی است که $Iy(x) = y(x)$.

به آسانی دیده می‌شود که رابطه بین دو عملگر Δ و E، به صورت $\Delta = E - I$ می‌باشد. و بنابراین، توان‌های Δ می‌توانند به صورت جملات توان‌های E بیان شوند. در واقع

$$\Delta^k = (E-I)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i,$$
$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i,$$

که در آن $\binom{k}{i}$ها، ضرایب دوجمله‌ای هستند.

با معرفی عملگرهای Δ و E، می‌توان تعریفی از یک معادله تفاضلی ارائه داد.

تعریف ۱-۵-۲ : در حالت کلی، یک معادله تفاضلی از مرتبه k یک رابطه تابعی به فرم

$$F(x, y(x), \Delta y(x), \ldots, \Delta^k y(x), g(x)) = 0, \qquad (۱-۱۵)$$

است، که در آن $y, g : J_{x_0}^+ \to \mathbb{C}$. اغلب موارد، به جای عملگر Δ، از عملگر E استفاده می‌شود و معادله تفاضلی به فرم

[1] Difference operator
[2] Shift operator

$$G(x, y(x), Ey(x), \ldots, E^k y(x), g(x)) = 0, \qquad (۱-۱۶)$$

تبدیل می‌گردد. اگر تابع F (یا G) نسبت به $y(x)$، $\Delta y(x)$،...، $\Delta^k y(x)$(یا به ترتیب نسبت به $y(x)$، $Ey(x)$،...، $E^k y(x)$) خطی باشد، آن‌گاه معادله تفاضلی خطی نامیده می‌شود.

تعریف۱-۵-۳ : فرم نرمال یک معادله تفاضلی خطی ناهمگن مرتبه k، به صورت

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots p_k(n)y(n) = g(n), \qquad (۱-۱۷)$$

می‌باشد. که در آن $p_i(n)$ و $g(n)$ توابع مقدار حقیقی تعریف شده برای $n \geq n_0$ هستند و $p_k(n) \neq 0$ برای هر $n \geq n_0$.

تعریف ۱-۵-۴ : اگر در معادله (۱-۱۷)، $g(n)$ متحد با صفر باشد، آن‌گاه معادله (۱-۱۷) همگن نامیده می‌شود.

به معادله‌ی(۱-۱۷)، k شرط اولیه زیر را مربوط می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &y(n_0) = a_0, \\ &y(n_0+1) = a_1, \\ &\vdots \\ &y(n_0+k-1) = a_{k-1}. \end{aligned} \qquad (۱-۱۸)$$

قضیه ۱-۵-۱ : معادله (۱-۱۷) با شرایط اولیه (۱-۱۸) دارای جواب منحصر به فرد $y(n)$ می‌باشد.

۱-۵ مقدمه‌ای بر سالیتون‌ها

سالیتون[1]، یک موج سالیتوری[2]، یعنی یک موج جای‌گزیده در فضا است و ویژگی‌های پایدار عجیبی را بروز می‌دهد. تحقیق بر روی پاسخ‌های سالیتونی و موج‌های سالیتوری، اولین بار در قرن ۱۹(در سال ۱۹۶۰میلادی) توسط جان اسکات راسل[3] هنگامی که مسیر یک موج سالیتوری را در یک کانال آب دنبال می‌کرد، صورت گرفت. برای تعریف سالیتون معنای واحدی را نمی‌توان در نظر گرفت. جواب‌های غیر خطی معادله موج را سالیتون می‌گوییم و معادلات بسیاری وجود دارند که برای آنها پاسخ های سالیتونی را تعریف می‌کنیم. در یک تعریف ساده، به موجی که سه خاصیت زیر را داشته باشد سالیتون گفته می‌شود

۱- شکل آن تغییر نکند.

۲- در منطقه‌ای از فضا محدود باشد.

۳- بعد از برخورد با سالیتون‌های دیگر شکل خود را حفظ کند.

[1] Soliton
[2] Solitary
[3] John Scott Russel

برخی از جواب‌های معادله موجی که غیرخطی و پاشنده باشد می‌توانند خاصیت‌های زیر را داشته باشند

۱- با حرکت بسته موج، شکل و سرعت آن تغییر نکند.

۲- بقای شکل و سرعت مجانبی حتی پس از برخورد چند بسته موج با هم برقرار باشد.

در فیزیک کلاسیک به جواب‌هایی که خاصیت ۱ را داشته باشند موج انفرادی می‌گویند. اگر جواب علاوه بر خاصیت ۱ خاصیت ۲ را نیز دارا باشد آن را سالیتون می‌نامند. موج‌های سالیتونی رفتاری شبیه به ذرات دارند، موج‌های سالیتونی کاملا پایدارند و در صورت اختلال دوباره به حالت اولیه خود ادامه حرکت می دهند. به طور کلی موج‌های سالیتونی، موج‌هایی هستند که بدون تغییر در مسیر خود حرکت می کنند (تصور کنید خط راستی داریم با یک برآمدگی و این برآمدگی بدون هیچ تغییری در امتداد مسیرش حرکت می کند)، در طبیعت نیز گاهی می توان چنین موجهایی را مشاهده کرد.

وجود سالیتون‌ها در توصیف پدیده‌هایی نظیر انتشار امواج هیدرودینامیکی، امواج جای‌گزیده در پلاسماها، انتشار سیگنال در تارهای نوری و یا در مقیاس میکروسکوپی در انتقال بار در پلیمرهای رسانا، مدل‌های جای‌گزیده در بلورهای مغناطیسی و ...، لازم و ضروری است.